图书在版编目(CIP)数据

数学·科学与艺术/张顺燕编著. —北京：北京大学出版社，2014.7
（高等院校素质教育通选课教材）
ISBN 978-7-301-24365-7

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①数学史—高等学校—教材　Ⅳ.①O11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 124864 号

书　　　名：数学·科学与艺术
著作责任者：张顺燕　编著
责 任 编 辑：曾琬婷　潘丽娜
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-24365-7/O·0973
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　　址：http://www.pup.cn　　新浪官方微博：@北京大学出版社
电 子 信 箱：zpup@pup.cn
电　　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62767347　出版部 62754962
印　刷　者：北京飞达印刷有限责任公司
经　销　者：新华书店
787mm×980mm　16 开本　13.5 印张　300 千字　插页 12 页
2014 年 7 月第 1 版　2014 年 7 月第 1 次印刷
定　　　价：38.00 元

概念的抽象性还不足以说尽数学抽象的特点.数学抽象的特点在于:第一,在数学的抽象中只保留量的关系和空间形式而舍弃了其他一切;第二,数学的抽象是一级一级逐步提高的,它们所达到的抽象程度大大超过了其他学科中的一般抽象;第三,数学本身几乎完全周旋于抽象概念和它们的相互关系的圈子之中.如果自然科学家为了证明自己的论断常常求助于实验,那么数学家证明定理只需用推理和计算.这就是说,不仅数学的概念是抽象的、思辨的,而且数学的方法也是抽象的、思辨的.

数学的抽象性帮助我们抓住事物的共性和本质.维纳(N. Wiener, 1894—1964)说:"数学让人们抓住本质而忽略非本质的东西.数学也容许人们在不同的领域提出相同的问题,而不必囿于某一特定专业领域.对那些视野开阔、敏感严谨的数学家而言,数学无疑是发现和发明的工具."

抽象的点只有位置,没有大小;抽象的线只有长度,没有宽度.不管我们多么小心地使用圆规,我们也画不出理想的圆.但是,这并不影响我们对数学进行的研究,我们正是利用粗糙图形进行精确推理的.在这个意义上:

数学是用粗糙图形进行精确推理的艺术.

关于抽象的作用,数学家辛富(J. Singh)说:"数学之所以能够以令人吃惊的程度深入到科学和技术的每一个分支中去,其原因在于数学的思想是纯粹抽象的,而抽象化正是科学和技术的主要动力.数学越是远离现实(即走向抽象),它就越靠近现实.因为不管它显得多么抽象,它归根到底还是从某些现实范围中抽象出来的,一定的本质特征的具体表现."

数学的抽象性帮助我们抓住事物的共性和本质.正是数学的抽象性使得数学能够处理种类众多的问题,如空间的和运动的,机会的和概率的,艺术的和文学的,音乐的和建筑的,战争的和政治的,食物的和医药的,遗传的和继承的,人类思维的和电脑的,等等.

抽象的另一个作用是不断地对日益扩大的数学知识总体进行简化和统一化.

数学的精确性表现在数学定义的准确性、推理和计算的逻辑严格性和数学结论的确定无疑与无可争辩性.当然,数学的严格性不是绝对的、一成不变的,而是相对的、发展着的,这正体现了人类认识逐渐深化的过程.

数学中的严谨推理和一丝不苟的计算,使得每一个数学结论都是牢固的、不可动摇的.这种思想方法不仅培养了科学家,而且它也有助于提高人的科学文化素质,它是全人类共同的精神财富.

爱因斯坦说:"为什么数学比其他一切科学受到特殊的尊重?一个理由是,它的命题是绝对可靠的和无可争辩的,而其他一切科学的命题在某种程度上都是可争辩的,并且经常处于被新发现的事物推翻的危险之中……数学之所以有高声誉,还有一个理由,那就是数学给精密自然科学以某种程度的可靠性,没有数学,这些科学是达不到这种可靠性的."

