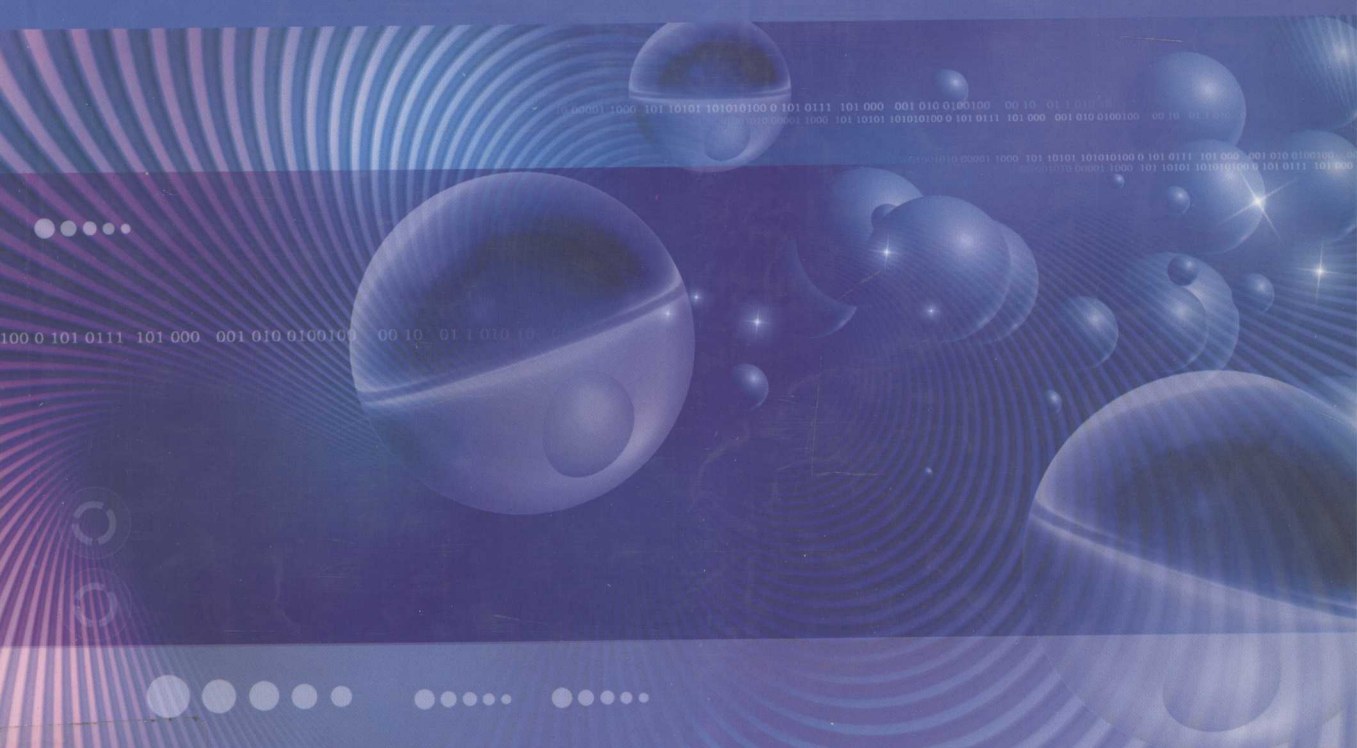




# 陀螺原理及应用

TUOLUO YUANLI  
JI YINGYONG

■ 许江宁 卞鸿巍 刘强 马恒 朱涛 编著



国防工业出版社

National Defense Industry Press

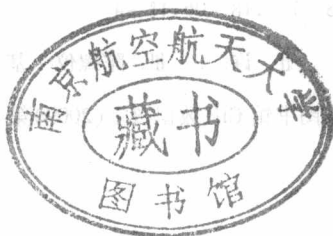


NUAA2009078348

0318  
1007-2

# 陀螺原理及应用

许江宁 卞鸿巍 刘强 马恒 朱涛 编著



国防工业出版社

北京

2009078348

## 内 容 简 介

本书系统、全面地介绍了陀螺仪的基本概念、基本理论以及陀螺技术的应用,并结合当前部队导航装备的实际情况,介绍了光纤陀螺仪、静电陀螺仪等。全书共分10章,主要内容包括陀螺仪的基本理论、自由陀螺仪的视运动、摆式陀螺罗经、电控陀螺罗经、陀螺仪漂移测试的基本原理等。

