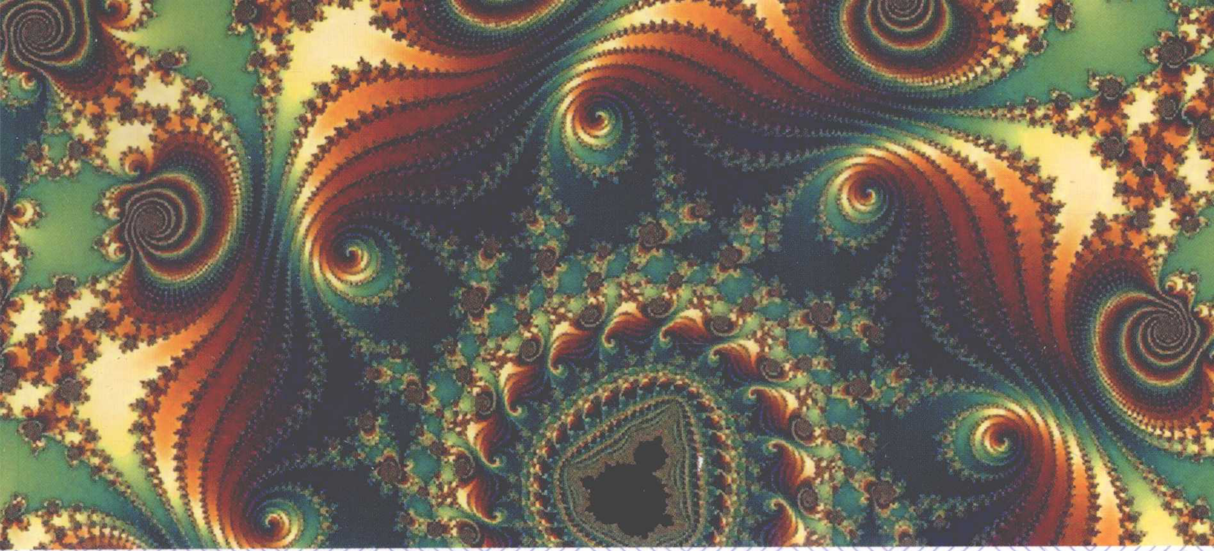


FRACTAL THEORY AND ITS APPLICATIONS

分形理论及其应用

朱 华 姬翠翠 编著

科学出版社

分形理论及其应用

Fractal Theory and Its Applications

朱　华　姬翠翠　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

分形理论是一门新兴的非线性学科，它是研究自然界不规则和复杂现象的科学理论和方法。本书主要介绍分形的基本理论及其在科学技术和人文艺术等方面的应用。全书共分10章，用通俗易懂的语言由浅入深地介绍了分形几何的基本概念、分形维数的计算、分形图形的生成、分形生长模型与模拟、分形插值与模拟、随机分形以及与分形密不可分的混沌理论的基本知识。在此基础上，通过总结自然界中的分形行为，用实例概述了分形图形、分形维数、分形模拟技术、分形图像编码压缩技术等在自然科学、工程技术、社会经济和文化艺术等领域中的应用成果。

本书是在前人成果的基础上，融入了作者多年来的教学心得和部分科研成果编著而成的，内容丰富，实用性强，可作为高校本科生、研究生教材，也可作为教师、科研人员和分形爱好者的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

分形理论及其应用＝Fractal Theory and Its Applications/朱华，姬翠翠编著．—北京：科学出版社，2011

ISBN 978-7-03-029987-1

Ⅰ．①分…　Ⅱ．①朱…②姬…　Ⅲ．①分形理论-高等学校-教材　Ⅳ．①F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第006019号

责任编辑：耿建业　迟　慧／责任校对：包志虹
责任印制：赵　博／封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2011年1月第　一　版　　开本：B5（720×1000）
2011年1月第一次印刷　　印张：21
印数：1—3 000　　字数：407 000

定价：70.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

分形理论是一门新兴的非线性学科，是处理自然界零碎和复杂现象的有力工具，它的开创者是具有法国和美国双重国籍的著名科学家 Mandelbrot。自从 20 世纪 80 年代，分形理论得到了广泛的应用，对自然科学和社会科学的各个领域都产生了重大的影响。分形理论不仅是一门科学，同时也是一门艺术；它既有深刻的理论意义，又有重大的实用价值。分形理论的出现改变了人们认识自然的方式和方法，也为人们解决复杂问题开辟了一条新的途径。因此，不仅科研人员希望了解和掌握分形，研究生和本科生甚至中学生也都希望学习和掌握分形的基本知识。

