

飞行自动控制系统

(上册)

肖顺达 编



国防工业出版社

飞行自动控制系统

(上册)

肖顺达 编



30272355



国防工业出版社

• 402320

内 容 简 介

本书分上下两册。上册研究了飞机静态特性，以动特性为主。讲述了六自由度运动方程，深入分析了纵向运动、侧向运动和几种近似运动，并进行了分析对比。包含有具体算例及模拟结果，并留有习题。附录中列出了六种飞机的运动方程系数。本书可作为飞行控制专业教材，也可供有关专业学生及工程技术人员参考。

飞行自动控制系统

(上 册)

肖 顺 达 编

*

国防工业出版社 出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092¹/₁₆ 印张8¹/₄ 190千字

1980年12月第一版 1980年12月第一次印刷 印数：0,001—1,800册

统一书号：15034·2126 定价：0.89元

前 言

本书上册共分四章。以第二、三章为重点。

第一章讲述了地面坐标系及机体坐标系。研究了当飞机作为控制对象时它的运动参数及被控量、它的操纵机构。推导了飞机的六自由度原始微分方程。这些内容只是对飞行力学有关知识的概要重复。

第二章中用速度坐标系推导了纵向运动原始微分方程式。讲述了方程式的线性化,对线性化纵向运动方程进行了静动态分析。从根的分布、过渡过程及对数频率特性三方面进行分析,说明纵向运动包含短周期运动及长周期运动这两个分量,论证把纵向运动分解为两种近似运动的可能性与必要性。同样通过上述三方面的对比分析指出近似运动的适用范围。还概略地讲述了有干扰问题、飞行品质规范及调整片作用下舵面的动态特性。

第三章中用机体坐标系建立侧向运动原始微分方程。除坐标系与纵向运动研究时有所不同外。分析的方法与涉及的内容与第二章是相似的。

在第二、三两章中,所有分析都是从具体飞机的数据出发进行数学分析并列出了模拟计算结果。第一、二、三章后面都留有习题。

第二章 § 9*、第三章 § 5*、§ 7*带“*”号表示非重点内容。

第四章中除列出完整的六自由度原始微分方程外,还推导了线性化的六自由度运动方程。

附录 I 提供了六种飞机的运动方程系数。

附录 II 对侧向运动方程式中 I_{xy} 及 $\theta_0 \omega_y$ 项的影响进行了分析。

附录 III 叙述了英、美坐标系以及几种坐标系的转换公式。

在编写本书的过程中得到教研室飞行自动控制系统组同志的不少帮助,还承郭锁凤同志详细审查,提出不少宝贵意见,在此谨致谢意。

由于水平所限,书中可能会有不少错误和不恰当之处,欢迎读者批评指正。

编 者

目 录

第一章 对象飞机及其六自由度运动方程	1
§ 1 坐标系、飞机运动参数及操纵机构 (调整机构)	1
§ 2 飞机的六自由度运动方程式	4
第二章 纵向运动	16
§ 1 原始微分方程式的建立	16
§ 2 纵向运动方程式的线性化	19
§ 3 纵向运动方程的状态空间表达式	25
§ 4 全面纵向运动的分析	29
§ 5 短周期运动的分析	42
§ 6 长周期运动的近似方程式及其分析	50
§ 7 高度变化对纵向运动的影响	54
§ 8 关于纵向运动干扰的考虑	55
§ 9* 通过调整片操纵飞机纵向运动时飞机纵向运动方程的变化	60
第三章 侧向运动	65
§ 1 原始微分方程式的建立	65
§ 2 侧向运动线性化方程式及其状态空间表达式	70
§ 3 全面侧向运动的分析	76
§ 4 侧向运动的两种近似运动的分析——快速倾斜运动、平面航向运动	86
§ 5* 其它近似方程的简单介绍	95
§ 6 侧向运动中的干扰	97
§ 7* 利用调整片来操纵飞机的侧向运动时应补充的舵面运动方程	100
第四章 六自由度运动方程式的进一步说明	104
§ 1 完整的六自由度原始微分方程式	104
§ 2 线性化的六自由度运动方程式、状态空间表达式及其传递函数	106
附录	111
附录 I 几种典型飞机的运动方程参数表	111
附录 II I_{xy} 及 $d\gamma/dt = \omega_x - \delta_0 \omega_y$ 中 $\delta_0 \omega_y$ 项的影响	120
附录 III 英美常用的坐标系、符号及导数的转换公式	121
附录 IV 除升降舵、方向舵、副翼及相应调整片以外的其它气动操纵面	128
参考文献	128

第一章 对象飞机及其六自由度运动方程

§1 坐标系、飞机运动参数及操纵机构(调整机构)

飞机飞行自动控制系统是控制飞机在空间运动的自动装置。为了研究自动装置,必须对飞机在空间是如何运动的有所了解。我们知道,在略去飞机弹性振动和变形的条件下,飞机的运动可看成包含六个自由度的刚体运动,就是说包含绕三个轴的三种转动(滚动、俯仰与偏航)和沿三轴的三种线运动(前进、上下与左右)。为了确切地描述飞机的运动状态,我们必须选定适当的坐标系。比如要想确定飞机的位置,必须应用固定于地面的地面坐标系。要想较简单地描述飞机的转动与移动,必须采用机体坐标系或气流坐标系(速度坐标系)。此外,还有采用航迹坐标系及半机体坐标系的。英、美又多采用稳定坐标系⁽²⁾。本章只概略地介绍地面坐标系、机体坐标系与速度坐标系。

一、坐标系简单介绍

1. 地面坐标系 $AX_dY_dZ_d$

这个坐标系与地球固连。原点 A 在地面或海平面上某定点。铅垂轴 AY_d 向上为正。纵轴 AX_d 与横轴 AZ_d 为水平面内互相垂直的两轴。如果取纵轴 AX_d 为应飞航线,那末坐标 $AX_d = L$ 表示航程,而 $Z = AZ_d$ 表示侧向偏离,向右为正。 $AY_d = H$ 表示飞行高度(见图 1-1)。

2. 机体坐标系 $OX_rY_rZ_r$

与飞机固连。原点 O 在飞机重心上。纵轴 OX_r 在飞机对称平面内,平行于翼弦。指向机头为正。立轴 OY_r 也在飞机对称平面内并垂直于 OX_r , 指向坐舱盖为正。横轴 OZ_r 与 OX_rY_r 平面垂直,指向右翼为正(见图 1-2)。

