经济管理数学基础

杨 荣 郑文瑞 王本玉 主编

概率论与数理统计

清华大学出版社

经济管理数学基础

杨　荣　郑文瑞　王本玉　主编

概率论与数理统计

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要内容包括：随机事件与概率、随机变量及其概率分布、多维随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、回归分析和方差分析.

与本书配套的有习题课教材、电子教案．该套教材汲取了现行教学改革中一些成功的经验，总结了作者在教学科研方面的研究成果，注重数学在经济管理领域中的应用，选用大量有关的例题与习题；具有结构严谨、逻辑清楚、循序渐进、结合实际等特点．可作为高等学校经管类、人文社科类及相关专业的教材或教学参考书.

图书在版编目（CIP）数据
概率论与数理统计/杨荣，郑文瑞，王本玉主编．—北京：清华大学出版社，2005.8
（经济管理数学基础）
ISBN 7-302-11375-0
I.概…　II.①杨…　②郑…　③王…　III.①概率论-高等学校-教材　②数理统计-高等学校-教材　IV.O21
中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第077651号

出 版 者：清华大学出版社　　地　　址：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　邮　　编：100084
社 总 机：010-62770175　　客户服务：010-62776969
组稿编辑：佟丽霞
文稿编辑：王海燕
印 刷 者：北京四季青印刷厂
装 订 者：三河市金元印装有限公司
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：170×230　印张：21　字数：433千字
版　　次：2005年8月第1版　2006年8月第3次印刷
书　　号：ISBN 7-302-11375-0/O・477
印　　数：7001～11000
定　　价：26.00元

《经济管理数学基础》系列教材编委会

总序

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的科学. 在过去的一个世纪中, 数学理论与应用得到了极大的发展, 使得数学所研究的两个重要内容, 即"数量关系"和"空间形式"具有了更丰富的内涵和更广泛的外延. 数学科学在发展其严谨的逻辑性的同时, 作为一门工具, 在几乎所有的学科中大展身手, 产生了前所未有的推动力.

在经济活动和社会活动中, 随时都会产生数量关系和相互作用. 数学应用的第一步就是对实际问题分析其对象内在的数量关系, 这种数量关系概括地表述为一种数学结构, 这种结构通常称为数学模型, 建立这种数学结构的过程称为数学建模. 数学模型按类型可以分为三类: 第一类为确定性模型, 即模型所反映的实际问题中的关系具有确定性, 对象之间的联系是必然的. 微积分、线性代数等是建模的基本数学工具. 第二类为随机性模型, 即模型所反映的实际问题具有偶然性或随机性. 概率论、数理统计和随机过程是建模的基本数学方法. 第三类为模糊性模型, 即模型所反映的实际问题中的关系呈现模糊性. 模糊数学理论是建模的基本数学手段.

高等学校经济管理类各专业本科生的公共数学基础课程一般包括微积分、线性代数与空间解析几何、概率论与数理统计等 3 门课程, 它们都是必修的重要基础理论课. 通过这些课程的学习, 学生可以掌握一元函数微积分及其应用、多元函数微积分及其应用、无穷级数、常微分方程与差分方程、向量代数与空间解析几何、线性代数、概率论与数理统计等方面的基本概念、基本理论、基本方法和运算技能, 为今后学习各类后继课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的连续量、离散量和随机量方面的数学基础. 在学习过程中, 通过数学知识与其经济应用的有机结合, 可以培养学生抽象思维和逻辑推理的理性思维能力、综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力以及较强的自主学习能力, 并逐步培养学生的探索精神和创新能力.