本书是作者在为全校本科生开设的“分形及其应用”选修课讲稿的基础上经修改和完善而完成的。全书共分 10 章。第 1 章分形几何概述，在介绍典型分形图形的基础上，引出分形的定义和基本性质，同时介绍了分形之父 Mandelbrot 的生平与创立分形理论的过程。第 2 章分形维数，详细介绍了分形维数的基本概念、几种典型分形维数的计算方法及计算实例。第 3 章分形图形的 L-系统生成法，在介绍 D0L-系统的图形模拟生成原理与方法的基础上，介绍树 0L-系统、随机 L-系统、参数 L-系统以及三维 L-系统的图形生成方法。第 4 章分形图形的迭代函数系统(IFS)生成法，详细介绍仿射变换和 IFS 的基本理论，以及 IFS 码的确定方法，在此基础上介绍了几种植物的 IFS 计算机模拟生成方法。第 5 章分形图形的复迭代生成法，在介绍复迭代基本知识的基础上，重点讨论了 Julia 集和 Mandelbrot 集的复迭代计算机生成方法及其性质。第 6 章扩散受限聚集(DLA)模型，主要讨论二维和三维 DLA 模型及其计算机模拟生成方法，以及 DLA 模型的分形维数计算方法。第 7 章分形插值函数，在概述经典插值函数的基础上，重点讨论了分形插值曲线和分形插值曲面的模型与计算机实现。第 8 章随机分形，主要介绍了分数布朗运动、分形曲线和分形曲面的随机生成方法。第 9 章混沌理论简介，介绍了混沌动力学的基本知识，讨论了种群增长模型中的混沌行为、分岔现象和费根鲍姆常数以及几种典型的混沌吸引子等。第 10 章分形的应用，在总结自然界分形行为的基础上，介绍了分形图形、分形维数、分形模拟技术、分形图像编码压缩技术等在相关领域中的应用。

本书选取的内容浅显易懂、由浅入深，每一章既互相联系，又可以作为独立的内容来学习。读者通过阅读第 1 章内容，便能初步认识分形并被其吸引，从而对学习分形产生兴趣。第 2 章的内容很重要，因为分形对象是用维数来表征的。虽然学习该章内容需要读者有一定的数学基础，但是除了 2.2 节 Hausdorff 维数和 2.6

节关联维数的内容之外，其余内容的学习并不困难。因为在编著过程中，为了让读者容易理解分形维数的概念和尽量多掌握几种分形维数的计算方法，作者用心地使用了通俗易懂的例子来引导读者。第3～8章是介绍各种分形图形的生成原理和模拟方法的，因为自然界中存在的许多对象或现象都呈现出分形图形，研究和掌握分形图形的生成技术有助于更好地理解自然和美化我们的生活。第9章关于混沌理论基本知识的介绍非常必要，这是因为分形与混沌密切相关。分形是空间上的混沌，混沌是时间上的分形。混沌系统存在的奇怪吸引子是分形的，系统的分岔图也是分形的，它们都是由系统迭代生成的。因此，了解混沌理论的相关知识有助于学习和理解分形。分形理论的应用已涉及自然科学、工程技术、社会经济和文化艺术等各个领域，第10章介绍的内容仅仅是其中的一部分，旨在为读者应用分形起到示范作用。

分形图形在本书中担当着重要的角色，为了给读者带来好的视觉效果，书中的所有分形图形均是作者利用计算机程序经多次生成后产生的。每一个图形都经过仔细调整，直到满意为止。作者生成分形图形的过程也给自己带来了快乐，尤其是一幅幅美丽的Julia集和Mandelbrot集等，以及各种奇形怪状的吸引子图形，都给人一种美的享受。在写作过程中，非常希望向读者呈现更多的分形图案，但限于篇幅，很多漂亮的图案只好被删去，每次都有忍痛割爱的感觉。

另外，为了便于读者了解为分形及混沌理论作出重要贡献的专家、学者，书中同时给出了他们的中、英文名，以及他们的生活年代。对于一些重要的科学家，还给出了他们的个人肖像，介绍了他们的个人简历和成就。

本书是在前人成果的基础上，融入了作者多年来讲授分形课程的教学心得和部分科研成果编著而成的。我的博士研究生姬翠翠为本书做了大量的工作，她收集整理了许多国内外文献资料，充实了书中每一章的内容，创作或修改生成了书中的全部分形图形。她还从学生的角度反复阅读了全书并提出了修改建议。

