循环矩阵及其在分子振动中的应用

毛纲源

华中理工大学出版社

循环矩阵及其在分子振动中的应用

毛纲源　编著

华中理工大学出版社

(鄂)新登字第 10 号

图书在版编目(CIP)数据
循环矩阵及其在分子振动理论中的应用/毛纲源
武汉:华中理工大学出版社,1995 年 11 月
ISBN 7－5609－1222－2
Ⅰ. 循…
Ⅱ. 毛…
Ⅲ. 代数方程式论—矩阵论
Ⅳ. O15·21

循环矩阵及其在分子振动中的应用

毛纲源 编著
责任编辑:李立鹏
*
华中理工大学出版社出版发行
(武昌喻家山 邮编 430074)
新华书店湖北发行所经销
中科院武汉数学物理研究所印刷厂印刷
*
开本:787×1092 1/32 印张:6.625 字数:146000
1995 年 11 月第 1 版 1995 年 11 月第 1 次印刷
印数:1—1500
ISBN 7—5609—1222—2/O·142
定价:6.50 元

编 者 的 话

循环矩阵是矩阵论的一个分支，它在固体物理、编码理论、数理统计、结构计算、分子振动等学科中均有广泛的应用.

近年来，在分子振动、经济计量及工程技术问题中经常遇到分块矩阵为循环矩阵的循环分块矩阵(Block Circulants with Circulant Blocks). 本书主要讨论这一类矩阵的性质及其在分子振动理论中的应用。为使读者便于理解和掌握，先介绍矩阵论，循环矩阵，循环分块矩阵(Block Circulants)及分块循环矩阵(Matrices with Circulant Blocks)的有关知识.

本书总结了近年来作者在循环矩阵(主要在分块矩阵为循环矩阵的循环分块矩阵)领域内所取得的成果，同时也介绍了国内外学者在这个领域所取得的有关成果.

本书缺点错误在所难免，诚恳希望读者批评指正.

毛纲源

1995 年 5 月于

武昌马房山

目 录

第一章　有关矩阵理论简介

为便于阅读，本章简单介绍本书用得较多的矩阵理论.

§1.1　矩阵直和及其主要性质

设 A 为 n 阶矩阵，A_i 是 n_i 阶矩阵，$i=1,2,\cdots,k$，且

$$n_1+n_2+\cdots+n_k=n,$$

分块对角阵 $A=\mathrm{diag}(A_1,A_2,\cdots,A_k)$ 称为 A_i 的直和，记为

$$A=A_1\oplus A_2\oplus+\cdots\oplus A_k=\bigoplus_{i=1}^{k}A_i. \tag{1.1.1}$$

易知，矩阵的直和是一类非零子块位于主对角线上，非主对角线上的子块全为零的分块对角矩阵.

矩阵直和的主要性质：

(1)　$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$，　(1.1.2)

(2)　$(A\oplus B)(C\oplus D)=(AC)\oplus(BD)$，　(1.1.3)

(3)　$(A+B)\oplus(C+D)=(A\oplus B)+(C\oplus D)$，　(1.1.4)

(4)　$(A\oplus B)^T=A^T\oplus B^T$（$T$ 表示转置），　(1.1.5)

(5)　$(A\oplus B)^*=A^*\oplus B^*$（$*$ 表示共轭转置），　(1.1.6)

(6)　$(A\oplus B)^k=A^k\oplus B^k$（$k$ 为正整数），　(1.1.7)

(7)　$(A\oplus B)^{-1}=A^{-1}\oplus B^{-1}$（假设逆矩阵都存在），(1.1.8)

(8)　$\det(A\oplus B)=(\det A)(\det B)$　(1.1.9)

（$\det A$ 表示矩阵 A 的行列式），

(9)　$\mathrm{tr}(A\oplus B)=\mathrm{tr}A+\mathrm{tr}B$，　(1.1.10)

(10) $f_{A\oplus B}(\lambda)=f_A(\lambda)\cdot f_B(\lambda)$ (1.1.11)

($f_A(\lambda)$表示 A 的特征多项式),

(11) 设 $\lambda(A)$表示 A 的特征根的集合,则

$$\lambda(A\oplus B)=\{\lambda(A),\lambda(B)\}. \tag{1.1.12}$$

§1.2 矩阵直积及其主要性质

(一) 矩阵直积

设 $A=(a_{ij})$和 B 分别为 $m\times n$, $p\times q$ 矩阵,由

$$A\otimes B=\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \tag{1.2.1}$$

所定义的 $mp\times nq$ 矩阵称为 A 与 B 的克罗内克尔(Kronecker)积,或称为 A 与 B 的直积,记为 $A\otimes B$.