《经济管理数学基础》系列教材是吉林大学"十五"规划教材, 包括《微积分》(上、下)、《线性代数》、《概率论与数理统计》, 以及与其配套的习题课教材和电子教案, 其内容涵盖了教育部非数学专业数学教学指导委员会最新制定的"经济管理类本科数学基础教学基本要求". 该系列教材吸取了国内外同类教材的精华,特别是借鉴了近几年我国一批"面向 21 世纪课程"教材和国家"十五"

规划教材，同时也凝结了作者多年来在大学数学教学方面积累的经验. 编写中充分考虑了公共数学基础课程的系统性，注意到了时代的特点，同时也注意到与后续课程的衔接. 本着加强基础、强化应用、整体优化、注意后效的原则，力争做到科学性、系统性和可行性的统一，传授数学知识和培养数学素养的统一. 注重理论联系实际，通过实例展示数学方法在经济管理领域的成功应用. 把数学实验内容与习题课相结合，为学生展现科学发现的基本原理，突出数学应用和数学建模的思想方法. 借助电子和网络手段提供经济学、管理学的背景资源和应用资源，提高学生的数学人文素养，使数学思维延伸至一般思维.

在教材体系与内容编排上，认真考虑作为经济类、管理类和人文社科类各专业不同学时的授课对象的需求，对数学要求较高的专业可讲授教材的全部内容，其他专业可以根据实际需要选择适当的章节讲授. 每章后面配备了习题，其中 (A)题是体现教学基本要求的习题，(B)题是对基本内容提升、扩展以及综合运用性质的习题. 书末给出了习题参考答案，供读者参考.

在本系列教材的编写过程中，吉林大学教务处、吉林大学数学学院给予了大力支持，公共数学教学与研究中心副主任吴晓俐女士承担了本系列教材初稿的编务工作. 清华大学出版社的领导和编辑对本系列教材的编辑出版工作给予了精心的指导和大力支持. 在此一并致谢.

本系列教材体现了公共数学教学的一种改革模式，我们希望起到抛砖引玉的作用，恳请读者不吝赐教，以不断提高本系列教材的质量，促进教学改革的深入发展.

《经济管理数学基础》系列教材编委会

2005 年 8 月

前　言

本书是依据经济类、管理类、人文社科类各专业对概率论与数理统计课程的教学要求而编写的.

本书着眼于对工程实践与经济活动作定量分析与预测的实际需要，着重阐明了概率统计的基本理论与常用的统计方法. 概率论与数理统计的内容涉及到实变函数与测度论，但考虑到经济管理类数学课程的要求与特点，本书仅以普通的微积分和少量线性代数知识为基础，有些概念的引入和某些定理(如中心极限定理)的证明进行了简化处理. 在编写时，力求突出重点，对基本概念、重要公式和定理注重其实际意义的解释说明，力求通俗易懂. 书中大多数例题和习题都体现了经济管理的特色，让学生更多地见识应用数学知识和方法解决经济问题的实例，增强他们的应用意识，提高分析问题、解决问题的动手能力.

本书共分 10 章，内容包括随机事件与概率、随机变量及其概率分布、多维随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、回归分析和方差分析. 第 1～4 章由杨荣编写， 第 5～7 章由郑文瑞编写，第 8～10 章由王本玉编写，研究生王军林、朱复康、杨旭辉、陈明杰、高懿、徐忠海及姜政毅完成了本书的排版及制图的全部工作. 清华大学林元烈教授审阅了全书.

由于水平有限， 书中的错误和不妥之处， 恳请广大读者批评指正，以期不断完善.