本书的出版得到国家自然科学基金项目（50975276、50475164）和教育部博士点基金项目（200802900513）的资助，得到了我的导师葛世荣教授的鼓励和支持以及他对书稿提出的宝贵意见，对此表示衷心感谢。另外，博士研究生江炜，硕士研究生吕亮、历建全和陆斌斌等对本书的文字校对及插图制作做了很多工作，在此一并表示谢意。

限于作者的知识水平，本书难免有不妥之处，敬请读者批评指正。

朱　华

2010年11月于徐州风华园

目 录

第 1 章　分形几何概述

分形几何学(fractal geometry)产生于 20 世纪 70 年代末 80 年代初，是一门以非规则几何形态为研究对象的新兴学科。由于在自然界中普遍存在不规则的对象或现象，因此分形几何又称为描述大自然的几何学。本章首先通过介绍十种著名的分形几何图形带领读者初识分形。这不仅有助于读者对后续内容的理解，而且因为分形图形之奇妙能给人以强烈的美的感受，从而激发读者学习分形的兴趣；同时还因为这些分形图形非常直观，即使没有任何数学基础的读者也能够很快地理解这些图形的生成方法，并能产生创作自己设计的分形图形的欲望，进而树立学好分形的信心。在此基础上，分别介绍分形几何的定义与基本性质，有了前面对分形图形的直观认识，读者就可以很容易地理解和掌握分形几何的基本概念。本章最后介绍了分形之父 Mandelbrot 的生平与创立分形理论的过程。当前人们对分形几何的兴趣主要归功于 Mandelbrot，正是他将我们领入了分形几何之门，从而打破了人们以欧氏几何方式认识世界的局限，拓宽了人们的视野，改变了人们的思维方式，推动了人类科学技术的进步。

1.1　初识分形——典型的分形几何图形

著名理论物理学家约翰·惠勒(John Wheeler, 1911—2008)说过："在过去，一个人如果不懂得'熵'是什么，就不能被认为是科学上有教养的人；在将来，一个人如果不能同样熟悉分形，他就不能被认为是科学上的文化人。"

分形是具有自相似性(self-similarity)的一类形状，也就是说，这类形状在不同的放大倍率下看起来一样。因此可以简单地理解为：一个分形对象就是一个粗糙的或零碎的几何形状，它可以被分成若干部分，且每一部分都(至少近似地)是整体形状的一个缩小尺寸的"复制品"。

分形对象在自然界中普遍存在，弯弯曲曲的海岸线、绵延不绝的山脉、九曲回肠的河流、袅袅上升的炊烟、千姿百态的云彩、枝繁叶茂的树木、划破天空的闪电、错综复杂的血管、粗糙不平的表面等都是分形。

分形也可以用数学方法来生成，如康托集、柯赫曲线、谢尔宾斯基三角垫、芒德勃罗特集以及混沌吸引子等。为了使读者对分形有一个初步的认识，下面首先向读者介绍十种最典型也是最简单的用计算机迭代生成的分形几何图形。

1.1.1　康托集

德国数学家康托(George Cantor，1845—1918)在1883年构造出康托中间三分集，又称为康托点集，简称为康托集(Cantor set)。它是在单位长度直线段[0，1]的基础上，将其分成三等份，去掉中间的1/3线段，剩下两端的1/3线段，即[0，1/3]和[2/3，1]这两个线段；再将剩下的这两个线段分别三等分，再分别去掉各自中间的1/3线段，剩下[0，1/9]、[2/9，1/3]、[2/3，7/9]和[8/9，1]4个线段；照此无限分割下去。在无限次分割过程中，每次分割所形成的线段数越来越多，而线段长度越来越小，在极限情况下，所有保留的部分就构成了Cantor集 C，如图1-1所示。