希腊人对人类文明的贡献是什么呢?

一种精神——理性精神.希腊人敢于正视自然.他们摒弃了传统观念、愚昧和迷信,对自然采取了一种全新的态度.这种态度是理性的、批判的和反宗教的.他们深信,自然界是按理性设计的.这种设计虽然不为人的行为所影响,但却能被人的思维所理解.

一种信念——万物皆数也.宇宙是以数学方式设计的,借助数学知识人类可以充分地认识它.这是一个极为大胆的猜测,是一个宏伟的、影响极为深远的猜测.

取得可理解的规律的决定性的一步是数学知识的应用.希腊人言中了后来被证实两条极为重要的信条:第一,自然界是按照数学原理构成的;第二,数学关系决定、统一并显示了自然的秩序.

一个样板——欧几里得几何学.它为人类的科学推理作出了示范,告诉人们,如何以简驭繁、由易到难,一门科学的理论该如何整理.

此后,理性精神就成为人类探索宇宙奥秘的精神支柱,成为人类抗争宗教、迷信的强大动力和源泉.在理性精神的支撑和鼓舞下,人们开始以数学为工具来探索我们生存的世界.

§2 希腊人的哲学观及其影响

1. 数学的真理性

数学是否具有真理性?这种真理性能否被认识?对于这两个问题,希腊人的回答是肯定的.他们的真理观是:数学定理就是客观真理.特别地,欧氏空间就是我们生存的物理空间,欧氏几何的定理就是关于我们生存空间的真理.

这种真理观几乎为当时和其后的所有哲学家、数学家和科学家所接受,并为那个时代的所有理智的人所接受.这种真理观持续了两千多年,直到19世纪上半叶才被动摇.

2. 柏拉图与亚里士多德

我们先看拉斐尔(Raffaello, 1483—1520)的名画《雅典学院》(彩图1).这幅画寓意深刻,它是古希腊"哲学殿堂"的思想体现.殿堂中心的两个人物是柏拉图和亚里士多德.柏拉图左臂的腋下夹着《蒂迈乌斯篇》,而右手的食指指天.正如安·夏泰尔指出的:"柏拉图的手指表明了最终的方向:从数学到音乐,从音乐到宇宙的和谐,再从宇宙的和谐到理念的神圣秩序."而亚里士多德一手拿着《逻辑学》,另一只手指向人间.

"万物皆数也"的思想是公元前6世纪,希腊哲学家毕达哥拉斯(Pythagoras,公元前

4. 阿基米德的数学成就

阿基米德大约于公元前 287 年出生在西西里岛的叙拉古，叙拉古是当时希腊的一个殖民城市．公元前 212 年罗马人攻陷叙拉古时，阿基米德被害．城被攻破时，他正在潜心研究画在沙盘上的图形．一个刚攻进城的罗马士兵向他跑来，身影落在沙盘里的图形上，他挥手让士兵离开，以免弄乱了他的图形，结果那士兵就用长矛把他刺死了．阿基米德的死象征一个时代的结束，代之而起的是罗马文明．

阿基米德的著作极为丰富，但大多类似于当今杂志上的论文，写得完整、简练．有十部著作流传至今，有迹象表明他的另一些著作失传了．现存的这些著作都是杰作，计算技巧高超，证明严格，并表现了高度的创造性．在这些著作中，他对数学作出的最引人注目的贡献是，**积分方法的早期发展**．


阿基米德

阿基米德的著作涉及数学、力学和天文学等，其中流传于世的有：《圆的度量》，《论球和圆柱》，《论板的平衡》，《论劈锥曲面体和球体》，《论浮体》，《数砂数》，《牛群问题》，《抛物线的求积》，《螺线》，《方法》等．