作　者

2005 年 8 月

目录

目录 quite a few days. 概率

第 1 章　随机事件与概率 …… 1

1.1　随机事件 …… 1

1.1.1　随机现象 …… 1

1.1.2　随机试验与随机事件 …… 1

1.1.3　随机事件的关系和运算 …… 3

1.2　随机事件的频率与概率 …… 7

1.2.1　频率 …… 7

1.2.2　概率 …… 8

1.2.3　古典概型 …… 11

1.2.4　几何概型 …… 16

1.3　条件概率 …… 18

1.3.1　条件概率与乘法公式 …… 18

1.3.2　全概率公式 …… 22

1.3.3　贝叶斯公式 …… 23

1.4　事件的独立性 …… 25

1.5　伯努利概型 …… 29

习题 1 …… 31

第 2 章　随机变量及其概率分布 …… 35

2.1　随机变量及其分布函数 …… 35

2.1.1　随机变量 …… 35

2.1.2　随机变量的分布函数 …… 36

2.2　离散型随机变量及其概率分布 …… 39

2.2.1　离散型随机变量及其概率分布 …… 39

2.2.2　几种常用的离散型随机变量及其分布 …… 41

2.3　连续型随机变量及其概率密度 …… 48

2.3.1　连续型随机变量及其概率密度 …… 48

2.3.2　均匀分布和指数分布 …… 52

2.4　正态分布 …… 54

2.4.1　正态分布 …… 54

2.4.2　标准正态分布 …… 55

2.4.3 标准正态分布的上 α 分位点 …… 59
2.5 随机变量的函数的分布 …… 59
2.5.1 离散型随机变量的函数的分布 …… 59
2.5.2 连续型随机变量的函数的分布 …… 61
习题 2 …… 64
第 3 章 多维随机变量及其概率分布 …… 69
3.1 二维随机变量 …… 69
3.1.1 二维随机变量及其分布函数 …… 69
3.1.2 二维离散型随机变量及其概率分布 …… 70
3.1.3 二维连续型随机变量及其概率密度 …… 73
3.1.4 均匀分布和正态分布 …… 77
3.2 边缘分布及随机变量的独立性 …… 79
3.2.1 边缘分布 …… 79
3.2.2 随机变量的独立性 …… 83
3.3 条件分布 …… 87
3.3.1 离散型随机变量的条件分布 …… 87
3.3.2 连续型随机变量的条件分布 …… 88
3.4 两个随机变量的函数的概率分布 …… 91
3.4.1 二维离散型随机变量的函数的分布 …… 91
3.4.2 二维连续型随机变量的函数的分布 …… 93
3.5 n 维随机变量 …… 101
习题 3 …… 104
第 4 章 随机变量的数字特征 …… 109
4.1 数学期望 …… 109
4.1.1 数学期望的概念 …… 109
4.1.2 随机变量函数的数学期望 …… 113
4.1.3 数学期望的性质 …… 116
4.2 方差 …… 119
4.2.1 方差及其计算公式 …… 119
4.2.2 方差的性质 …… 124
4.2.3 随机变量的标准化 …… 125
4.3 协方差与相关系数 …… 125
4.3.1 协方差 …… 126
4.3.2 相关系数 …… 127

4.4 矩 …… 131
4.4.1 原点矩和中心矩 …… 131
4.4.2 协方差矩阵 …… 132
4.4.3 n 维正态分布 …… 133
习题 4 …… 135
第 5 章　大数定律及中心极限定理 …… 140
5.1 大数定律 …… 140
5.1.1 切比雪夫不等式 …… 140
5.1.2 依概率收敛 …… 141
5.1.3 大数定律 …… 142
5.2 中心极限定理 …… 144
5.2.1 依分布收敛 …… 144
5.2.2 中心极限定理 …… 145
习题 5 …… 150
第 6 章　数理统计的基本知识 …… 152
6.1 总体与样本 …… 152
6.1.1 总体 …… 152
6.1.2 样本 …… 153
6.2 直方图与样本分布函数 …… 154
6.2.1 直方图 …… 154
6.2.2 样本分布函数 …… 157
6.3 统计量及其分布 …… 159
6.4 常用统计量的分布 …… 165
6.4.1 χ^2分布 …… 165
6.4.2 t 分布 …… 168
6.4.3 F 分布 …… 170
习题 6 …… 172
第 7 章　参数估计 …… 176
7.1 参数的点估计 …… 176
7.1.1 矩估计法 …… 176
7.1.2 最大似然估计法 …… 179
7.2 估计量的评选标准 …… 186
7.2.1 无偏性 …… 186
7.2.2 有效性 …… 190
7.2.3 一致性 …… 190