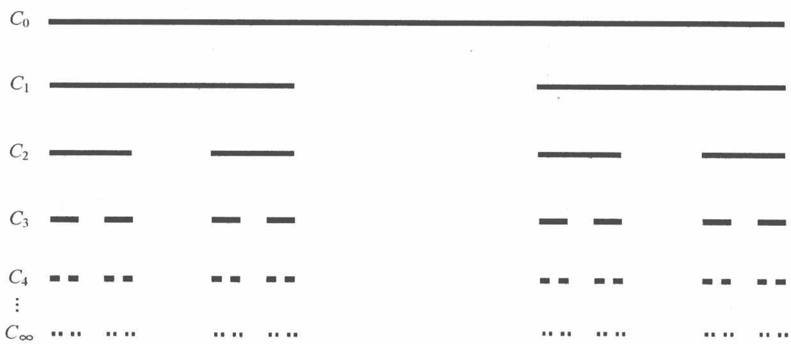


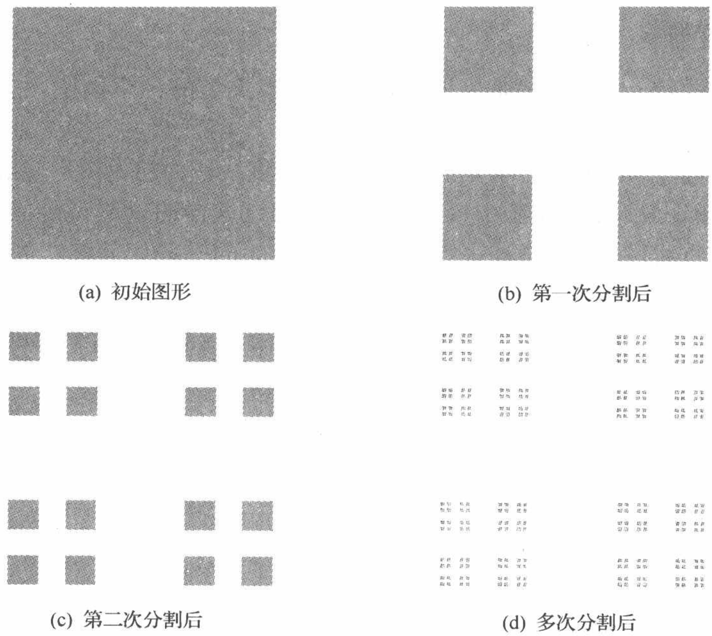
图1-1　Cantor集的生成过程

1.1.2　康托尘埃

康托尘埃(Cantor dust)的构造是Cantor集的延伸，它以单位边长的正方形为初始图形，将正方形各边进行三等分划分，如此得到9个子方块，然后剔除位于四边中部和正方形中心部位的5个子方块，留下位于四角部位的4个子方块；再对剩下的这4个子方块照此递次分割下去，就形成如图1-2所示的分形图案。由于最后形成的图案细小如灰尘，因此称做Cantor尘埃。

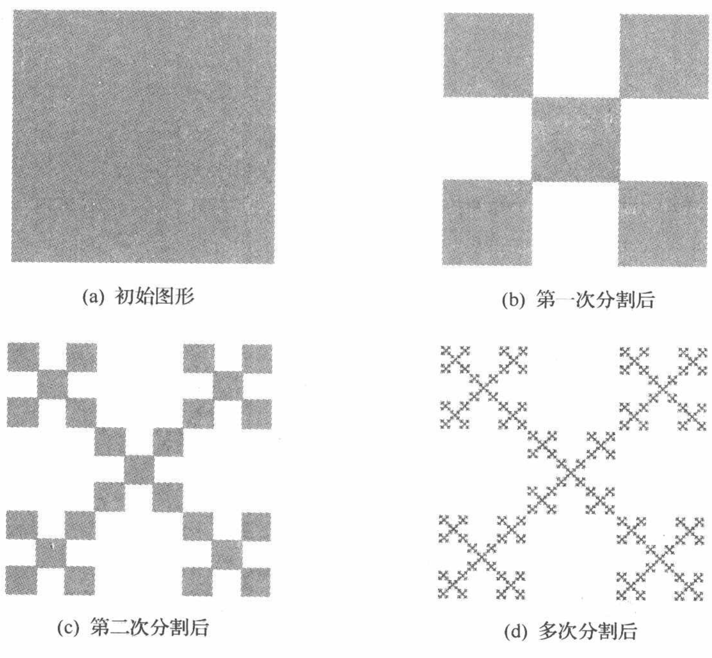
1.1.3　方块分形

方块分形(box fractal)的构造也是Cantor集的延伸，其生成过程与Cantor尘埃的生成过程非常相似。它也以单位边长正方形为初始图形，将正方形四边进行三等分分割，得到9个子方块，然后剔除位于四边中部的4个子方块，留下位于四角和中心的5个子方块；如此递次分割下去，就形成Box分形，如图1-3所示。