阿基米德的著作是希腊数学的顶峰．

5. 三角术的创立

亚历山大时期在希腊的定量几何学中产生了一门全新的学科，就是三角术．这是由于人们想建立定量的天文学的需要而产生的．其主要奠基人是黑帕库斯、梅内劳斯（Menelaus）和托勒密．他们的三角术是球面三角，但也包含了平面三角的基本内容．黑帕库斯生于小亚细亚，活跃于公元前 140 年前后．他的许多重要著作已经失传，他编制的第一个“正弦表”，被托勒密记录了下来．约公元 100 年，住在亚历山大的梅内劳斯写过一部三卷的重要著作《球面学》，这部著作在三角学的发展上起了重要的作用．在大约公元 150 年前后，托勒密继承和发展了黑帕库斯和梅内劳斯在三角学和天文学方面的工作，写出了具有深远影响的著作《数学汇编》．他完成了系统的三角学，第一次系统地编制了可用的三角函数表．三角函数表的编制是数学史上的一大里程碑，因为没有三角函数表，实用三角学是不会取得重大进展的．

识固然受到了古希腊、古罗马透视方面的著作的影响而得以强化，但更主要的是受到了描述真实世界这一渴望的刺激．从根本上讲，把握空间结构，发现自然界的奥秘，乃是文艺复兴时期哲学的一种信念，而数学是探索自然界的最有效的方法，终极真理的表达方式就是数学形式．

绘画科学是由布鲁内莱斯基(Brunelleschi，1377—1446)创立的，他建立了一个透视体系．第一个将透视画法系统化的是阿尔贝蒂(L. B. Alberti，1404—1472)．他的《绘画》一书于1435年出版．在这本论著中他指出，做一个合格的画家首先要精通几何学．他认为，借助数学的帮助，自然界将变得更加迷人．阿尔贝蒂的重要功绩是，他抓住了透视学的关键，即“没影点”的存在．他大量地应用了欧几里得几何学的原理，以帮助后世的艺术家掌握这一技术．

最重要的透视学家碰巧也是15世纪最重要的数学家之一，他是弗朗西斯卡(P. Francesca，约1416—1492)．在《绘画透视论》一书中，他极大地丰富了阿尔贝蒂的学说．在他后半生的二十年内写了三篇论文，试图证明，利用透视学和立体几何原理，从数学中可以推出可见的现实世界．

自乔多开始，经阿尔贝蒂和其他艺术家归纳和提高而得到的透视原理，是艺术史上的里程碑．艺术家本着一个静止点画画，便能把几何学上的三维空间以适当的比例安排到画面上．透视的意思是“清楚透彻地看”，它给艺术带来了一个新的维度．将景物按照透视原理投射到二维平面上，这就使平面变成了一扇开向想象中的立体视界的窗户．对海员航海而言，最重要的水平线从此成了美术上最重要的定向线，美术从取材到结构都面向了真正的世界．

对此，埃文思(W. Ivins)在著作《美术与几何学》一书中这样评述：

透视原理与近大远小有很大不同．从技术角度来说，透视是将三维空间以中心投射的方式放入平面．用非技术性的词语来解释，透视则是使放在平面上的各个图形，同它们所代表的种种实际物体彼此之间相对而言在大小、形状和位置上从真实的空间中的某一点看上去能够一模一样的方法．我未曾发现古希腊人何时曾在实践中或在理论上提到过上述概念……这是个不曾为古希腊人掌握的概念．这个原理在被阿尔贝蒂提出时，人们对几何学是如此无知，以至于他不得不对“直径”和“垂直”两个名词作出解释．

鲁塞尔认为这一发现十分重要：

透视原理把唯一一个视点作为第一要素，这便使视觉体验建立在稳定的基础上．于是，它在混沌中创立了秩序，使相互参照实现了精密化和系统化．很快地，透视原理便成了一致和稳定的试金石．

对透视学作出最大贡献的是艺术家列奥纳多·达·芬奇(彩图7)，他是意大利文艺

复兴时期著名的画家、雕塑家、建筑家和工程师.他认为视觉是人类最高级的感觉器官,它直接而准确地表达了感觉经验.他指出,人观察到的每一种自然现象都是知识的对象.他用艺术家的眼光去观察和接近自然,用科学家孜孜不倦的精神去探索和研究自然.他深邃的哲理和严密的逻辑使他在艺术和科学上都达到了顶峰.