应注意,$a_{ij}B$ 为 $p\times q$ 矩阵,因而 $A\otimes B$ 为 $mp\times nq$ 矩阵.

例 1.2.1 令 $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} h & r \\ k & s \\ l & t \end{pmatrix}$, 则 $A\otimes B$ 的行数为 A 与 B 的行数之乘积($2\times 3=6$),其列数为 A 与 B 的列数的乘积($3\times 2=6$),且

$$A\otimes B=\begin{pmatrix} aB & bB & cB \\ dB & eB & fB \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ah & ar & bh & br & ch & cr \\ ak & as & bk & bs & ck & cs \\ al & at & bl & bt & cl & ct \\ dh & dr & eh & er & fh & fr \\ dk & ds & ek & es & fk & fs \\ dl & dt & el & et & fl & ft \end{pmatrix},$$

由上例可看出矩阵直积与矩阵乘积是两个不同的概念，前者是对任意自然数组(m,n,p,q)定义的，因而任意两矩阵都存在其直积，而只有可相乘的两矩阵才有其乘积，显然只有当$m=n=p=q=1$，即只有两个一阶矩阵的直积才等于这两个矩陈的乘积.

一般，$A\otimes B$ 与 $B\otimes A$ 不相等，但相似（见下例）.

例 1.2.2 令 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$，则

$$A\otimes B=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix},$$

$$B\otimes A=\begin{pmatrix} b_{11}a_{11} & b_{11}a_{12} & b_{12}a_{11} & b_{12}a_{12} \\ b_{11}a_{21} & b_{11}a_{22} & b_{12}a_{21} & b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} & b_{21}a_{12} & b_{22}a_{11} & b_{22}a_{12} \\ b_{21}a_{21} & b_{21}a_{22} & b_{22}a_{21} & b_{22}a_{22} \end{pmatrix}.$$

令 $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，易验证有

$$P^{*}(A\otimes B)P=B\otimes A.$$

（二） 直积的主要性质

（1） 纯量倍数（k 为纯量）：

$$k(A\otimes B)=(kA)\otimes B=A\otimes(kB), \qquad (1.2.2)$$

（2） 分配律：$(A+B)\otimes C=(A\otimes C)+(B\otimes C)$， (1.2.3)

$A\otimes(B+C)=(A\otimes B)+(A\otimes C)$， (1.2.4)

（3） 结合律：$A\otimes(B\otimes C)=(A\otimes B)\otimes C$， (1.2.5)

（4） 求秩：秩$(A\otimes B)$=秩 A · 秩 B， (1.2.6)

(5) 求转置：$(A\otimes B)^T=A^T\otimes B^T$， (1.2.7)

(6) 求共轭：$(\overline{A\otimes B})=\overline{A}\otimes\overline{B}$， (1.2.8)

(7) 求转置共轭：$(A\otimes B)^*=A^*\otimes B^*$， (1.2.9)

(8) 求混和积：

$$(A\otimes B)(C\otimes D)=(AC)\otimes(BD). \tag{1.2.10}$$

下列性质中设 A,B 分别为 m,n 阶方阵.

(9) 求逆：若 A^{-1},B^{-1}存在，则$(A\otimes B)^{-1}$也存在，且

$$(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}, \tag{1.2.11}$$

(10) 求迹： $\mathrm{tr}(A\otimes B)=(\mathrm{tr}A)(\mathrm{tr}B)$， (1.2.12)

(11) 求行列式：$\det(A\otimes B)=(\det A)^n(\det B)^m$， (1.2.13)

(12) 相似性： $A\otimes B$ 与 $B\otimes A$ 相似，即存在 mn 阶置换矩阵(见 § 1.3)P，使

$$B\otimes A=P^*(A\otimes B)P(\text{参见例 1.2.2}) \tag{1.2.14}$$

(13) 令 $\Phi(x;y)=\sum_{j,k=0}^{p}a_{j,k}x^jy^k$($x,y$ 的多项式)，

$$\Phi(A;B)=\sum_{j,k=0}^{p}a_{j,k}A^j\otimes B^k(mn\times mn\text{ 矩阵}),$$

则 $\Phi(A;B)$的特征根为 $\Phi(\lambda_r;\mu_s)$，此处 λ_r 与 μ_s 分别为 A,B 的特征根($r=1,2,\cdots,m;s=1,2,\cdots,n$).