本书可作为导航工程、自动化、精密仪器及机械以及相关专业的本科生、研究生的教学用书和参考书,也可作为从事相关专业的科研和工程技术人员的参考用书。

### 图书在版编目(CIP)数据

陀螺原理及应用 / 许江宁等编著. —北京:国防工业出版社,  
2009.10

ISBN 978 - 7 - 118 - 06441 - 4

I. 陀... II. 许... III. 陀螺仪 - 基本知识 IV. TN965

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 115819 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

\*

开本 787 × 1092 1/16 印张 18 字数 412 千字

2009年10月第1版第1次印刷 印数 1—4000册 定价 32.00元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)68428422

发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535

发行业务:(010)68472764

8288500008

# 前 言

陀螺仪是惯性导航系统与惯性仪表的核心部件,在战略武器中占有极其重要的地位,且在战术武器中的应用也日益广泛。以陀螺仪为核心组成的各种系统和设备已被广泛应用于航海、航空、航天、陆地和兵器等导航领域,特别是核潜艇、战略轰炸机、战略导弹的高精度导航、制导与控制。发达国家一直将陀螺仪技术作为关键技术予以高度重视和大力发展。

本书针对现有教材应用针对性不强、缺少新装备内容等问题,从陀螺仪基本概念、基本理论入手,通过对自由陀螺仪的视运动分析,引出并论述了陀螺仪技术在陀螺方位仪、摆式陀螺罗经、电控陀螺罗经等导航装备中的应用,阐述了有关新型陀螺仪、新型陀螺导航装备的相关知识,对陀螺导航装备的研发、维修、培训具有理论指导作用。

本书共分10章,第1章、第2章介绍了陀螺仪定位的基本理论。第3章~第5章论述了陀螺仪在陀螺导航装备中的应用。第6章介绍了微分陀螺仪和积分陀螺仪的相关知识。第7章介绍了陀螺仪漂移测试的基本原理。第8章~第10章介绍了挠性陀螺仪、光纤陀螺仪、静电陀螺仪等的知识。为方便读者学习理解,书中提供了大量的习题并附部分参考答案,并在附录中补充了一些必要的数学知识。

本书在编写过程中,吸取了教学、科研的经验与体会,参考了国内外相关的文献资料,在内容上注重与装备实际和学科前沿相结合,在叙述上力求突出重点、深入浅出。

本书在编写过程中得到了海军工程大学殷立吴、高启孝、周永余、边少锋、陈永冰、胡柏青等同志的帮助和支持,并吸取了他们在教学中的经验,以及对本书提出的宝贵意见,在此表示诚挚的感谢!

限于编著者水平,书中难免有不妥与错误之处,敬请读者批评指正。

编著者  
2009年5月于武汉

# 目 录

<b>第 1 章 陀螺仪基本理论</b> .....	1
1.1 物体空间的位置和运动 .....	1
1.1.1 点的位置向量及其表示法 .....	1
1.1.2 方向余弦矩阵 .....	6
1.1.3 方向余弦矩阵的正交性 .....	10
1.1.4 刚体在空间的位置 .....	12
1.1.5 刚体在空间的运动和角速度向量 .....	16
1.1.6 哥氏(Coriolis)定理 .....	21
1.1.7 惯性椭球 .....	24
1.2 陀螺仪定义、分类及其基本特性 .....	27
1.2.1 陀螺仪的定义 .....	27
1.2.2 陀螺仪的分类 .....	28
1.2.3 陀螺仪的基本特性 .....	30
1.3 陀螺仪基本特性的力学原理 .....	31
1.3.1 动量矩及动量矩定理 .....	32
1.3.2 陀螺仪特性的力学原理 .....	33
1.4 陀螺仪的运动方程 .....	37
1.4.1 用欧拉动力学方程建立陀螺仪运动方程 .....	37
1.4.2 用第二类拉格朗日方程列写陀螺仪运动方程 .....	42
1.4.3 用动静法列写陀螺仪运动方程 .....	44
1.5 陀螺仪的运动分析 .....	45
1.5.1 无外力矩作用时——定轴性 .....	45
1.5.2 在脉冲力矩作用下——稳定性 .....	46
1.5.3 在常值力矩作用下——进动性 .....	48
习题 1 .....	49
<b>第 2 章 坐标系及陀螺定位</b> .....	56
2.1 几种常用的坐标系 .....	56
2.1.1 惯性坐标系 .....	56