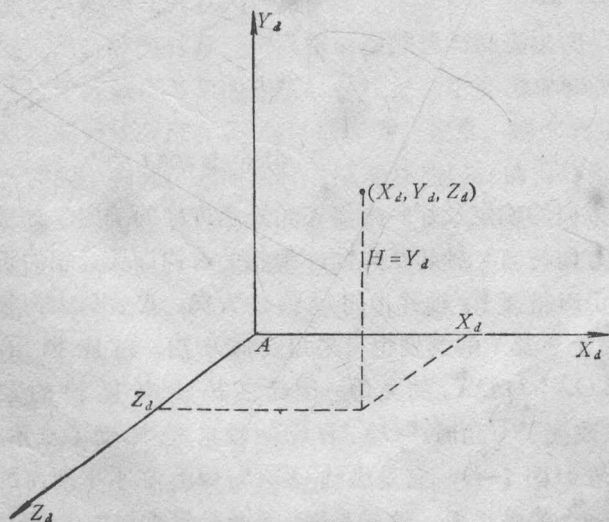


图1-1 地面坐标系

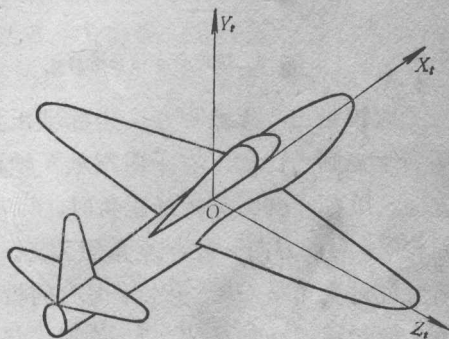


图1-2 机体坐标系

3. 气流坐标系 (速度坐标系) $OX_qY_qZ_q$

原点也在飞机重心上。但是 OX_q 轴与飞机速度向量 $\vec{v}$ 重合。 OY_q 也在飞机对称平面内并垂直于 OX_q ，指向坐舱盖为正。 OZ_q 垂直于 OX_qY_q 平面，指向右翼为正 (见图1-3)。

上面对三种坐标系作出了定义，就可以进一步明确飞机在空中的飞行姿态与飞行方向。为了描述飞机的姿态与飞行方向，需要研究飞机运动参数。

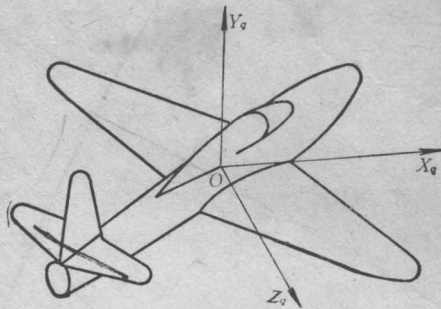


图1-3 气流坐标系

二、飞机运动参数

1. 姿态角

姿态角主要描述机体轴系与地面轴系的差异。包括偏航角 ψ 、俯仰角 ϑ 及倾斜角 γ 。

a. 偏航角 ψ ——飞机纵轴 OX_t 在水平面内的投影 CX'_t 与应飞航向 (图1-4中选为 AX_d) 的夹角， CX'_t 在左边为正。

b. 俯仰角 ϑ ——飞机纵轴 OX_t 与水平面的夹角。 OX_t 在水平面上方时为正 (见图1-4)。

c. 滚转角 γ (又叫倾斜角)——飞机立轴 OY_t 与铅垂平面的夹角 γ 。右翼向下时为正 (见图1-5)。

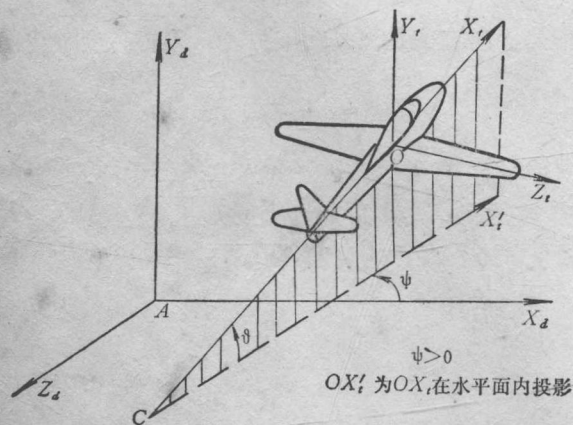


图1-4 俯仰角 ϑ 与偏航角 ψ

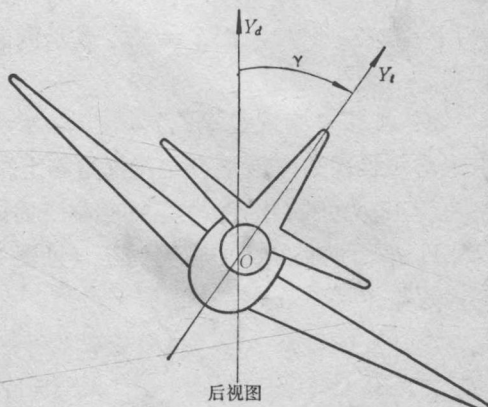


图1-5 倾斜角 γ

应该指出，无论那一个坐标轴正负方向的确定及那一个姿态角正负方向的确定，都遵循右手定则。比如，右手四指从 X 轴正方向转向 Y 轴的正方向，拇指的方向即为 Z 轴的正方向。又如在判断 ψ 角的正负时，以右手四指握 Y_d 轴并指向 OX_d 的方向，竖直的大拇指如与 Y_d 的正方向一致， ψ 角便为正。对于 ϑ 及 γ 的判别也可采用类似方法。还应指出：前面说过 ψ 角是 OX_t 在水平面内的投影 OX'_t 与 OX_d 的夹角，因此它是绕竖直轴的转角。换句话说，如果 $\gamma = \vartheta = 0$ 时，飞机改变了 ψ 角时， OX_t 与 OZ_t 轴只是转动了 ψ 角，这两轴仍然保持在水平面内。再看俯仰角 ϑ (图1-4)，它是纵轴 OX_t 与 OX_t 在水平面内的投影 CX'_t 的夹角。显然 $CX_tX'_t$ 平面是一个铅垂平面。这就是说， ϑ 角是铅垂平面内的一