达·芬奇通过广泛而深入地研究解剖学、透视学、几何学、物理学和化学,为从事绘画作好了充分的准备.他对待透视学的态度可以在他的艺术哲学中看出来.他用一句话概括了他的《艺术专论》的思想:

欣赏我的作品的人,没有一个不是数学家.

达·芬奇坚持认为,绘画的目的是再现自然界,而绘画的价值就在于精确地再现.因此,绘画是一门科学,和其他科学一样,其基础是数学.他指出:

"任何人类的探究活动也不能成为科学,除非这种活动通过数学的表达方式和经过数学证明为自己开辟道路."

5. 艺术家丢勒

15世纪和16世纪早期,几乎所有的绘画大师都试图将绘画中的数学原理与数学和谐、实用透视学的特殊性质和主要目的结合起来.米开朗基罗、拉斐尔以及其他许多艺术家都对数学有浓厚的兴趣,而且力图将数学应用于艺术.他们利用高超而惊人的技巧、缩距法精心创作了难度极大、风格迥异的艺术品.他们有时将技法的处理置于情感之上.这些大师们意识到,艺术创作尽管利用的是独特的想象,但也应受到规律的约束.

在透视学方面最有影响的艺术家是丢勒(A. Durer, 1471—1528)(彩图8).他是文艺复兴时期德国最重要的油画家、板画家、装饰设计家和理论家.同达·芬奇一样,他具有多方面的才能.他的人文主义思想使他的艺术具有知识和理性的特点.他从意大利的大师们那里学到了透视学原理,然后回到德国继续进行研究.他认为,创作一幅画不应该信手涂抹,而应该根据数学原理构图.他说:

"大多数艺术家都不重视几何学,而没有它,任何人都不可能变成一个纯粹的艺术家."

实际上,文艺复兴时期的画家们并没有能完全自觉地应用透视学原理.

下面,我们通过阿尔贝蒂、达·芬奇和丢勒的术语对艺术家们所发展的数学体系作一解释.他们将画布想象为一玻璃屏板,艺术家们通过它看到所要画的景物,如同我们透过窗户看到户外的景物一样.从一只固定不变的眼睛出发,设想目光可以投射到景物的每一个点上.这种目光称为投射线.投射线与玻璃屏板交点的集合称为一个截景.截景给眼睛的印象与景物自身产生的效果一样.实际上,一幅画就是投影线的一个截景.

就,是他花费了四年心血的旷世杰作.蒙娜丽莎是佛罗伦萨商人 F.吉奥孔达的第二个妻子,时年 24 岁.其作品的技巧娴熟卓越.优美的姿态、令人赞叹的肌肤、野趣横生的风景,处处显示了达·芬奇的艺术造诣已臻于至善.光线使面部富于质感,色彩渐次融合,这就是达·芬奇出色的晕涂法.他自己形容为"如同烟雾般,无需线条和界限".《蒙娜丽莎》收藏在法国的罗浮宫.目前保存状况不佳,而且很难修复.今天,《蒙娜丽莎》还在防弹玻璃后面供人欣赏.

《最后的晚餐》(彩图 14)描绘出了真情实感,一眼看去,与真实生活一样.观众似乎觉得达·芬奇就在画中的房子里.墙、楼板和天花板上后退的光线不仅清晰地衬托出了景深,而且经仔细选择的光线集中在基督头上,从而使人们将注意力集中于基督,这使得作品的真实感和宗教画所必有的神圣感都在其中得到最好的体现.这幅画可谓艺术中的珍品,而他的局部谋篇是成功的最大原因之一.12 个门徒分成 4 组,每组 3 人,对称地分布在基督的两边.基督本人被画成一个等边三角形,这样的描绘目的在于,表达基督的情感和思考,并且身体处于一种平衡状态(图 4-9).