2.1.2	地球、地理坐标系及其运动	57
2.1.3	与舰船固结的地理坐标系( $O\xi\eta\zeta$ )	58
2.1.4	载体坐标系	59
2.1.5	陀螺仪坐标系	60
2.2	自由陀螺仪的视运动	60
2.2.1	视运动现象	60
2.2.2	陀螺仪视运动分析	61
2.2.3	陀螺坐标系与地理坐标系之间的变换关系	63
	习题2	65
<b>第3章</b>	<b>陀螺方位仪</b>	<b>69</b>
3.1	陀螺方位仪的功能、组成及工作原理	69
3.2	陀螺方位仪的运动方程	71
3.3	陀螺方位仪的使用误差	73
3.3.1	纬度误差	73
3.3.2	速度误差	73
3.3.3	摩擦误差	74
3.3.4	交链误差	74
3.3.5	重心偏移误差	74
3.3.6	参数不稳定造成的误差	74
3.3.7	支架误差	75
	习题3	80
<b>第4章</b>	<b>陀螺罗经的指北原理</b>	<b>81</b>
4.1	使自由陀螺仪转变为陀螺罗经	81
4.1.1	摆式罗经	81
4.1.2	下重式陀螺球的找北能力	83
4.1.3	陀螺球的无阻尼振荡	84
4.2	陀螺球主轴相对稳定平衡位置的无阻尼振荡	87
4.2.1	陀螺球在静止基座上的运动微分方程式和平衡位置	87
4.2.2	陀螺球主轴相对平衡位置的微振动方程	87
4.2.3	陀螺罗经的指向力矩	89
4.2.4	陀螺罗经的质量系数	90
4.3	陀螺球主轴的阻尼振荡运动	91
4.3.1	液体阻尼器	91
4.3.2	阻尼器内的液体是理想的情况下	91
4.3.3	阻尼液体的流动滞后于高度角变化 $1/4$ 周期	92



4.3.4	多余液体重力矩 .....	92
4.3.5	加阻尼器后陀螺球主轴的平衡位置 .....	93
4.4	陀螺球主轴阻尼振荡的数学分析 .....	94
4.4.1	运动微分方程式 .....	94
4.4.2	平衡位置 .....	95
4.4.3	主轴偏离平衡位置后在方位角上的运动规律 .....	95
4.4.4	阻尼振荡的动态品质参数 .....	98
4.5	基座运动对陀螺罗经指向的影响 .....	100
4.5.1	速度自差 .....	100
4.5.2	速度自差校正器 .....	101
4.5.3	陀螺球主轴在运动基座上的无阻尼振荡 .....	103
4.6	双转子摆式罗经的冲击误差 .....	104
4.6.1	第一类冲击误差的产生及其消除 .....	104
4.6.2	第二类冲击误差的形成和消除 .....	110
4.6.3	冲击误差的合成 .....	111
4.7	舒拉(Schuler)原理 .....	113
4.8	舰船摇摆对陀螺球指向的影响 .....	116
4.8.1	舰船的航向 $K$ 为 $0^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $180^\circ$ 、 $270^\circ$ 时的横摇 .....	116
4.8.2	舰船的航向 $K$ 为 $45^\circ$ 或 $135^\circ$ 时的横摇 .....	116
4.8.3	摇摆误差 .....	117
4.9	双转子陀螺球消除摇摆误差的原理 .....	119
4.9.1	双转子摆式罗经 .....	119
4.9.2	双转子陀螺球运动微分方程 .....	121
4.9.3	双转子陀螺罗经的摇摆误差 .....	127
	习题 4 .....	129
<b>第 5 章</b>	<b>电控双态罗经 .....</b>	<b>133</b>
5.1	电控罗经的灵敏部分 .....	133
5.2	电磁摆与信号—力矩器的工作原理 .....	137
5.2.1	电磁摆 .....	137
5.2.2	信号—力矩器 .....	137
5.3	电控罗经的传动过程及其电路系统 .....	140
5.4	方位仪工作状态的电控罗经 .....	143
5.4.1	静止基座上的工作原理 .....	143
5.4.2	基座运动对方位仪指向的影响 .....	144
5.4.3	直航向等加速运动的影响 .....	145