个夹角。因此 ϑ 角是飞机绕某水平轴转动而形成的。至于 γ 角，由于它是 OY_t 与铅垂平面的夹角，因此 γ 角是飞机绕纵轴转动的角度。当 ϑ 不为 0 时， γ 角所在的平面与 Y_dAZ_d 平面相差一个 ϑ 角。

2. 飞行速度向量相对于机体及地面坐标系的关系

a. 迎角 α (也叫攻角)——飞机飞行速度 $\vec{V}$ 在飞机对称平面内的投影 OX_b (见图 1-6) 与飞机纵轴的夹角。纵轴在上为正。

b. 侧滑角 β ——飞机飞行速度 V 与飞机对称平面的夹角。由于这一夹角是在通过 V 与对称平面垂直的平面内测量的，因而也就是 OX_b 与 OX_a 的夹角 (见图 1-6)。侧滑角 β 以飞机“纵轴” OX_t 在空速向量 $\vec{V}$ 的左边时定为正。

c. 航迹倾斜角 θ ——速度 V 与水平面 (AX_dZ_d) 的夹角， V 向上倾斜时为正 (见图 1-7)。

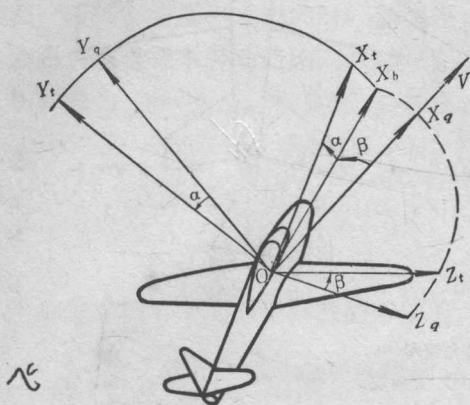


图1-6 $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 时的坐标关系

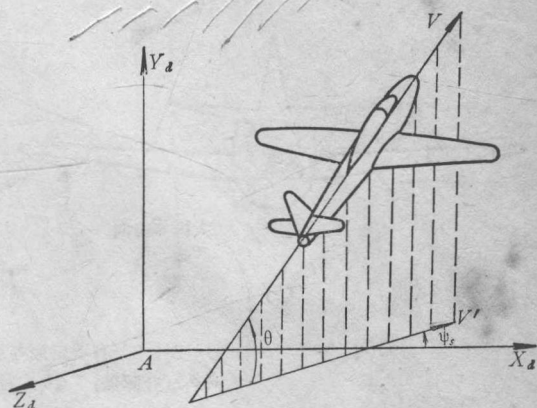


图1-7 航迹倾斜角 θ 和航迹偏转角 ψ

d. 航迹偏转角 ψ ——速度 V 在水平面内的投影 (见图 1-7 之 V') 与 AX_d 的夹角， V' 在 X_d 左边定为正。显然，当 $\beta = 0$ 时，航迹偏转角与偏航角相等，就是 $\psi_r = \psi$ 。

可见，通过这些角度的定义，不仅可以衡量飞机的运动姿态与方向，也可以弄清三种坐标系的相互关系。

三、被控对象——飞机的被控量与操纵机构

作为被控对象的飞机，往往把三个姿态角 ψ 、 ϑ 及 γ 当作主要的被控量。在飞行轨迹的控制系统中 H 、 Z_d 与 V 也作为被控量。通常利用副翼、方向舵、升降舵及油门杆来进行控制。副翼、方向舵、升降舵及油门杆的偏转角分别用 δ_x 、 δ_y 、 δ_z 及 δ_p 来表示 (应该指出：对于有些大型旅客机往往通过副翼调整片、升降舵调整片分别操纵副翼、升降舵以减轻舵机的负载。对近代某些飞机还用鸭翼、襟副翼及扰流片作为直接升力或侧力操纵面。可参看附录 IV。本册着重研究 δ_x 、 δ_y 、 δ_z 以及 δ_p 的作用)。为了分析问题清楚起见，将 δ_x 、 δ_y 、 δ_z 的符号规定如下：