7.3 参数的区间估计 …… 192
7.4 正态总体均值与方差的区间估计 …… 193
7.4.1 单个正态总体均值与方差的区间估计 …… 193
7.4.2 两个正态总体均值差与方差比的区间估计 …… 197
7.4.3 单侧置信区间 …… 202
习题 7 …… 204
第 8 章 假设检验 …… 208
8.1 假设检验的基本概念 …… 208
8.2 单个正态总体的参数假设检验 …… 211
8.2.1 单个正态总体均值的假设检验 …… 211
8.2.2 单个正态总体方差的假设检验 …… 214
8.3 两个正态总体的参数假设检验 …… 218
8.3.1 两个正态总体均值差的假设检验 …… 218
8.3.2 两个正态总体方差比的假设检验 …… 220
8.4 非参数假设检验 …… 223
习题 8 …… 230
***第 9 章 回归分析** …… 234
9.1 一元线性回归分析 …… 234
9.1.1 回归分析的基本概念 …… 234
9.1.2 常数 a,b 的最小二乘估计 …… 235
9.1.3 回归系数的显著性检验和置信区间 …… 242
9.1.4 预测与控制 …… 247
9.2 可线性化的非线性回归方程 …… 251
9.3 多元线性回归分析 …… 256
习题 9 …… 261
***第 10 章 方差分析** …… 264
10.1 单因素试验的方差分析 …… 264
10.2 双因素试验的方差分析 …… 270
10.2.1 无交互作用的双因素试验的方差分析 …… 271
10.2.2 有交互作用的双因素试验的方差分析 …… 275
习题 10 …… 282
习题参考答案 …… 284
附表 …… 300

第 1 章　随机事件与概率

概率论是研究随机现象的数量规律的学科, 是统计学的理论基础. 事件和概率是概率论中最基本的两个概念. 本章重点介绍概率论的两个最基本概念：随机事件及其概率. 主要内容包括：随机试验、样本空间、随机事件的频率与概率、条件概率以及事件的独立性等概率论中的最基本概念. 介绍古典概型和几何概型、条件概率、乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式及二项概率公式等计算概率的基本公式. 这些内容是进一步学习概率论的基础.

1.1　随 机 事 件

1.1.1　随机现象

在自然界和人类社会生活中普遍存在着两类现象, 一类是在一定条件下必然发生的现象, 称为**确定性现象**. 例如, 在没有外力作用下, 作匀速直线运动的物体必然继续作匀速直线运动; 人从地面向上抛起的石块经过一段时间必然落到地面; 在标准大气压下, 水加热到 100℃ 必然会沸腾; 等等.

另一类现象是在一定条件下可能发生也可能不发生的现象, 称为**随机现象**. 例如, 投掷一枚硬币, 我们不能事先预知将出现正面还是反面; 投掷一枚骰子出现的点数也不能预知; 从一大批产品中任取一个产品, 这个产品可能是正品, 也可能是废品, 其结果带有偶然性. 但人们通过长期实践并深入研究之后, 发现这类现象在大量重复试验或观察下, 它的结果却呈现出某种规律性. 概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象这种规律性的一门数学学科. 其理论和方法被广泛地应用于自然科学、社会科学、工程技术和经济管理等诸多领域.

1.1.2　随机试验与随机事件

为了研究和揭示随机现象的统计规律性, 我们要对随机现象进行大量重复观察. 我们把观察的过程称为试验, 满足下列条件的试验称为**随机试验**, 本书以下简称为**试验**. 一般地, 一个随机试验要求满足下列条件：

(1) 可重复性：试验可以在相同条件下重复进行多次, 甚至进行无限多次;

(2) 可观测性：每次试验的结果具有多种可能性, 并能事先明确试验的所有可能结果;

(3) 随机性：试验之前不能准确预言该次试验将出现哪一种结果.

我们用 E 表示一个试验, 用 ω 表示随机试验 E 的最基本的结果, 称为**样本点**, 用 $\Omega=\{\omega\}$ 表示随机试验 E 的最基本结果的集合, 称为**样本空间或基本空间**.