(a) 初始图形　(b) 第一次分割后　(c) 第二次分割后　(d) 多次分割后

图 1-2　Cantor 尘埃的生成过程



(a) 初始图形　(b) 第一次分割后　(c) 第二次分割后　(d) 多次分割后

图 1-3　Box 分形的生成过程

1.1.4 柯赫曲线

柯赫曲线(Koch curve)是分形几何图形中最典型的一个例子,它是由瑞典数学家柯赫(Helge von Koch,1870—1924)于 1904 年提出的。Koch 曲线的生成过程非常简单,同 Cantor 集一样,它以一条单位长度线段为初始图形,通过反复迭代而得到,如图 1-4 所示。从图中可以看出它是通过这样的过程得到的:第一步,在一单位长度直线段 K_0 上对其进行三等分,将中间的一段用两条边长均为 1/3 的线段来替换,这两条线段与被替换的中间线段构成一个等边三角形,替换以后得到 K_1;第二步,再对 K_1 上每条直线段重复第一步的操作得到 K_2;如此进行下去直到无穷,便得到 Koch 曲线 K。它是处处连续但又处处不可微分、长度无限的不光滑分形曲线。

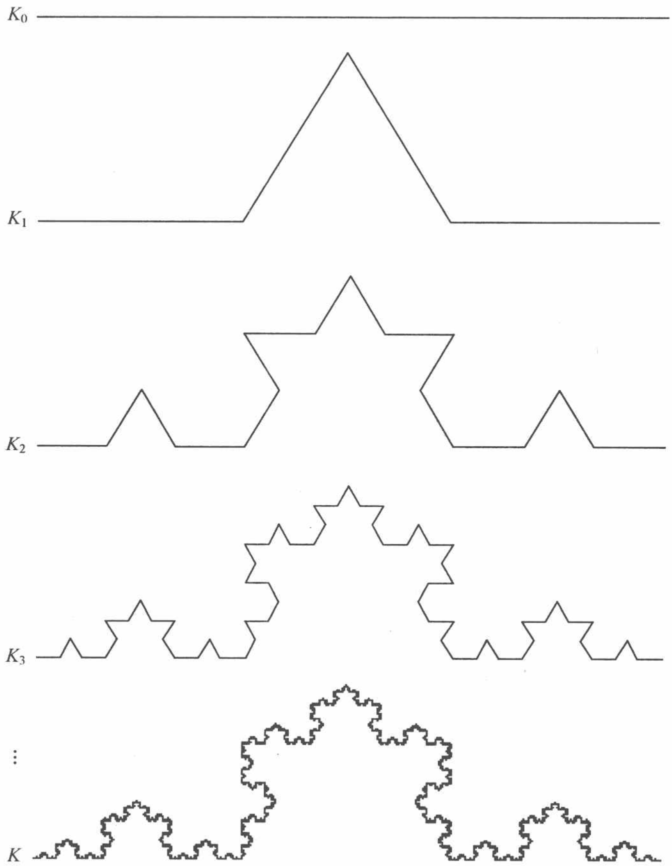


图 1-4　Koch 曲线的生成过程

1.1.5　柯赫雪花

柯赫雪花(Koch snowflake)是对单位边长的等边三角形的三条边分别利用生成 Koch 曲线的方法而得到的分形图形,由于构造出来的图形和雪花的轮廓非常相似,故称为 Koch 雪花,如图 1-5 所示。

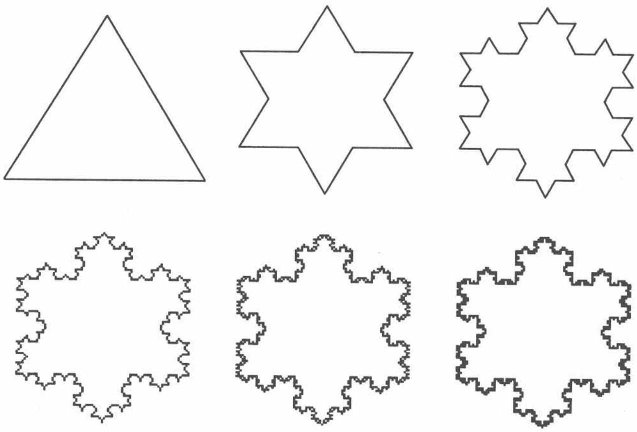
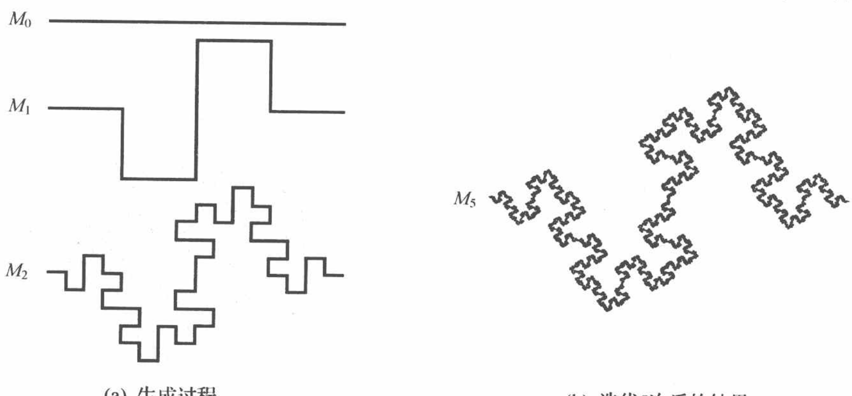