δ_x ——副翼左上右下为正；

δ_y ——方向舵右偏为正；

δ_z ——升降舵下偏为正；

δ_p ——油门杆向前推为正。

关于 δ_x 、 δ_y 及 δ_z 的正负方向也可按右手定则来记忆 (见图 1-8)。当四指与舵面转动方向一致时, 大拇指如与坐标轴正方向一致即为正值。

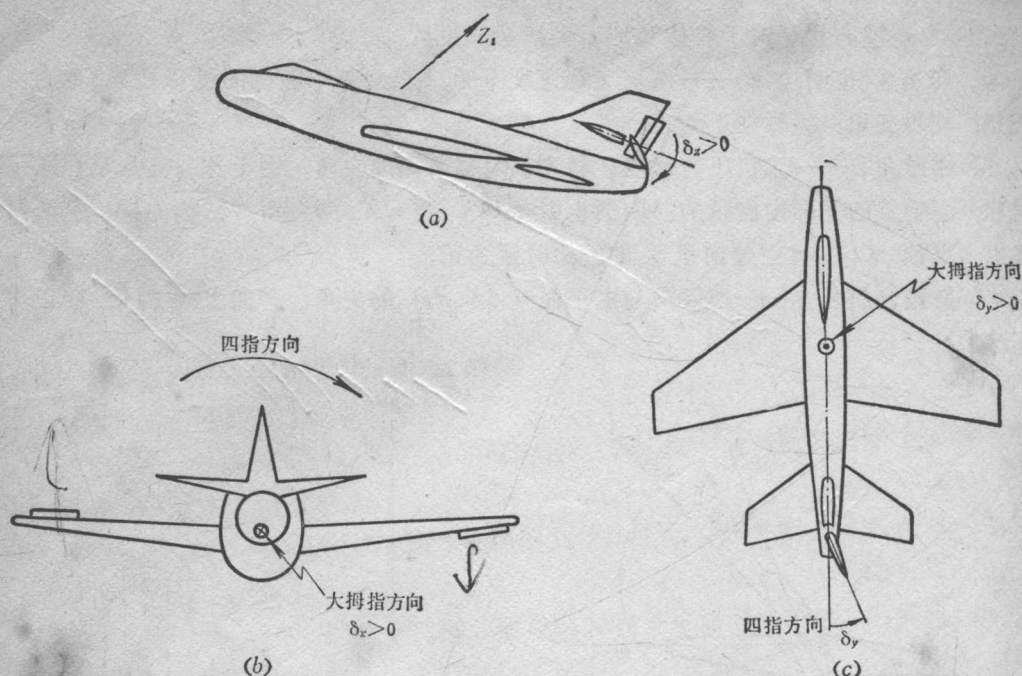


图1-8 右手定则与操纵面偏角符号
(a) 升降舵; (b) 副翼; (c) 方向舵。

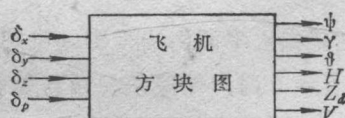


图1-9 飞机方块图

一旦被控量与操纵机构确定之后, 我们就可用一个方块图表示飞机的被控量与操纵机构的关系。这时操纵机构可看成飞机的输入量 (控制量), 而被控量可看成输出量, 于是可画出方块图如图 1-9。

下面我们将详细研究这些被控量与操纵机构相互之间的关系。

§ 2 飞机的六自由度运动方程式

在我们推导飞机全面运动之前, 我们已假定飞机为一个刚体。也就是说, 略去飞机弹性的影响。其次假定地球固定于空间, 也就是略去地球自转与公转的影响。第三个假定是认为 X, OY 平面是一个对称平面。第四个假定是: 飞机本身的质量 m 及其分布是不变的。

前面已说过, 如果只研究飞机的线运动而不必研究飞机的转动, 那么用固定的地面坐标系就可以了。可是飞机的线运动是与角运动不可分割地联系在一起的。为了研究线运动, 必需研究飞机的姿态变化。在这种情况下, 只利用地面坐标系就极不方便了。因为随着飞

一、牵连运动

$$O'P_1 = |\vec{r}_1| \sin(\vec{\omega}_1, \vec{r}_1) = |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_1| / |\vec{\omega}_1|$$

$$\overrightarrow{P_1 P''} = (\vec{\omega}_t \times \vec{r}_t) \Delta t$$

于是质点相对于地面坐标系的运动为:

$$\Delta \vec{R} = \vec{P}_1 P' + \vec{P}_1 P'' = \Delta \vec{r}_t + (\vec{\omega}_t \times \vec{r}) \Delta t \quad (1-1)$$

上式除以 Δt 、并令 $\Delta t \rightarrow 0$, 可得

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_i}{dt} + \vec{\omega}_i \times \vec{r}_i \quad (1-2)$$

(1-2) 式中 $\frac{d\vec{r}}{dt}$ 为向量变化率, $\frac{d\vec{r}_r}{dt}$ 为向量相对于动坐标系的变化率, $\vec{\omega}$ 为由动坐标系转动而引起的向量变化率。(1-2) 式完全可推广到任意向量的情况。对于 $\vec{v}$ 向量:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}_r}{dt} + \vec{\omega}_r \times \vec{V}_r \quad (1-3)$$

对于动量矩向量 $\vec{H}_i$:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{d\vec{H}_r}{dt} + \vec{\omega}_r \times \vec{H}_r \quad (1-4)$$

当我们应用向量代数法求出 $\frac{d\vec{v}}{dt}$ (或 $\frac{d\vec{H}}{dt}$) 在 OX , OY , 及 OZ 三轴上的投影时, 可得:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{V}}{dt} &= \frac{d}{dt} (i a_{x_t} + j a_{y_t} + k a_{z_t}) = \frac{d\bar{V}_t}{dt} + \phi_{x_t} \omega_{y_t} - \phi_{y_t} \omega_{x_t} \\ &= i \frac{dV_{x_t}}{dt} + j \frac{dV_{y_t}}{dt} + k \frac{dV_{z_t}}{dt} + i(\omega_{y_t} V_{x_t} - \omega_{x_t} V_{y_t}) \\ &\quad + j(\omega_{z_t} V_{x_t} - \omega_{x_t} V_{z_t}) + k(\omega_{x_t} V_{y_t} - \omega_{y_t} V_{x_t}) \end{aligned}$$

于是

$$\left. \begin{aligned} a_{x_t} &= \frac{dV_{x_t}}{dt} + \omega_{y_t}V_{z_t} - \omega_{z_t}V_{y_t} \\ a_{y_t} &= \frac{dV_{y_t}}{dt} + \omega_{z_t}V_{x_t} - \omega_{x_t}V_{z_t} \\ a_{z_t} &= \frac{dV_{z_t}}{dt} + \omega_{x_t}V_{y_t} - \omega_{y_t}V_{x_t} \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

利用同样方法可知 $\frac{d\vec{H}}{dt}$ 在 OX_t , OY_t 与 OZ_t 三个轴上的投影分别为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dH_{x_t}}{dt} + \omega_{y_t}H_{z_t} - \omega_{z_t}H_{y_t} \\ \frac{dH_{y_t}}{dt} + \omega_{z_t}H_{x_t} - \omega_{x_t}H_{z_t} \\ \frac{dH_{z_t}}{dt} + \omega_{x_t}H_{y_t} - \omega_{y_t}H_{x_t} \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