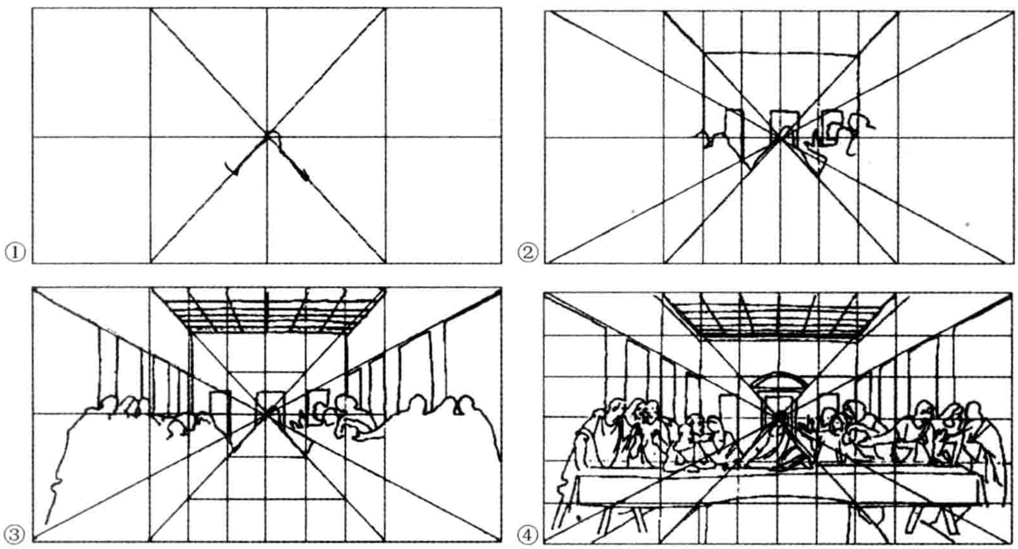

图 4-9

善于描绘女性美的拉斐尔 拉斐尔的最大特点就是善于吸取前辈优秀成果,并能真正领会,然后融汇一体,形成自己独特的优雅、细腻的画风.他的艺术以和谐明朗的构图和

概念.这是人类在数学上认识与使用无限的第一步.微积分的诞生使人类开始了系统地使用无穷大和无穷小的概念.这是人类认识与理解无限的第二阶段.人们虽然使用无穷大和无穷小的概念,但对它并不理解.所以,当人们开始研究无穷级数的时候,悖论就大大增多起来.直到实数理论建立之后,人们对无限认识的第二阶段才告完成.这时人们才掌握了利用有限刻画无限的手段,解决了在微积分诞生后出现的关于无限的悖论.对无限认识的第三个阶段是德国数学家康托(G. Cantor, 1845—1918)的集合论.

康托

是奇特,还是矛盾? 在研究无限时,常识是一个蹩脚的向导.一位不知名的中学生说:"无穷大是这样一个地方,不可能发生的事在这里会发生."希腊的普罗克洛斯曾注意到,圆的每一条直径都把圆分成两个半圆,直径有无限多个,半圆也有无限多个,而后者是前者的两倍.这一结论不是与人们的直觉相违背吗?

中世纪的一些哲学家注意到,把两个同心圆的点用公共半径连起来,就在两个圆上的点之间建立了一一对应(图5-3),从而可以认为,两个圆含有相同多的点.可是这两个圆周的周长不相等呀.

无限的概念虽然在古希腊已经受到数学家的重视,但是对无限集合的计数要晚到19世纪后半叶.

最早对这一问题进行研究的是伽利略.他建立了全体自然数的集合与全体自然数平方的集合的一一对应.虽然他没有做进一步的研究,但是他提供的思想却是重要的.首先,他给出了研究无限集合的工具——一一对应;其次,在无限集合中,整体可能等于部分.