特别 $A\otimes B$ 的特征根为

$$\lambda_r\mu_s(r=1,2,\cdots,m;s=1,2,\cdots,n).$$

利用上述特征根的计算方法，不需将矩阵对角化就能求出分块矩阵为循环矩阵的循环分块矩阵的特征根，详见文[26].

(14)
$$\begin{aligned}A\otimes B&=(A\otimes E_n)(E_m\otimes B)\\&=(E_m\otimes B)(A\otimes E_n),\end{aligned} \tag{1.2.15}$$

其中 E_n,E_m 分别为 n,m 阶单位矩阵.

(15) $(E_m\otimes B)+(A\otimes E_n)$的特征根为

$$\lambda_r+\mu_s(r=1,2,\cdots,m;s=1,2,\cdots,n),$$

这里λ_r,μ_s分别为A,B的特征根.

矩阵$(E_m\otimes B)+(A\otimes E_n)$常称为$A$与$B$的克罗内克尔(Kronecker)和.

（三） 矩阵的直接积

设$B=(b_{ij})$,作者称$A\cdot\times B=(A\cdot b_{ij})$为矩阵$A$与$B$的直接积.

设$\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^T$,$\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^T$为列向量时,则称

$$\boldsymbol{u}\cdot\times\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}v_1\\ \boldsymbol{u}v_2\\ \cdots\\ \boldsymbol{u}v_n\end{pmatrix}\tag{1.2.16}$$

为向量$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{v}$的直接积,称

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}^T\cdot\times\boldsymbol{v}^T&=(\boldsymbol{u}^Tv_1,\boldsymbol{u}^Tv_2,\cdots,\boldsymbol{u}^Tv_n)\\&=(u_1v_1,u_2v_1,\cdots,u_nv_1,\cdots,u_1v_n,u_2v_n,\cdots,u_nv_n)\end{aligned}\tag{1.2.17}$$

为向量$\boldsymbol{u}^T$与$\boldsymbol{v}^T$的直接积.

§1.3 置换矩阵及其主要性质

设集合$N=\{1,2,\cdots,n\}$.集合N到自身的一一映射称为N上的置换,集合N上共有$n!$个不同的置换.设σ为N上任一个置换,令

$$\sigma(1)=i_1,\ \sigma(2)=i_2,\cdots,\ \sigma(k)=i_k,\cdots,\sigma(n)=i_n.$$

置换σ可记为
$$\sigma:\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k&\cdots&n\\ i_1&i_2&\cdots&i_k&\cdots&i_n\end{pmatrix}.\tag{1.3.1}$$

令e_j^T是在第j个分量上为1,其余分量全为0的单位行向量:

$$e_j^T=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)\quad(\text{第 } j \text{ 个分量为 } 1)$$

设 n 阶矩阵
$$P_\sigma=\begin{pmatrix} e_{i_1}^T \\ e_{i_2}^T \\ \cdots \\ e_{i_n}^T \end{pmatrix},\tag{1.3.2}$$

则称 P_σ 为与(1.3.1)式中置换 σ 相对应的 n 阶置换矩阵.

令 $P_\sigma=(a_{ij})_{n\times n}$，由(1.3.2)式得到

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & j=\sigma(i);\\ 0 & j\neq\sigma(i).\end{cases}\tag{1.3.3}$$

即 P_σ 的第 i 行中只有在第 $\sigma(i)$ 列处的元素等于 1，其他处元素都等于 0. 因 i 经 σ 作用后变为 $\sigma(i)$，这说明 P_σ 是由置换 σ 确定的. 事实上，如将(1.3.1)式中上行的正整数 i 看成矩阵 P_σ 的第 i 行，而下行中的正整数 $\sigma(i)$ 看成该行中的第 $\sigma(i)$ 列，由 σ 即可写出置换矩阵 P_σ.