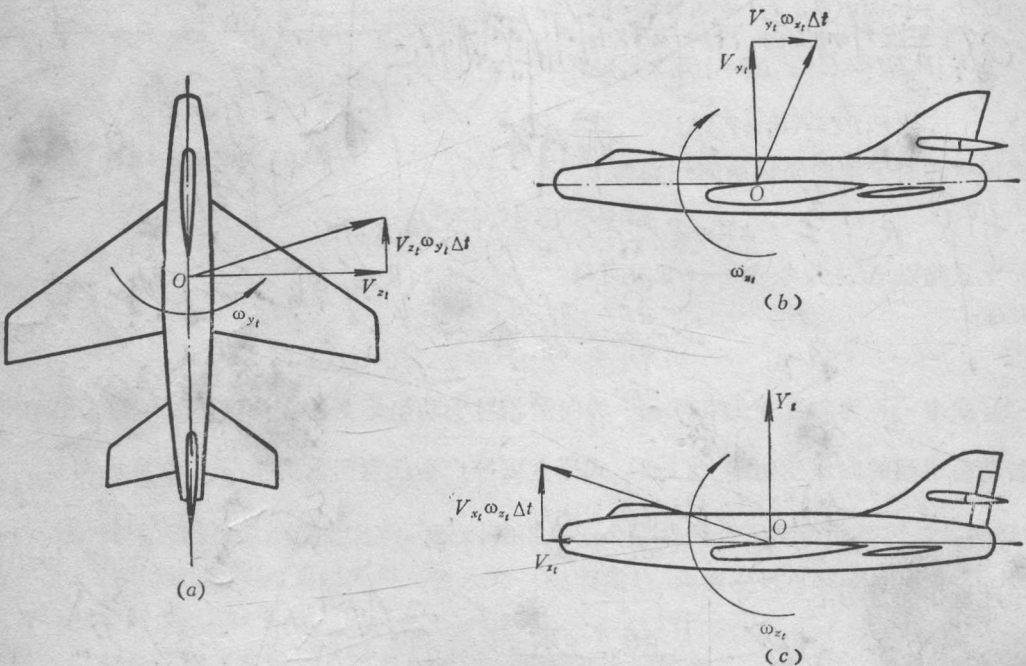


图1-11 牵连加速度
(a) $V_{z_t}\omega_{y_t}$; (b) $V_{y_t}\omega_{z_t}$; (c) $V_{x_t}\omega_{z_t}$ 。

为了从物理概念上进一步了解牵连运动各项的正负关系, 可参看图 1-11。图 1-11(a) 说明当有 $V_{z_t} > 0$, $\omega_{y_t} > 0$ 时, 在 Δt 时间内就会使速度发生变化, 变化量为 $\omega_{y_t}V_{z_t}\Delta t$, 它的方向与 OX_t 正方向一致, 因而 $\omega_{y_t}V_{z_t}$ 项取正号。从图 1-11(b) 可看出: $\omega_{z_t}V_{y_t}$ 应取负号。图 1-11(c) 说明 $\omega_{z_t}V_{x_t}\Delta t$ 与 OY_t 的正方向一致, 从而 $\omega_{z_t}V_{x_t}$ 应取正号。对于(1-5)式的其余三个牵连加速度项也可按类似方式来理解。此外如图 1-11 中的 V_{x_t} , V_{y_t} , V_{z_t} 分别用 H_{x_t} , H_{y_t} 及 H_{z_t} 来代替, 同样也可说明牵连运动中的动量矩变化率是如何产生的。

二、飞机的六自由度运动方程的建立

飞机的运动方程式由两部分组成，一部分为以牛顿第二定律（动力学定律）为基础的动力学方程组，另一部分为通过坐标变换关系得出的运动学方程组。

1. 动力学方程组

分别按牛顿第二定律 $m\vec{a} = \vec{F}$ 与动量矩定律 $\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{M}$ 两部分来建立方程组。

a. 按 $m\vec{a} = \vec{F}$ 建立的三轴力的动平衡方程式

前面已得出，在用动坐标系 $OX_t Y_t Z_t$ 时三轴的加速度如 (1-5) 式所示。于是可得：

$$\left. \begin{aligned} m \left[\frac{dV_{x_t}}{dt} + \omega_{y_t} V_{z_t} - \omega_{z_t} V_{y_t} \right] &= F_{x_t} \\ m \left[\frac{dV_{y_t}}{dt} + \omega_{z_t} V_{x_t} - \omega_{x_t} V_{z_t} \right] &= F_{y_t} \\ m \left[\frac{dV_{z_t}}{dt} + \omega_{x_t} V_{y_t} - \omega_{y_t} V_{x_t} \right] &= F_{z_t} \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

只要等式右边力 $\vec{F}$ 的各个分量 F_{x_t} 、 F_{y_t} 及 F_{z_t} 所包含的具体内容弄清楚之后，方程式就完全了。

b. 按 $\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{M}$ 建立的力矩方程式

从 (1-6) 式包含的 $\frac{d\vec{H}}{dt}$ 在三轴上的投影可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{dH_{x_t}}{dt} + \omega_{y_t} H_{z_t} - \omega_{z_t} H_{y_t} &= M_{x_t} \\ \frac{dH_{y_t}}{dt} + \omega_{z_t} H_{x_t} - \omega_{x_t} H_{z_t} &= M_{y_t} \\ \frac{dH_{z_t}}{dt} + \omega_{x_t} H_{y_t} - \omega_{y_t} H_{x_t} &= M_{z_t} \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

(1-8) 式左边的动量矩项可从图1-12中质量元 dm 的动量矩入手分析。所谓质量元是指飞机某一位置 (x_t, y_t, z_t) 处的一个微小质量。它对坐标原点的向径可表示为 $\vec{\rho} = ix_t + jy_t + kz_t$ 。设飞机有一角速度 $\vec{\Omega} = i\omega_{x_t} + j\omega_{y_t} + k\omega_{z_t}$ 。

按第一节关于牵连运动的知识可知，这一角速度会引起质量元 dm 产生一牵连速度 $\vec{V}_{dm}$ 。它的向量值可按下式计算

$$\vec{V}_{dm} = \vec{\Omega} \times \vec{\rho} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_{x_t} & \omega_{y_t} & \omega_{z_t} \\ x_t & y_t & z_t \end{vmatrix}$$

就是说

$$\begin{aligned} \vec{V}_{dm} &= i(\omega_{y_t} z_t - \omega_{z_t} y_t) + j(\omega_{z_t} x_t - \omega_{x_t} z_t) + k(\omega_{x_t} y_t - \omega_{y_t} x_t) \\ &= iV_{dm_x} + jV_{dm_y} + kV_{dm_z} \end{aligned} \quad (1-9)$$

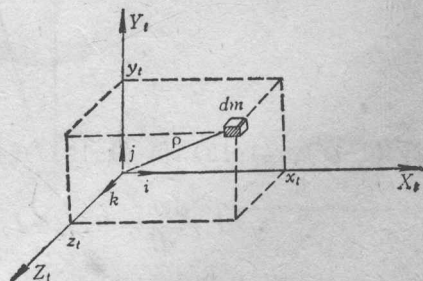


图1-12 动量矩

质量元的动量为 $dm(\vec{v}_{dm}) = \vec{v}_{dm}dm$ 。它再乘以动量臂就得到质量元的动量矩。它在 X_t 轴上的分量为:

$$dH_{x_t} = (y_t V_{dmz} - z_t V_{dmy}) dm \quad (1-10)$$

$$dH_{x_t} = (\omega_{y_t} y_t^2 - \omega_{z_t} x_t y_t + \omega_{x_t} z_t^2 - \omega_{z_t} x_t z_t) dm \quad (1-11)$$