图 1-5　Koch 雪花的生成过程

1.1.6　明可夫斯基香肠

明可夫斯基香肠(Minkowski sausage)也可以称为四次 Koch 曲线,它是由德国数学家明可夫斯基(Hermann Minkowski,1864—1909)提出的。其生成过程如图 1-6 所示,首先将单位长度直线 M_0 进行四等分,保留两端的两条线段,把中部



(a) 生成过程　　(b) 迭代5次后的结果

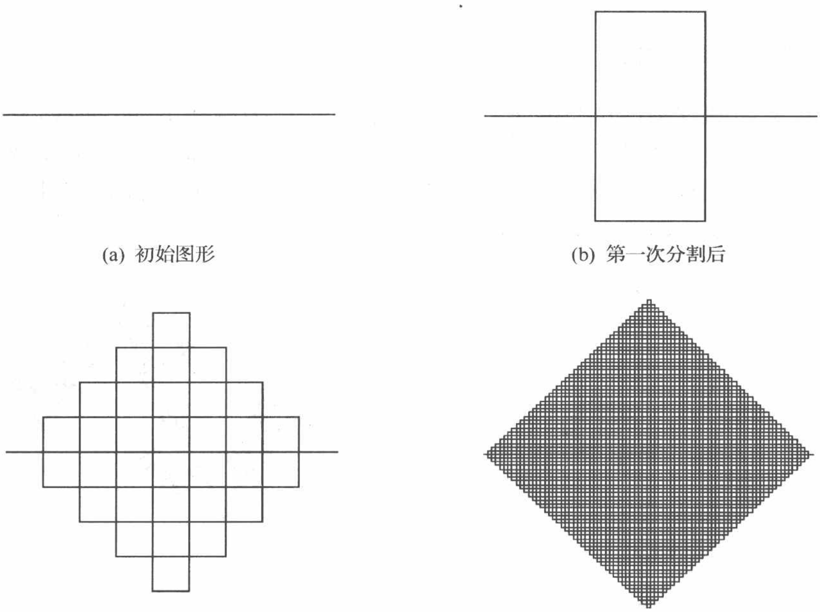
图 1-6　Minkowski 香肠的生成过程

两段改为一个向上而另一个向下的折线段，使其构成两个分别去掉顶边和底边的小正方形，便得到 M_1；再对 M_1 上所有的直线段重复以上操作便得到 M_2。如此递次替换，就构造出一串类似于香肠一样的曲线，故称为 Minkowski 香肠。图 1-6(b) 所示为经过 5 次迭代后得到的“香肠”。

1.1.7　皮亚诺曲线

意大利数学家皮亚诺(Guisepppe Peano，1858—1932)与德国数学家希尔伯特(David Hilbert，1862—1943)分别于 1890 年和 1891 年发现了能够填满平面的曲线。皮亚诺曲线(Peano curve)的构造：首先将一条单位长度的直线段三等分，然后在其中间部分构造一个“日”字形折线框，每条折线的长度都是 1/3。进一步对形成的 9 条子线段作分割和“日”字形折线框构造，便形成 81 条子折线，而每条折线的长度为 1/9。如此分割构造下去便得到了 Peano 曲线。图 1-7 所示为 Peano 曲线的生成过程。分割次数越多，得到的 Peano 曲线就越密。由于 Peano 曲线最终可以穿行一个平面上的每一点，因此它也被称做空间填充曲线。

此外，第 3 章详细介绍的 Hilbert 曲线与 Peano 曲线类型相同，但比较简单。因为它能够以不相交错的方式通过平面上每一个分割单元，这更加吸引了人们的眼光。



(a) 初始图形　　(b) 第一次分割后

(c) 第二次分割后　　(d) 第四次分割后

图 1-7　Peano 曲线的生成过程