5.5	电控罗经在静基座上的无阻尼运动	147
5.5.1	无阻尼运动方程	148
5.5.2	平衡位置	150
5.5.3	运动规律	150
5.6	电控罗经在静基座上的阻尼运动	152
5.6.1	阻尼运动方程	152
5.6.2	平衡位置	153
5.6.3	稳定条件	155
5.6.4	运动规律	156
5.6.5	电控罗经的运动参数	158
5.7	舰船运动对电控罗经的影响	159
5.7.1	平衡位置	159
5.7.2	电控罗经的补偿	162
5.8	舰船的加速运动对电控罗经的影响	163
5.8.1	加速度对电磁摆的影响	163
5.8.2	电磁摆的限挡作用	163
5.9	电控罗经的环航误差	166
5.10	舰船摇摆对电控罗经的影响	168
5.10.1	电磁摆在不阻尼情况下电控罗经的摇摆误差	168
5.10.2	强阻尼电磁摆克服摇摆误差的原理	171
5.11	电控罗经的状态变换与补偿方法	173
	习题5	175
<b>第6章</b>	<b>微分陀螺仪和积分陀螺仪</b>	<b>176</b>
6.1	微分陀螺仪概述	176
6.2	微分陀螺仪的运动方程和静态特性	177
6.3	微分陀螺仪的传递函数及其运动特性	180
6.4	积分陀螺仪概述	182
6.5	积分陀螺仪的运动方程及误差分析	183
6.6	积分陀螺仪的传递函数及其动态特性	186
6.7	积分陀螺仪的应用	188
6.7.1	构成力反馈式微分陀螺仪	188
6.7.2	用作陀螺稳定平台的敏感元件	190
	习题6	191
<b>第7章</b>	<b>陀螺仪的漂移与测试</b>	<b>192</b>
7.1	陀螺漂移的基本概念	192



7.1.1	自由陀螺的漂移	192
7.1.2	单自由度陀螺的漂移	192
7.2	陀螺漂移因素	193
7.2.1	摩擦力矩引起的漂移	194
7.2.2	不平衡力矩引起的漂移	194
7.2.3	非等弹性力矩引起的漂移	195
7.3	陀螺漂移测试的伺服跟踪法	196
7.3.1	伺服跟踪法的原理	196
7.3.2	测速方法	197
7.3.3	转台轴的取向	198
7.4	漂移测试的力矩反馈法	199
7.4.1	力矩反馈法原理	199
7.4.2	陀螺相对地理坐标系的取向	199
7.5	陀螺漂移的数学模型	201
习题 7		203
<b>第 8 章</b>	<b>挠性陀螺仪</b>	<b>204</b>
8.1	挠性陀螺仪的基本工作原理	204
8.1.1	基本工作原理	204
8.1.2	挠性支承的弹性恢复力矩的补偿	204
8.1.3	挠性陀螺的正交阻尼力矩	205
8.2	动力调谐式挠性陀螺仪	205
8.2.1	结构	205
8.2.2	平衡环的扭摆运动	206
8.2.3	平衡环产生的补偿力矩的力学分析	208
8.2.4	用矩阵变换的方法求动力调谐陀螺的调谐条件	212
8.2.5	挠性陀螺与液浮陀螺的优缺点	218
习题 8		219
<b>第 9 章</b>	<b>光纤陀螺仪</b>	<b>220</b>
9.1	概述	220
9.2	光纤陀螺仪的工作原理	222
9.2.1	萨格奈克干涉仪	222
9.2.2	基本工作原理	224
9.2.3	光纤陀螺仪的构成方式	227
9.2.4	结构方案与光学元件	230
9.3	主要关键技术和检测	232