同理可得:

$$dH_{y_t} = (\omega_{y_t} z_t^2 - \omega_{z_t} y_t z_t + \omega_{y_t} x_t^2 - \omega_{x_t} x_t y_t) dm \quad (1-12)$$

$$dH_{z_t} = (\omega_{x_t} x_t^2 - \omega_{x_t} x_t z_t + \omega_{z_t} y_t^2 - \omega_{y_t} y_t z_t) dm \quad (1-13)$$

对 (1-11)、(1-12)、(1-13) 各式进行积分可得

$$H_{x_t} = \omega_{x_t} \int (y_t^2 + z_t^2) dm - \omega_{y_t} \int x_t y_t dm - \omega_{z_t} \int x_t z_t dm \quad (1-14)$$

$$H_{y_t} = -\omega_{x_t} \int x_t y_t dm + \omega_{y_t} \int (z_t^2 + x_t^2) dm - \omega_{z_t} \int y_t z_t dm \quad (1-15)$$

$$H_{z_t} = -\omega_{x_t} \int x_t z_t dm - \omega_{y_t} \int y_t z_t dm + \omega_{z_t} \int (x_t^2 + y_t^2) dm \quad (1-16)$$

上列三式中

$$\int (y_t^2 + z_t^2) dm = I_x \quad \text{为绕 } X_t \text{ 轴的转动惯量}$$

$$\int (z_t^2 + x_t^2) dm = I_y \quad \text{为绕 } Y_t \text{ 轴的转动惯量}$$

$$\int (x_t^2 + y_t^2) dm = I_z \quad \text{为绕 } Z_t \text{ 轴的转动惯量}$$

$$\int x_t y_t dm = I_{xy}$$

$$\int z_t x_t dm = I_{zx}$$

$$\int y_t z_t dm = I_{yz}$$

为惯性积

按照前面所作的第三个假定, 飞机相对于包含 X_t 、 Y_t 两轴的平面对称的。换句话说, 在 x_t, y_t 相同的条件下, $z_t > 0$ 的部分质量与 $z_t < 0$ 的部分质量是相同的。因而后面两个积分

$\int z_t x_t dm = I_{zx}$, $\int y_t z_t dm = I_{yz}$ 全为零。于是 (1-14)~(1-16) 式变为:

$$H_{x_t} = I_x \omega_{x_t} - I_{xy} \omega_{y_t} \quad (1-17)$$

$$H_{y_t} = -I_{xy} \omega_{x_t} + I_y \omega_{y_t} \quad (1-18)$$

$$H_{z_t} = I_z \omega_{z_t} \quad (1-19)$$

将 (1-17)、(1-18) 和 (1-19) 式代入 (1-8) 式可得:

$$\left. \begin{aligned} I_x \frac{d\omega_{x_t}}{dt} + (I_z - I_y) \omega_{y_t} \omega_{z_t} + I_{xy} \left(\omega_{z_t} \omega_{x_t} - \frac{d\omega_{y_t}}{dt} \right) &= M_x \\ I_y \frac{d\omega_{y_t}}{dt} + (I_x - I_z) \omega_{z_t} \omega_{x_t} - I_{xy} \left(\omega_{y_t} \omega_{z_t} + \frac{d\omega_{x_t}}{dt} \right) &= M_y \\ I_z \frac{d\omega_{z_t}}{dt} + (I_y - I_x) \omega_{x_t} \omega_{y_t} + I_{xy} (\omega_{y_t}^2 - \omega_{x_t}^2) &= M_z \end{aligned} \right\} \quad (1-20)$$

(1-20)式是没有考虑到发动机旋转角速度 ω_f 在飞机转动时产生的陀螺力矩,如考虑这些陀螺力矩后,在 M_y 、 M_z 方程式中还应各增加一项。于是(1-20)式变为:

$$I_x \frac{d\omega_{x_t}}{dt} + (I_z - I_y)\omega_{y_t}\omega_{z_t} + I_{xy}\left(\omega_{z_t}\omega_{x_t} - \frac{d\omega_{y_t}}{dt}\right) = M_x \quad (1-21)$$

$$I_y \frac{d\omega_{y_t}}{dt} + (I_x - I_z)\omega_{z_t}\omega_{x_t} - I_{xy}\left(\omega_{y_t}\omega_{z_t} + \frac{d\omega_{x_t}}{dt}\right) + I_f\omega_f\omega_{z_t} = M_y \quad (1-22)$$

$$I_z \frac{d\omega_{z_t}}{dt} + (I_y - I_x)\omega_{x_t}\omega_{y_t} + I_{xy}(\omega_{x_t}^2 - \omega_{y_t}^2) - I_f\omega_f\omega_{y_t} = M_z \quad (1-23)$$

式中 I_f 表示发动机转子的转动惯量, ω_f 为发动机转速。

为了便于计算,应把(1-21)、(1-22)中含有两个导数项的公式化为只含有一个导数项的形式,变为:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_{x_t}}{dt} = \frac{1}{I_x I_y - I_{xy}^2} [& I_y M_x + I_{xy} M_y - I_{xy}(I_x + I_y - I_z)\omega_{y_t}\omega_{z_t} \\ & + (I_y^2 + I_{xy}^2 - I_y I_z)\omega_{y_t}z_t - I_{xy}I_f\omega_f\omega_{z_t}] \end{aligned} \quad (1-24)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_{y_t}}{dt} = \frac{1}{I_x I_y - I_{xy}^2} [& I_x M_y + I_{xy} M_x - I_{xy}(I_z - I_x - I_y)\omega_{y_t}\omega_{z_t} \\ & + (I_x I_z - I_{xy}^2 - I_z^2)\omega_{z_t}\omega_{x_t} - I_x I_f\omega_f\omega_{z_t}] \end{aligned} \quad (1-25)$$

$$\frac{d\omega_{z_t}}{dt} = \frac{1}{I_z} [M_z + (I_x - I_y)\omega_{x_t}\omega_{y_t} + I_{xy}(\omega_{x_t}^2 - \omega_{y_t}^2) + I_f\omega_f\omega_{y_t}] \quad (1-26)$$