例 1.1.1 在投掷一枚硬币观察其出现正面还是出现反面的试验中, 有两个样本点: 正面、反面. 样本空间为 $\Omega=\{正面, 反面\}$. 记 $\omega_1=$"正面", $\omega_2=$"反面", 则样本空间可表示为

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}.$$

例 1.1.2 投掷一枚骰子, 观察出现的点数, 则基本结果是"出现 i 点", 分别记为 $\omega_i(i=1,2,3,4,5,6)$, 则试验的样本空间为

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}.$$

例 1.1.3 将一枚硬币抛掷两次, 观察正面出现的次数, 记为 $\omega_i(i=0,1,2)$, 则样本空间为

$$\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2\}.$$

也可简记为 $\Omega=\{0,1,2\}$.

例 1.1.4 记录某电话台在一分钟内接到的呼叫次数, 则样本空间为

$$\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$$

例 1.1.5 测量某一零件的长度, 考察其观测结果与真正长度的误差, 样本空间可取作 $[-M,M]$, 其中 M 为最大误差. 如果无法确定这一最大值, 将 Ω 取作 $(-\infty,+\infty)$ 也可

对于随机现象, 我们关心的通常是在随机试验中某一结果是否会出现, 或会出现什么结果, 这些结果称为**随机事件**. 习惯上, 用大写字母 A,B,C 等表示.

例如在例 1.1.2 中, 样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, 如果以 A 表示"得到的为偶数点", 则显然 $A=\{2,4,6\}$, B 表示"得到的点数大于等于 3", 则 $B=\{3,4,5,6\}$. 这里 A,B 均为随机事件, 它们都由 Ω 中的若干个样本点所构成.

由此可见, 准确地讲, **随机事件**是由若干个样本点组成的集合, 或者说是样本空间的某个子集. 称某个事件 A 发生, 当且仅当该事件所包含的某个样本点出现.

由一个样本点组成的事件, 称为**基本事件**. 样本空间 Ω 本身也是 Ω 的子集, 它包含 Ω 的所有样本点, 在每次试验中 Ω 必然发生, 称为**必然事件**. 空集 $\varnothing$ 也是 Ω 的子集, 它不包含任何样本点, 在每次试验中都不可能发生, 称为**不可能事件**.

例 1.1.6 在抛掷一枚骰子的实验中, 分别记"点数是 1"为 A, "点数是偶数"为 B, "点数大于等于 2"为 C, "点数大于 6"为 D, "点数小于等于 6"为 F, 则 $A=\{1\},B=\{2,4,6\},C=\{2,3,4,5,6\},D=\varnothing,F=\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

在一个样本空间中, 如果只有有限个样本点, 则称它为**有限样本空间**; 如果有无限多个样本点, 则称它为**无限样本空间**. 例 1.1.1 ~ 例 1.1.3 中的样本空间都是有限样本空间, 在例 1.1.4 和例 1.1.5 中的样本空间都是无限样本空间.

1.1.3 随机事件的关系和运算

在一个随机试验中, 一般有很多随机事件. 为了通过对简单事件的研究来掌握比较复杂的事件的规律, 需要研究事件的关系及事件的运算. 由于事件是样本空间的子集, 因此事件的关系及运算与集合的关系及运算是相互对应的. 关键是要理解事件的关系及运算的概率含义.

在以下的讨论中, 假定 Ω 是试验 E 的样本空间, 所论及的事件都是同一试验 E 的事件.

1. 事件的包含

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生, 则称事件 B**包含**事件 A, 或称事件 A**包含于**事件 B, 或称事件 A 是事件 B 的子事件, 记作

$$B \supset A \quad 或 \quad A \subset B.$$

易知, 对任意事件 A, 有

$$\varnothing \subset A \subset \Omega.$$

2. 事件的相等

如果事件 A 包含事件 B, 事件 B 也包含事件 A, 则称事件 A 与事件 B**相等**, 记作 $A = B$. 事件 A 与事件 B 相等, 表明 A 和 B 是样本空间的同一子集.