9.3.1	主要关键技术	232
9.3.2	光纤陀螺仪的检测	233
9.4	光纤陀螺仪的基本类型	234
9.4.1	干涉型光纤陀螺(I-FOG)	234
9.4.2	谐振型光纤陀螺(R-FOG)	236
9.5	光纤陀螺仪的应用	239
9.5.1	FOG在舰船导航中的应用	239
9.5.2	FOG在潜艇导航系统中的应用	242
9.5.3	光纤陀螺仪的发展方向	242
9.5.4	光纤陀螺仪的应用前景	244
习题9		244
<b>第10章</b>	<b>静电陀螺仪</b>	<b>245</b>
10.1	概述	245
10.1.1	静电陀螺仪的特点	245
10.1.2	静电陀螺仪的发展概况	246
10.2	静电陀螺仪的工作原理	248
10.2.1	静电陀螺仪的结构组成	248
10.2.2	静电陀螺仪的静电支承原理	250
10.2.3	静电陀螺仪的角度读取原理	256
10.3	静电陀螺仪的动力学方程	259
10.4	静电陀螺仪的应用	262
10.4.1	静电陀螺仪在方位测量中的应用	262
10.4.2	静电陀螺监控器	267
习题10		267
	部分习题参考答案	268
	附录A 符号诠释	271
	附录B 拉普拉斯(Laplace)变换	274
	参考文献	278

# 第 1 章 陀螺仪基本理论

## 1.1 物体空间的位置和运动

物体在空间的位置和运动,是相对一定的参考坐标系而言的。在分析陀螺及陀螺导航系统的时候,经常会涉及到几个不同的参考坐标系。在假设物体为刚体的前提下,物体及物体上点的位置和运动,只是时间的函数,通常用点的位置向量、速度向量和加速度向量以及物体旋转时的角速度向量及角加速度向量来描述。本节的主要内容就讨论这些重要物理量的意义及其在不同参考坐标系之间的转换关系。

### 1.1.1 点的位置向量及其表示法

如图 1-1 所示,在直角坐标系  $OXYZ$  中, $P$  点的位置可以用向量  $\mathbf{r} = \vec{OP}$  来表示。向量  $\mathbf{r}$  定义为质点  $P$  相对坐标系  $OXYZ$  原点  $O$  的位置向量。

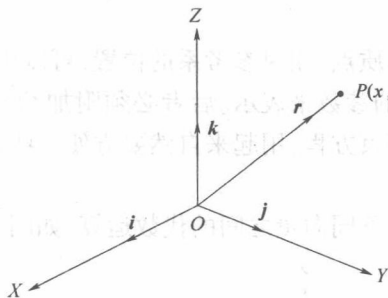


图 1-1

为了便于分析讨论,向量  $\mathbf{r}$  通常用它在坐标轴  $X, Y, Z$  上的投影  $(x, y, z)$  和沿  $X, Y, Z$  轴正方向上的单位向量  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  来表示,即

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (1.1)$$

式(1.1)为位置向量  $\mathbf{r}$  的单位向量表达式。

如果将表示  $\mathbf{r}$  的三个分量  $(x, y, z)$  排列成  $3 \times 1$  的列矩阵或转置矩阵,那么就得到位置向量  $\mathbf{r}$  的矩阵表达式:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [x \ y \ z]^T \quad (1.2)$$

等式右边的上标“T”表示矩阵的转置。

式(1.1)和式(1.2)虽然同样表示了  $P$  点在  $OXYZ$  坐标系中的相对位置,但二者在数

学上的意义是不相同的,它们分别服从向量运算和矩阵运算法则。

向量  $\boldsymbol{r}$  在三轴上的分量  $(x, y, z)$  可以用向量的模  $|\boldsymbol{r}| = r$  以及  $\boldsymbol{r}$  相对  $X, Y, Z$  三轴正方向的方向余弦  $\cos(\boldsymbol{r}, X), \cos(\boldsymbol{r}, Y), \cos(\boldsymbol{r}, Z)$  来表示,即

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(\boldsymbol{r}, X) \\ y &= r \cdot \cos(\boldsymbol{r}, Y) \\ z &= r \cdot \cos(\boldsymbol{r}, Z) \end{aligned} \quad (1.3)$$

式中,  $(\boldsymbol{r}, X), (\boldsymbol{r}, Y), (\boldsymbol{r}, Z)$  分别表示向量  $\boldsymbol{r}$  与  $X, Y, Z$  轴的夹角;  $r$  是向量  $\boldsymbol{r}$  的模,应满足:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (1.4)$$