σ 的逆置换用 σ^{-1}表示，于是 $\sigma^{-1}(i_t)=t(t=1,2,\cdots,n)$，故

$$\begin{aligned}
\sigma^{-1}&=\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_j & \cdots & i_n \\ 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & n\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(j) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & n\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(j) & \cdots & \sigma(n) \\ (\sigma^{-1}\sigma)(1) & (\sigma^{-1}\sigma)(2) & \cdots & (\sigma^{-1}\sigma)(j) & \cdots & (\sigma^{-1}\sigma)(n)\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} \sigma(1) & \cdots & \sigma(j) & \cdots & \sigma(n) \\ \sigma^{-1}[\sigma(1)] & \cdots & \sigma^{-1}[\sigma(j)] & \cdots & \sigma^{-1}[\sigma(n)]\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & n \\ \sigma^{-1}(1) & \sigma^{-1}(2) & \cdots & \sigma^{-1}(j) & \cdots & \sigma^{-1}(n)\end{pmatrix}.
\end{aligned}\tag{1.3.4}$$

(1.3.4)式是由(1.3.1)式上、下两行对调得到的. 因此，如将(1.3.4)式的上行正整数 j 看成第 j 列，下行正整数 $\sigma^{-1}(j)$ 看成该

列中的第 $\sigma^{-1}(j)$ 行，也可写出置换矩阵 P_σ. 事实上，若令

$$e_j=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^T（第\ j\ 行处元素为\ 1），$$

则

$$P_\sigma=(e_{\sigma^{-1}(1)},\quad e_{\sigma^{-1}(2)},\cdots,e_{\sigma^{-1}(j)},\cdots,e_{\sigma^{-1}(n)}) \tag{1.3.5}$$

的第 j 列中只有第 $\sigma^{-1}(j)$ 行处的元素等于 1，其他处等于 $0(j=1,2,\cdots,n)$.

设 $P_\sigma=(a_{ij})_{n\times n}$，由（1.3.5）式，不难得到：

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & i=\sigma^{-1}(j)\\ 0 & i\neq\sigma^{-1}(j)\end{cases} \tag{1.3.6}$$

于是由（1.3.4），（1.3.6）两式可知，P_σ 的每行每列中有且仅有一个元素等于 1 ，因而置换矩阵也可定义为每行及每列的元素中有且只有一个元素等于 1，其余元素等于 0 的方阵称为置换矩阵.

例如，已知 $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$，则

$$\sigma(1)=4,\quad \sigma(2)=1,\quad \sigma(3)=3,\quad \sigma(4)=2.$$

设 4 阶置换矩阵 $P_\sigma=(a_{ij})_{4\times 4}$，则由 σ 可知：

P_σ 的第 1 行元素中只有第 4 列处的元素等于 1，其他处等于 0，即

$$a_{1,\sigma(1)}=a_{1,4}=1,\quad a_{1j}=0\ (j\neq\sigma(1)=4),$$

P_σ 的第 2 行元素中只有第 1 列处的元素等于 1，其他处等于 0，即

$$a_{2,\sigma(2)}=a_{2,1}=1,\quad a_{2j}=0\ (j\neq\sigma(2)=1),$$

P_σ 的第 3 行元素中只有第 3 列处的元素等于 1，其他处等于 0，即

$$a_{3,\sigma(3)}=a_{3,3}=1,\quad a_{3j}=0\ (j\neq\sigma(3)=3),$$

P_σ 的第 4 行元素中只有第 2 列处的元素等于 1，其他处等于 0，

即

$$a_{4,\sigma(4)}=a_{4,2}=1,\quad a_{4,j}=0\ (j\neq\sigma(4)=2),$$

故

$$P_\sigma=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}. \qquad (1.3.7)$$