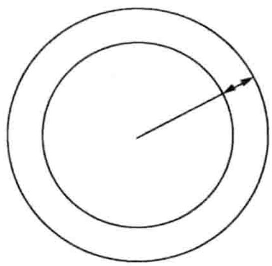

图 5-3

"整体大于部分"是欧几里得最基础的公理,没有人怀疑这条公理.但是,要对无穷集合进行记数必须超越这条公理.因为如果我们在无限的研究中继续使用这条公理,将不可避免地引出逻辑矛盾.这条公理的反面说法是:"整体与部分相等".这种说法把有限集合与无限集合区分了开来.

康托对无穷集合的计数作出卓越的贡献.他借助一一对应的概念来计数无限集合,从而引出了超限数的重要理论.这在数学史上是一个重要的里程碑.

达到；另一方面，给代数的语言以几何的解释，可以直观地掌握这些代数语言的意义. 拉格朗日说过：

“只要代数和几何分道扬镳，它们的进展就缓慢，它们的应用就狭窄. 但是当这两门科学结合成伴侣时，它们就互相吸取新鲜的活力，从那以后，就以快速的步伐走向完善.”

解析几何的诞生使代数和几何融合为一体，实现了几何图形的数字化，是信息化、数字化时代的先声.

代数的几何化和几何的代数化，使人们摆脱了现实的束缚. 它带来了认识新空间的需要，帮助人们从现实空间进入虚拟空间：从三维空间进入更高维的空间.

解析几何中的代数语言具有意想不到的作用，因为它不需要从几何考虑也行. 考虑方程

$$x^2+y^2=25.$$

我们知道，它是一个圆. 圆的完美形状，对称性、无终点等都存在在哪里呢？在方程之中！例如，在几何上，(x,y)与$(x,-y)$，$(-x,y)$，$(-x,-y)$对称，现在表现为它们都满足同一个方程. 代数取代了几何，思想取代了眼睛！在这个代数方程的性质中，我们能够找出几何中圆的所有性质. 这个事实使得数学家们通过几何图形的代数表示，能够探索出更深层次的概念，那就是四维几何. 我们为什么不能考虑方程

$$x^2+y^2+z^2+w^2=25$$

以及形如

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=25$$

的方程呢？这是一个伟大的进步. 仅仅靠类比，就从三维空间进入高维空间，从有形进入无形，从现实世界走向虚拟世界. 这是何等奇妙的事情啊！用宋代著名哲学家程颢的诗句可以准确地描述这一过程：

道通天地有形外，思入风云变态中.

事实上，19 世纪黎曼就把几何学从二维和三维空间推广到更高维的空间. 黎曼证明了二维和三维空间的许多性质可以直接转移到高维空间. 然而，黎曼考虑的所有空间都是有限维的，即表示空间维数的数字可能很大，但却是一个有限值. 到 20 世纪，当一些数学家研究无限维空间时，限于有限维的条件就被超越了.

目前无限维空间的论证成为数学的一大分支——泛函分析，它产生于人们理解函数集的需要. 这门学科由德国数学家希尔伯特所开创. 现在许多最普遍的无限维空间都归于希尔伯特空间. 无限维解析几何有重要的实际应用，在现代物理学中占有基本的地位.

解析几何的出现，使高次曲线和高次曲面的研究成为必然. 这样，代数几何就出现了. 代数几何可以认为是数学的这样一个领域，它研究在笛卡儿坐标系里由代数方程表示的

成理所当然的.他没有找到困难的真正症结：极限运算需要一个封闭域，而且每一件事的下面都存在着实数系的更深刻的性质.这使我们越来越明白，在为分析建立一个完善的基础方面，还需要再深挖一步.

这个任务落在了魏尔斯特拉斯身上.魏尔斯特拉斯提出一个规划：

(1) 逻辑地构造实数系；

(2) 从实数系出发去定义极限概念、连续性、可微性、收敛和发散.