从以上分析不难看出,  $P$  点在坐标系  $OXYZ$  中的相对位置,可以用式(1.1)或式(1.2)中的三个参数  $x, y, z$  来表示;也可以用式(1.3)中的四个参数  $r, \cos(\boldsymbol{r}, X), \cos(\boldsymbol{r}, Y), \cos(\boldsymbol{r}, Z)$  来表示。显然  $x, y, z$  是三个完全独立的参数,而后者有四个参数,其中有一个是不独立的,或者四个参数必然满足某个依从关系。这个依从关系,可将式(1.3)代入式(1.4)求得:

$$\cos^2(\boldsymbol{r}, X) + \cos^2(\boldsymbol{r}, Y) + \cos^2(\boldsymbol{r}, Z) = 1 \quad (1.5)$$

向量  $\boldsymbol{r}$  相对坐标系  $OXYZ$  的三个方向余弦的平方和等于1。即已知其中两个就可求出第三个方向余弦,三个方向余弦中只有两个是完全独立的。通常把式(1.5)称为参数之间的约束方程。

由此可见,一个空间的自由质点,相对参考系的位置,可以用三个独立的参数表示,也可以用多于三个的不完全独立的参数来表示。后者必须附加约束条件。对于前者,不但参数的数量少,而且没有附加的约束方程,用起来自然要方便一些,在分析力学中广为采用,称为系统的广义坐标。

下面讨论在同一参考系中,不同向量之间的代数运算,如图1-2所示。向量  $\boldsymbol{a}$  和  $\boldsymbol{b}$  在

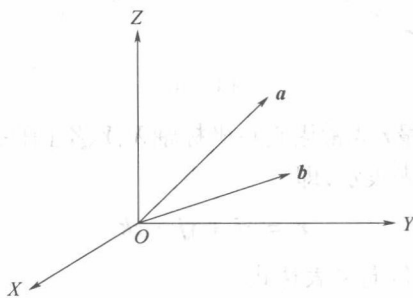


图1-2

坐标系中,用单位向量  $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$  分别表示为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{b} &= b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k} \end{aligned} \quad (1.6)$$

式中  $a_x, a_y, a_z; b_x, b_y, b_z$  分别是  $\boldsymbol{a}$  和  $\boldsymbol{b}$  在  $X, Y, Z$  轴上的投影分量。按向量代数运算法则,向量  $\boldsymbol{a}$  和  $\boldsymbol{b}$  之间可以进行向量的加减运算  $\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}$ 、向量的数量积运算  $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 、向量的向量积运算  $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ ,分别表示如下。

向量的加减运算:

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_x \pm b_x)\mathbf{i} + (a_y \pm b_y)\mathbf{j} + (a_z \pm b_z)\mathbf{k} \quad (1.6)$$

向量的数量积运算:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (1.7)$$

向量的向量积运算:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - b_x a_y)\mathbf{k} \quad (1.8)$$

如果将  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  表示成列矩阵形式:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$$

那么上述的各种运算应按矩阵的运算法则进行,分别表示如下:

向量的加减运算:

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

向量的数量积运算:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [a_x \quad a_y \quad a_z] \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (1.10)$$

即  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的数量积等于  $\mathbf{a}$  的转置矩阵与  $\mathbf{b}$  的列矩阵相乘,可简写为

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [\mathbf{a}]^T [\mathbf{b}] \quad (1.10')$$

向量的向量积运算:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

这里我们定义了一个新的矩阵,用  $\mathbf{A}$  表示:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

称矩阵  $A$  为向量  $a$  的反对称矩阵。这样向量  $a$  和  $b$  的向量积就可以表示为向量  $a$  的反对称矩阵  $A$  与向量  $b$  的列矩阵  $b$  的矩阵乘积。通常将式(1.11) 简写为

$$a \times b = Ab \quad (1.11')$$

这里要说明的是,任何一个向量都可以表示为列矩阵形式,因而相应的也有它的反对称矩阵,前者通常用小写字母表示;后者则用相应的大写字母表示。

例如单位向量  $i, j, k$  可表示成

$$i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

相应的反对称矩阵为

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; K = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

那么

$$i \cdot i = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$i \cdot j = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$i \times j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