上面的 P_σ 也可利用逆置换 σ^{-1}求出. 事实上,由

$$\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$$

得到

$$\sigma^{-1}(1)=2,\ \sigma^{-1}(2)=4,\ \sigma^{-1}(3)=3,\ \sigma^{-1}(4)=1,$$

因而 $P_\sigma=(a_{ij})_{4\times4}$的各列元素为

第 1 列元素中只有第 2 行处的元素等于 1,其他处等于 0,即

$$a_{\sigma^{-1}(1),1}=a_{2,1}=1,\quad a_{i,1}=0\ (i\neq\sigma^{-1}(1)=2),$$

第 2 列元素中只有第 4 行处的元素等于 1,其他处等于 0,即

$$a_{\sigma^{-1}(2),2}=a_{4,2}=1,\quad a_{i,2}=0\ (i\neq\sigma^{-1}(2)=4),$$

第 3 列元素中只有第 3 行处的元素等于 1,其他处元素等于 0,即

$$a_{\sigma^{-1}(3),3}=a_{3,3}=1,\quad a_{i,3}=0\ (i\neq\sigma^{-1}(3)=3),$$

第 4 列元素中只有第 1 行处的元素等于 1,其他处元素等于 0,即

$$a_{\sigma^{-1}(4),4}=a_{1,4}=1,\quad a_{i,4}=0\ (i\neq\sigma^{-1}(4)=1).$$

所得结果与(1.3.7)式相同.

下面讨论 n 阶置换矩阵 P_σ的主要性质,其中 σ 为 N 上的任意置换.

性质 1 P_σ 左(右)乘矩阵 A 就是对 A 的行(列)作置换变换.

先讨论 P_σ 左乘 n 维列向量时，该向量如何变化？然后讨论 P_σ 左乘矩阵时，该矩阵如何变化？

设置换 σ 如(1.3.1)式所示，P_σ 如(1.3.3)式所示，则

$$P_\sigma\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e_{i_1}^T\\e_{i_2}^T\\\cdots\\e_{i_n}^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{i_1}\\x_{i_2}\\\cdots\\x_{i_n}\end{pmatrix}.$$

令 σ 为 N 上的任意置换：

$$\sigma:\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k&\cdots&n\\\sigma(1)&\sigma(2)&\cdots&\sigma(k)&\cdots&\sigma(n)\end{pmatrix},$$

则有

$$P_\sigma\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{\sigma(1)}\\x_{\sigma(2)}\\\cdots\\x_{\sigma(n)}\end{pmatrix}. \tag{1.3.8}$$

再讨论 P_σ 左乘矩阵 A 时，A 如何变化？

设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$，而 $\alpha_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})^T$，则

$$P_\sigma A=P_\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=(P_\sigma\alpha_1,P_\sigma\alpha_2,\cdots,P_\sigma\alpha_m).$$

由(1.3.8)式，$P_\sigma\alpha_j=(a_{\sigma(1),j},a_{\sigma(2),j},\cdots,a_{\sigma(m),j})^T(j=1,2,\cdots,n)$。因而

$$P_\sigma A=(a_{\sigma(i),j}), \tag{1.3.9}$$

即 $P_\sigma A$ 是 A 的元素之行下标被 σ 置换后所得的矩阵，所以 P_σ 左乘矩阵 A 就是对 A 的行作置换变换.

为熟悉置换矩阵 P_σ 作用的效果，下面讨论 P_σ 右乘矩阵 A 时，A 如何变化？

先讨论 P_σ 右乘行向量时，该行向量的变化.

设 σ,σ^{-1}如(1.3.1),(1.3.4)式所示,由(1.3.5)式得到

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)P_\sigma=(x_{\sigma^{-1}(1)},\ x_{\sigma^{-1}(2)},\cdots,x_{\sigma^{-1}(n)}).$$

设 $A=(a_{ij})$为 $m\times n$ 矩阵,且 $A=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \cdots\\ \beta_m\end{pmatrix}$,其中 $\beta_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$ $(i=1,2,\cdots,m)$为 A 的行向量,又设 σ 为 N 上的任意置换,则

$$\begin{aligned}\beta_iP_\sigma &= (a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\ P_\sigma\\ &= (a_{i,\sigma^{-1}(1)},a_{i,\sigma^{-1}(2)},\cdots,a_{i,\sigma^{-1}(n)})\\ &\qquad (i=1,2,\cdots,m),\end{aligned}$$

故 $$AP_\sigma=\begin{pmatrix}\beta_1P_\sigma\\ \beta_2P_\sigma\\ \cdots\\ \beta_mP_\sigma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{1,\sigma^{-1}(1)} & a_{1,\sigma^{-1}(2)} & \cdots & a_{1,\sigma^{-1}(n)}\\ a_{2,\sigma^{-1}(1)} & a_{2,\sigma^{-1}(2)} & \cdots & a_{2,\sigma^{-1}(n)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m,\sigma^{-1}(1)} & a_{m,\sigma^{-1}(2)} & \cdots & a_{m,\sigma^{-1}(n)}\end{pmatrix}$$
$$=(a_{i,\sigma^{-1}(j)}),\tag{1.3.10}$$

即 AP_σ 是 A 元素的列下标被 σ^{-1}置换后所得的矩阵,因而 P_σ 右乘矩阵 A 就是对 A 的列作置换变换.