从(1-20)、(1-24)、(1-25)及(1-26)式只能解出飞机相对于机体坐标系 OX, Y, Z_t 的速度向量与角速度向量;还不能由此确定飞机相对地面坐标系的位置(X_d, Y_d 及 Z_d)以及姿态角(γ, ψ, ϑ)。为此,应由坐标变换来找出它们之间的相互关系。

2. 通过坐标变换确定的运动学方程组

a. 角位置运动学方程组

我们知道 ω_{x_t} 、 ω_{y_t} 及 ω_{z_t} 是飞机绕机体三轴的角速度,当 $\gamma \neq 0$, $\vartheta \neq 0$ 时,没有一个角速度分量是水平或垂直的。而三个欧拉角的速率中 $\dot{\psi}$ 是永远沿垂直轴的, $\dot{\vartheta}$ 是绕水平轴产生的。唯有 $\dot{\gamma}$ 是绕机体轴 OX_t 而转动的。因而,如果把 $\dot{\psi}$ 、 $\dot{\vartheta}$ 及 $\dot{\gamma}$ 向机体三轴投影的话,便只有 ω_{x_t} 包含 $\dot{\gamma}$ 的全部, ω_{x_t} 、 ω_{y_t} 、 ω_{z_t} 都会含有 $\dot{\psi}$ 及 $\dot{\vartheta}$ 的投影分量。为了找出 ω_{x_t} 、 ω_{y_t} 、 ω_{z_t} 与 $\dot{\gamma}$ 、 $\dot{\psi}$ 、 $\dot{\vartheta}$ 的关系用坐标转换矩阵的方法最简捷。当 $\dot{\gamma} = 0$ 时,如果想求出 $\gamma \neq 0$, $\vartheta \neq 0$

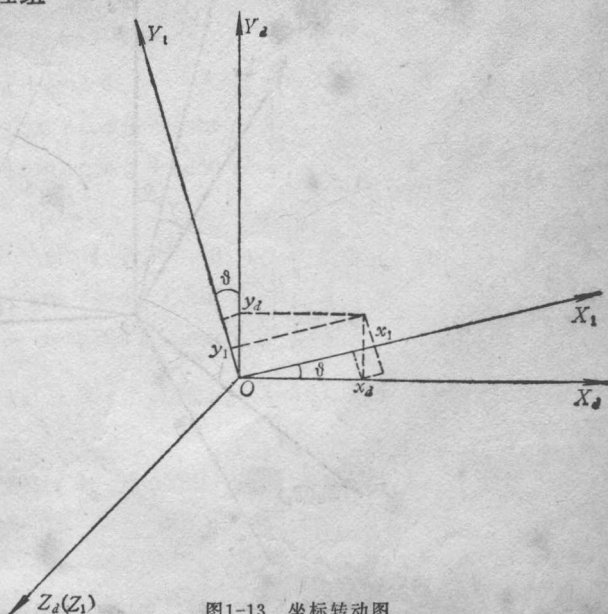


图1-13 坐标转动图

时 $\dot{\psi}$ 、 $\dot{\vartheta}$ 在 OX_1 、 OY_1 、 OZ_1 轴上的投影,可以先假定坐标轴绕 OZ_d 轴转了 ϑ 角(这时 $\gamma = 0$)(图1-13)。于是三轴向量的坐标转换方程式为

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= X_d \cos \vartheta + Y_d \sin \vartheta \\ Y_1 &= -X_d \sin \vartheta + Y_d \cos \vartheta \\ Z_1 &= Z_d \end{aligned} \right\} \quad (1-27)$$

因此地面坐标系上的向量 (X_d, Y_d, Z_d) 转换到新的坐标系之后,为 (X_1, Y_1, Z_1) 。用矩阵表示时:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_d \\ Y_d \\ Z_d \end{bmatrix} = [C_{(\vartheta)}] \begin{bmatrix} X_d \\ Y_d \\ Z_d \end{bmatrix} \quad (1-28)$$

其中

$$[C_{(\vartheta)}] = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由于 $\dot{\psi}$ 是绕平行于 Y_d 轴的转动,而 $\dot{\vartheta}$ 是绕水平轴的转动,因而 $\dot{\psi}$ 、 $\dot{\vartheta}$ 在 OX_1 、 OY_1 与 OZ_1 的投影可利用 $[C_{(\vartheta)}]$ 求出:

$$\begin{bmatrix} \omega_{x_1} \\ \omega_{y_1} \\ \omega_{z_1} \end{bmatrix} = [C_{(\vartheta)}] \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \sin \vartheta \\ \dot{\psi} \cos \vartheta \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} \quad (1-29)$$

如果 $OX_1Y_1Z_1$ 轴系再绕 OX_1 转 γ 角(注意 γ 角正是绕机体 OX_d 轴转动的),那么这时又可利用另一个坐标转换矩阵来求出 ω_{x_1} 、 ω_{y_1} 及 ω_{z_1} (参看图1-14)。

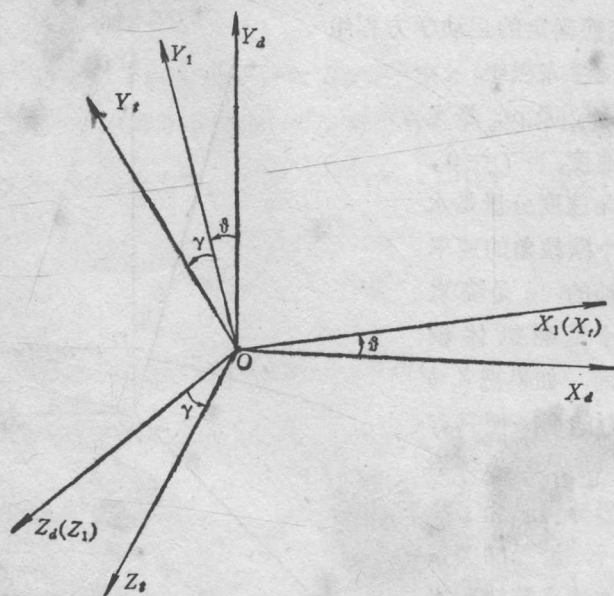


图1-14 坐标转动图

$$\begin{bmatrix} \omega_{x_t} \\ \omega_{y_t} \\ \omega_{z_t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{x_1} \\ \omega_{y_1} \\ \omega_{z_1} \end{bmatrix} = [C_{(\gamma)}] \begin{bmatrix} \omega_{x_1} \\ \omega_{y_1} \\ \omega_{z_1} \end{bmatrix} \quad (1-30)$$