下面举两个具体的例子。

**【例1】** 求定轴转动圆盘上一点  $P$  的速度  $v_P$ , 如图 1-3 所示。

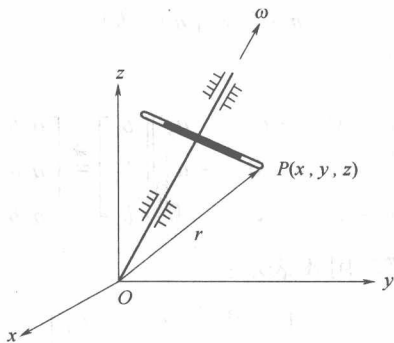


图 1-3



解:  $P$  点的位置用向量  $\mathbf{r}$  表示, 圆盘绕定轴转动的角速度用  $\boldsymbol{\omega}$  表示, 它们的列矩阵形式分别表示如下:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

式中,  $x, y, z$  和  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  分别为  $\mathbf{r}$  和  $\boldsymbol{\omega}$  在  $Oxyz$  轴上的投影分量,  $P$  点的速度  $\mathbf{v}_P$  可表示为

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

如果用反对称矩阵来表示, 那么有

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$$

式中,  $\boldsymbol{\Omega}$  为  $\boldsymbol{\omega}$  的反对称矩阵, 由式(1.12) 可得到

$$\mathbf{v}_P = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y\omega_z + z\omega_y \\ x\omega_z - z\omega_x \\ -x\omega_y + y\omega_x \end{bmatrix}$$

如果  $\boldsymbol{\omega}$  是沿  $z$  轴的特殊情况, 那么

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}; \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

相应的速度  $\mathbf{v}_P$  为

$$\mathbf{v}_P = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix}$$

【例2】 求重力  $P$  对单摆的支点  $O$  的力矩  $M_O$ , 如图 1-4 所示。

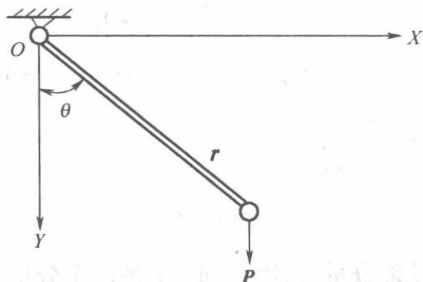


图 1-4

解: 重力  $P$  对  $O$  点之矩可以表示为

$$M_O = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$$

式中

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix}$$

利用式(1.12),得

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{P} = \mathbf{RP} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 0 & -r\sin\theta \\ -r\cos\theta & r\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Pr\sin\theta \end{bmatrix}$$

这个结果说明图示重力  $\mathbf{P}$  对  $O$  点之矩大小为  $Pr\sin\theta$ ,方向沿  $z$  轴的正方向。

上面我们讨论了在同一参数坐标系中向量与向量之间的代数运算。下面我们讨论向量在不同参数坐标系之间的转换关系,这一转换关系通常是通过方向余弦矩阵来完成的。

### 1.1.2 方向余弦矩阵

研究陀螺仪的运动时,常需要把一个坐标系各轴上的物理量如位移、角速度、角动量或外力矩变换到另一个坐标系上去,采用方向余弦表示两个坐标系的变换关系,在坐标系之间有多次转动的情况下,就显得十分方便。

如图 1-5 所示,位置向量  $\mathbf{r}$  在共原点  $O$  的两个参考坐标系  $OX_nY_nZ_n$  与  $OX_bY_bZ_b$  中,可分别表示为

$$\mathbf{r} = x_n \mathbf{i}_n + y_n \mathbf{j}_n + z_n \mathbf{k}_n$$

$$\mathbf{r} = x_b \mathbf{i}_b + y_b \mathbf{j}_b + z_b \mathbf{k}_b$$

式中,  $x_n, y_n, z_n$  和  $\mathbf{i}_n, \mathbf{j}_n, \mathbf{k}_n$  分别表示  $\mathbf{r}$  沿  $OX_nY_nZ_n$  坐标轴上的投影分量和相应的单位向量;  $x_b, y_b, z_b$  和  $\mathbf{i}_b, \mathbf{j}_b, \mathbf{k}_b$  分别表示  $\mathbf{r}$  沿  $OX_bY_bZ_b$  坐标轴上的投影分量和相应的单位向量。这些参数既然表示同一个向量  $\mathbf{r}$ ,那么它们之间必然有一定的转换关系,下面就来讨论这个问题。