性质 2 两个置换矩阵的乘积是一个置换矩阵.

设 σ,τ 为集合 $N=\{1,2,\cdots,n\}$上的任意两个置换,规定 σ,τ 的乘积 $\sigma\tau$ 的运算次序从左到右,又设 $P_\sigma,P_\tau,P_{\sigma\tau}$分别是 σ,τ 及 $\sigma\tau$ 相对应的置换矩阵,下证

$$P_\sigma P_\tau=P_{\sigma\tau}.\tag{1.3.11}$$

任取 n 阶可逆矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,由(1.3.10)式得到

$$\begin{aligned}AP_\sigma P_\tau=(AP_\sigma)P_\tau &=(a_{i,\sigma^{-1}(j)})P_\tau\\ &=(a_{i,\tau^{-1}[\sigma^{-1}(j)]})=(a_{i,(\sigma\tau)^{-1}(j)}),\end{aligned}$$

$$AP_{\sigma\tau}=(a_{i,(\sigma\tau)^{-1}(j)}),$$

故 $AP_\sigma P_\tau=AP_{\sigma\tau},A(P_\sigma P_\tau-P_{\sigma\tau})=0.$

由 A 的可逆性,即得 $P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\tau}$.

性质 3 $P_\sigma^* = P_\sigma^T$; (1.3.12)

$$P_\sigma^* = P_{\sigma^{-1}}. \tag{1.3.13}$$

显然 P_σ 为正交矩阵,故 $P_\sigma^* = P_\sigma^T$ 且 $P_\sigma^T = P_\sigma^{-1}$.

又 P_σ^T 的各列是 P_σ 的相应的各行,因而 P_σ^T 右乘可逆矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$,元素 a_{ij}的列下标应被 σ 所置换,故

$$AP_\sigma^T = (a_{i,\sigma(j)}).$$

另一方面,由(1.3.10)式得到

$$AP_{\sigma^{-1}} = (a_{i,(\sigma^{-1})^{-1}j}) = (a_{i,\sigma(j)}).$$

由上两式及 A 的可逆性得到 $P_\sigma^T = P_{\sigma^{-1}}$.

性质 4 设 $A = (a_{ij})$为 n 阶矩阵,则

$$P_\sigma A P_\sigma^* = (a_{\sigma(i),\sigma(j)}). \tag{1.3.14}$$

事实上,由(1.3.12)式得到

$$P_\sigma A P_\sigma^* = P_\sigma(AP_\sigma^T) = P_\sigma(a_{i,\sigma(j)}) = (a_{\sigma(i),\sigma(j)}).$$

或由(1.3.13)式得到

$$\begin{aligned} P_\sigma A P_\sigma^* &= (P_\sigma A)P_{\sigma^{-1}} = (a_{\sigma(i),j})P_{\sigma^{-1}} \\ &= (a_{\sigma(i),[(\sigma^{-1})^{-1}](j)}) = (a_{\sigma(i),\sigma(j)}). \end{aligned}$$

由(1.3.14)式可知,相似变换 $P_\sigma A P_\sigma^*$ 引起 A 的行和列的一系列置换变换.

性质 5 P_σ 为可逆矩阵,且

$$(P_\sigma)^{-1} = P_\sigma^* = P_{\sigma^{-1}}. \tag{1.3.15}$$

事实上,由(1.3.13)及(1.3.11)式得到

$$P_\sigma^* P_\sigma = P_{\sigma^{-1}} P_\sigma = P_{\sigma^{-1}\sigma} = P_I = E,$$

故 $(P_\sigma)^{-1} = P_\sigma^* = P_{\sigma^{-1}}$.

性质 6 $N = \{1, 2, \cdots, n\}$上的所有置换矩阵是 n 阶非奇异矩阵所构成的群的一个子群.

事实上,单位矩阵是一个置换矩阵,且对每个置换矩阵,其