其中

$$[C_{(\gamma)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

把 (1-29) 式代入 (1-30) 式可得:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \omega_{x_t} \\ \omega_{y_t} \\ \omega_{z_t} \end{bmatrix} &= [C_{(\gamma)}][C_{(\theta)}] \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\cos \gamma \sin \theta & \cos \gamma \cos \theta & \sin \gamma \\ \sin \gamma \sin \theta & -\sin \gamma \cos \theta & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (1-31) \end{aligned}$$

其中

$$[C_{(\gamma)}][C_{(\theta)}] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\cos \gamma \sin \theta & \cos \gamma \cos \theta & \sin \gamma \\ \sin \gamma \sin \theta & -\sin \gamma \cos \theta & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (1-32)$$

(1-31) 式为 $\dot{\gamma} = 0$ 的情况。当 $\dot{\gamma} \neq 0$ 时便得出:

$$\begin{bmatrix} \omega_{x_t} \\ \omega_{y_t} \\ \omega_{z_t} \end{bmatrix} = [C_{(\gamma)}][C_{(\theta)}] \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1-33)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_{x_t} \\ \omega_{y_t} \\ \omega_{z_t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\gamma} + \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \gamma \cos \theta + \dot{\theta} \sin \gamma \\ -\dot{\psi} \sin \gamma \cos \theta + \dot{\theta} \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (1-34)$$

或写成

$$\begin{bmatrix} \omega_{x_t} \\ \omega_{y_t} \\ \omega_{z_t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \gamma \cos \theta & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma \cos \theta & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (1-35)$$

为了从已知的 ω_{x_t} 、 ω_{y_t} 、 ω_{z_t} 求出 $\dot{\gamma}$ 、 $\dot{\psi}$ 及 $\dot{\theta}$ ，无论从 (1-33) 式或 (1-35) 式都不难求得:

$$\begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\cos \gamma \operatorname{tg} \theta & +\sin \gamma \operatorname{tg} \theta \\ 0 & \frac{\cos \gamma}{\cos \theta} & -\frac{\sin \gamma}{\cos \theta} \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{x_t} \\ \omega_{y_t} \\ \omega_{z_t} \end{bmatrix}$$

就是

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega_{x_i} - (\omega_{y_i} \cos \gamma - \omega_{z_i} \sin \gamma) \operatorname{tg} \vartheta \quad (1-36)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{(\omega_{y_i} \cos \gamma - \omega_{z_i} \sin \gamma)}{\cos \vartheta} \quad (1-37)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega_{y_i} \sin \gamma + \omega_{z_i} \cos \gamma \quad (1-38)$$

b. 线位置的运动学方程

线速度在动坐标系上的几个分量 V_{x_i} 、 V_{y_i} 及 V_{z_i} 要转换到地面坐标系上去，便不仅要考虑到 ϑ 与 γ 的影响，还要考虑到偏航角 ψ 的影响。如果已知 V_{x_d} 、 V_{y_d} 及 V_{z_d} 要求 V_{x_i} 、 V_{y_i} 及 V_{z_i} 时，应先令坐标系绕铅垂轴转一个 ψ 角，然后再绕水平的横轴转一个 ϑ 角，最后绕纵轴转一个 γ 角。只有这样才能保证 ψ 及 ϑ 角的转法符合定义的方向。现在是已知 V_{x_i} 、 V_{y_i} 与 V_{z_i} ，那么转动的方向与次序都应相反，就是先令机体坐标系绕 OX_i 轴反转 γ 角（就是使 $\gamma = 0$ ），这时横轴就由倾斜状态转入水平状态。现在再绕已水平的横轴反转一个 ϑ 角，于是飞机立轴也铅垂了，再绕铅垂的立轴反转一个 ψ 角。于是三个机体轴的方向与地面轴系平行了（参看图1-15）。

第一步由 $OY_i \rightarrow OY_1$ ， $OZ_i \rightarrow OZ_1$ 。 OZ_1 轴已进入水平面内。这时由 V_{x_i} 、 V_{y_i} 、 V_{z_i} 到 V_{x_1} 、 V_{y_1} 、 V_{z_1} 的变换矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

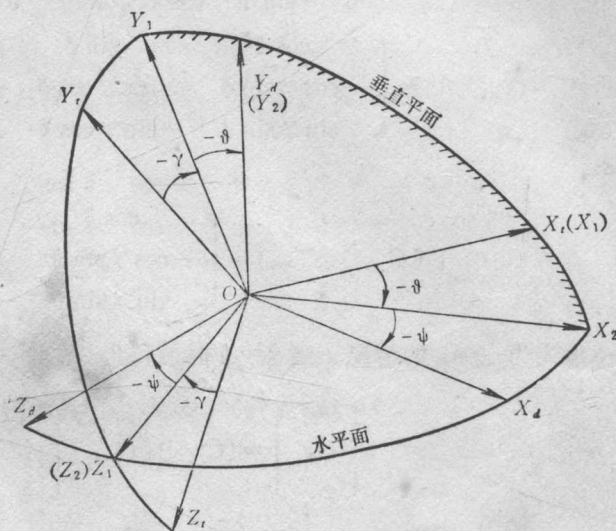


图1-15 由机体坐标系回转到地面坐标系的示意图

这个矩阵与前面 (1-30) 式的 $[C_{(\gamma)}]$ 相比较，为其转置。这是因为往回转的缘故：

$$[C_{(\gamma)}]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (1-39)$$

由 V_{x_1} 、 V_{y_1} 、 V_{z_1} 绕 OZ_1 轴转回 ϑ 角时，变为 V_{x_2} 、 V_{y_2} 及 $V_{z_2}(=V_{z_1})$ ，变换矩阵为：

$$[C_{(\vartheta)}]^T = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-40)$$

现在 OZ_2 与 OX_2 全在水平面内， $OY_d(OY_2)$ 已铅垂了，绕 OY_d 再反转 ψ 角，变换矩阵为：