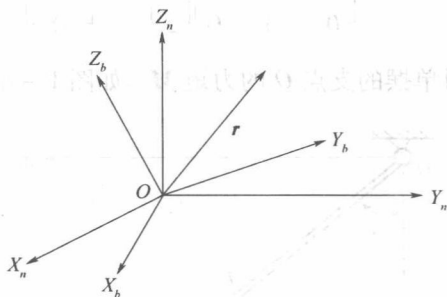


图 1-5

首先求  $\mathbf{r}$  在  $X_b$  轴上的投影分量  $x_b$ ,因为向量  $\mathbf{r}$  是三个分量  $x_n \mathbf{i}_n, y_n \mathbf{j}_n, z_n \mathbf{k}_n$  的向量和,即

$$\mathbf{r} = x_n \mathbf{i}_n + y_n \mathbf{j}_n + z_n \mathbf{k}_n$$

我们知道,向量在某轴上的投影等于其分量在同轴上的投影之和,那么  $x_b$  应是上述三个分量在  $X_b$  轴上投影分量的代数和,而这些分量在  $X_b$  轴上的投影又可用方向余弦的形式表示。

$x_b$  可以表示为

$$x_b = x_n \cos(X_b, X_n) + y_n \cos(X_b, Y_n) + z_n \cos(X_b, Z_n)$$

为了书写方便,用以下符号来表示方向余弦:

$$\cos(X_b, X_n) = C_{X_b X_n}$$

$$\cos(X_b, Y_n) = C_{X_b Y_n}$$

$$\cos(X_b, Z_n) = C_{X_b Z_n}$$

这样  $x_b$  可以写成:

$$x_b = x_n C_{X_b X_n} + y_n C_{X_b Y_n} + z_n C_{X_b Z_n} \quad (1.13)$$

同理得  $y_b, z_b$  的表达式如下:

$$y_b = x_n C_{Y_b X_n} + y_n C_{Y_b Y_n} + z_n C_{Y_b Z_n} \quad (1.14)$$

$$z_b = x_n C_{Z_b X_n} + y_n C_{Z_b Y_n} + z_n C_{Z_b Z_n} \quad (1.15)$$

上面的三式可用矩阵表示如下:

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{X_b X_n} & C_{X_b Y_n} & C_{X_b Z_n} \\ C_{Y_b X_n} & C_{Y_b Y_n} & C_{Y_b Z_n} \\ C_{Z_b X_n} & C_{Z_b Y_n} & C_{Z_b Z_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

这个矩阵表达式左边的列矩阵,其元素是向量  $r$  在  $OX_b Y_b Z_b$  坐标系中的投影分量,右边第一部分是以前  $OX_n Y_n Z_n$  与  $OX_b Y_b Z_b$  各坐标轴之间的九个方向余弦为元素的  $3 \times 3$  阶的矩阵。右边第二部分的列矩阵则是向量  $r$  在  $OX_n Y_n Z_n$  坐标系中的投影分量。如果用以下符号表示:

$$\mathbf{r}^b = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}^n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

$$\mathbf{C}_n^b = \begin{bmatrix} C_{X_b X_n} & C_{X_b Y_n} & C_{X_b Z_n} \\ C_{Y_b X_n} & C_{Y_b Y_n} & C_{Y_b Z_n} \\ C_{Z_b X_n} & C_{Z_b Y_n} & C_{Z_b Z_n} \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

那么式(1.16)可以简化表示为

$$\mathbf{r}^b = \mathbf{C}_n^b \mathbf{r}^n \quad (1.16')$$

由式(1.18)表示矩阵  $\mathbf{C}_n^b$  是由两个坐标轴之间的九个方向余弦组成,所以经常被称为方向余弦矩阵。而式(1.16)或式(1.16')则是通过方向余弦矩阵表示同一向量在两个不同参考坐标系投影分量之间的转换关系。

从上面的变换关系可以得到结论:向量  $r$  在坐标系  $OX_n Y_n Z_n$  中的坐标值  $(x_n, y_n, z_n)$  为列矩阵左乘以方向余弦矩阵,即得到的另一列矩阵,该列矩阵的诸元素,即为质点在坐标系