3. 事件的并 (或和)

如果事件 A 和事件 B 至少有一个发生, 则称这样的一个事件为事件 A 与事件 B 的**并**或**和**, 记作 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{A\,发生或B\,发生\} = \{\omega | \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}.$$

在例 1.1.6 中, $A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$.

事件 A 和事件 B 作为样本空间 Ω 的子集, 事件 $A \cup B$ 就是子集 A 与 B 的**并集**.

4. 事件的交 (或积)

如果事件 A 和事件 B 同时发生, 则称这样的一个事件为事件 A 与事件 B 的**交**或**积**, 记作 $A \cap B$ 或 AB, 即

$$A \cap B = \{A\,发生且\,B发生\} = \{\omega | \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}.$$

在例 1.1.6 中, $B \cap C = \{4, 6\}$.

事件 A 和事件 B 作为样本空间 Ω 的子集, 事件 $A\cap B$ 就是子集 A 与 B 的**交集**.

5. 事件的差

如果事件 A 发生而事件 B 不发生, 则这样的一个事件称为事件 A 与 B 的**差**事件, 记作 $A-B$, 即

$$A-B=\{A\text{发生但}B\text{不发生}\}=\{\omega|\omega\in A\text{但}\ \omega\notin B\}.$$

在例 1.1.6 中, $C-B=\{3,5\}$.

6. 互不相容事件

如果事件 A 和事件 B 在同一次试验中不能同时发生, 则称事件 A 与事件 B 是**互不相容**的, 或称事件 A 与事件 B**互斥**.

在例 1.1.6 中, 事件 A 和事件 B 是互不相容的.

7. 对立事件 (或互逆事件)

如果在每一次试验中事件 A 和事件 B 都有一个且仅有一个发生, 则称事件 A 与事件 B 是**对立**的或**互逆**的, 其中的一个事件是另一个事件的对立事件, 记作 $\overline{A}=B$, 或 $\overline{B}=A$. 显然 $\overline{\overline{A}}=A$.

在例 1.1.6 中, 事件 A 与事件 C 是对立的.

8. 有限个或可数无穷多个事件的并与交

设有 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$, 则称"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生"这一事件为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的**并**, 记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$. 称"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生"这一事件为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的**交**, 记作 $A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

设有可数个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$, 则称"$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 至少有一个发生"这一事件为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的**并**, 记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$. 称"$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生"这一事件为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的**交**, 记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

9. 完备事件组

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是有限个或可数无穷多个事件, 如果满足:

(1) $A_iA_j=\varnothing, i\neq j, i,j=1,2,\cdots$;

(2) $\bigcup\limits_{i}A_i=\Omega$.

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是一个**完备事件组**或**分割**.

10. 事件的关系与运算的文氏图

上述关于事件的各种关系与运算可直观地用图形 (文氏图) 来表示 (见图 1.1). 类似集合的运算, 事件的运算有以下运算法则:

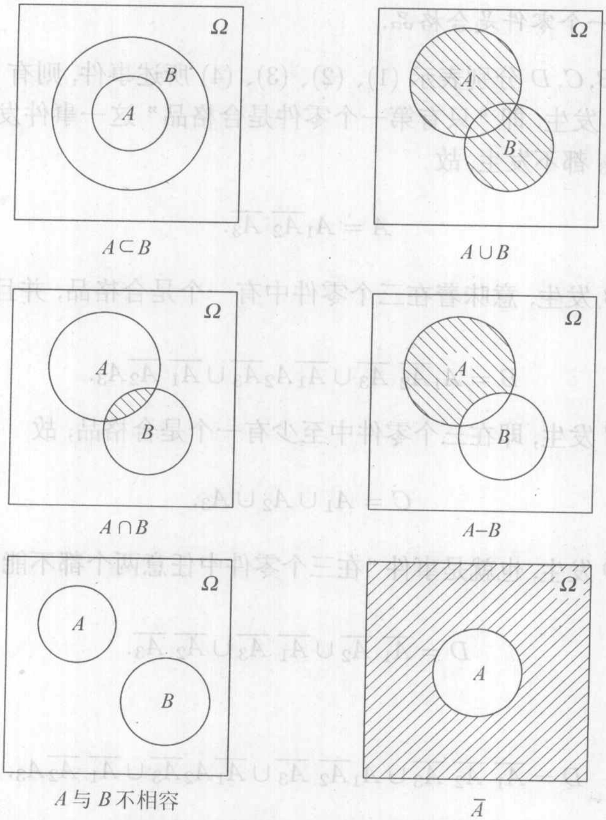

图 1.1 事件的关系与运算的文氏图

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (AB)C=A(BC)$;

(3) 分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(4) 德摩根 (De Morgan) 定律 (对偶律)：

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}.$$

对于多个随机事件，以上的运算法则也是成立的.

例 1.1.7 某工人加工了三个零件，设 A_i 为事件“加工的第 i 个零件是合格品”$(i=1,2,3)$，试用 A_1,A_2,A_3 表示下列事件：

(1) 只有第一个零件是合格品;

(2) 只有一个零件是合格品;

(3) 至少有一个零件是合格品; $\overline{\bigcup A_i}$ $\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}$

(4) 最多有一个零件是合格品.

解 用 A,B,C,D 分别表示 (1)、(2)、(3)、(4) 所述事件, 则有

(1) 事件 A 发生, 即“只有第一个零件是合格品”这一事件发生, 即事件 A_1 发生并且 A_2,A_3 都不发生, 故

$$A = A_1\overline{A_2}\ \overline{A_3}.$$

(2) 事件 B 发生, 意味着在三个零件中有一个是合格品, 并且另外两个是不合格品, 因此

$$B = A_1\overline{A_2}\ \overline{A_3} \cup \overline{A_1}A_2\overline{A_3} \cup \overline{A_1}\ \overline{A_2}A_3.$$

(3) 事件 C 发生, 即在三个零件中至少有一个是合格品, 故

$$C = A_1 \cup A_2 \cup A_3.$$

(4) 事件 D 发生, 也就是事件“在三个零件中任意两个都不能同时为合格品”发生, 从而

$$D = \overline{A_1}\ \overline{A_2} \cup \overline{A_1}\ \overline{A_3} \cup \overline{A_2}\ \overline{A_3}.$$

也可以表示成

$$D = \overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3} \cup A_1\overline{A_2}\ \overline{A_3} \cup \overline{A_1}A_2\overline{A_3} \cup \overline{A_1}\ \overline{A_2}A_3.$$

例 1.1.8 一名射手连续向某个目标射击三次, 事件 A_i 表示该射手第 i 次射击时击中目标 $(i=1,2,3)$. 试用文字叙事下列事件:

$$A_1\cup A_2;\quad A_1\cup A_2\cup A_3;\quad A_1A_2A_3;\quad A_3-A_2;\quad A_3\overline{A_2};\quad \overline{A_1\cup A_2};$$ $A_1 \cdot A_2$

$$\overline{A_1}\ \overline{A_2};\quad \overline{A_2}\cup\overline{A_3};\quad \overline{A_2A_3};\quad A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3.$$

解 $A_1\cup A_2$: 前两次中至少有一次击中目标;

$A_1\cup A_2\cup A_3$: 三次射击中至少有一次击中目标;

$A_1A_2A_3$: 三次射击都击中了目标;

$A_3-A_2 = A_3\overline{A_2}$: 第三次击中但第二次未击中;

$\overline{A_1\cup A_2} = \overline{A_1}\ \overline{A_2}$: 前两次均未击中目标;

$\overline{A_2}\cup\overline{A_3} = \overline{A_2A_3}$: 后两次中至少有一次未击中目标;

$A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3$: 三次射击中至少有两次击中目标.

$A_3 - A_2 = A_3\overline{A_2}$ $\cup \overline{A_i} = \cap$