这个规划称为分析的算术化.任务是繁重而困难的，但在接近19世纪末的时候，这个规划终于完成了.魏尔斯特拉斯的努力终于使分析从完全依靠运动学、直觉理解和几何概念中解放了出来.

魏尔斯特拉斯规划的第二部分是由引进精确的“ε-δ”语言而完成的.这一语言给出极限的准确描述，消除了历史上各种模糊的用语，诸如“最终比”、“无限趋近于”等等.这样一来，分析中的所有基本概念都可以通过实数及它们的基本运算和关系精确地表述出来.

总之，第二次数学危机的核心是微积分的基础不稳固.柯西的贡献在于，将微积分建立在极限论的基础上.遗留的问题是：任何实数列的极限存在吗？魏尔斯特拉斯的贡献在于，先逻辑地构造实数系.因而，建立分析基础的逻辑顺序是：

实数系—极限论—微积分.

关于魏尔斯特拉斯对数学分析的卓越贡献，希尔伯特这样评论道：

“魏尔斯特拉斯运用他鞭辟入里的批判给数学分析奠定了牢固的基础.他通过阐明许多概念，特别是极小、函数和微商的概念，消除了那时依然存在于微积分中的种种缺点，使微积分摆脱了有关无穷小的一切混乱概念，从而解决了由无穷小概念所产生的各种困难.如果今天在分析中对于运用以无理数和极限的概念为基础的演绎法有完全一致的意见和确信无疑的看法，并且如果甚至在有关微分方程和积分方程的最复杂的问题中，尽管用了不同种类极限的最巧妙和多样的组合，对所得结果还是能够一致同意，那么这种令人愉快的事态主要是由于魏尔斯特拉斯的科学工作.”

魏尔斯特拉斯规划的成功产生了深远的影响.这主要表现在以下几点：

(1) 既然分析能从实数系导出，所以，如果实数系是相容的，那么全部分析是相容的.

(2) 欧氏几何通过笛卡儿坐标系也能奠基于实数系上.所以，如果实数系是相容的，那么欧氏几何是相容的，几何学的其他分支也是相容的.

(3) 实数系可用来解释代数的许多分支，所以许多代数的相容性也依赖于实数系的相容性.

由此得到，如果实数系是相容的，那么大部分数学是相容的.

$$x^3+px+q=0$$

的任何三次代数方程的解法.

米兰的数学和物理教授卡尔达诺(G. Cardano, 1501—1576)在得知塔尔塔利亚的发明后,就要求塔尔塔利亚将秘诀告诉他,并立下誓言永不泄露.可是他没有遵守诺言,1545年出版《大术》(*Ars Magna*)一书,将一元三次代数方程的解法公之于世.这激怒了塔尔塔利亚,导致一场争吵,结果不欢而散.

一元三次代数方程的解的公式虽然应该叫做塔尔塔利亚公式,但直到现在为止,仍然叫做卡尔达诺公式.

一元三次代数方程解出之后,一元四次代数方程很快就被费拉里(L. Ferrari, 1522—1565)解出.一元三次代数方程和一元四次代数方程的解出具有重大意义,文艺复兴时代的数学第一次超过了古代的成就.这就鼓舞了后面的数学家用根式解五次以上的代数方程.

2. 代数基本定理

到16世纪,人们已经知道,一元一次代数方程有一个根,一元二次代数方程有两个根,一元三次代数方程有三个根,一元四次代数方程有四个根.这样就自然地产生了一个问题:一元 n 次代数方程有 n 个根吗?数学史上第一位考虑这一问题的数学家是吉拉尔,他猜想每个一元 n 次代数方程都有 n 个根.花拉子米和韦达都不可能有这一论断,因为他们认为,只有正根才是合理的.这个极具洞察力的猜想就是代数基本定理.

代数基本定理是整个数学中最重要的定理之一.

代数基本定理 任何一元 n 次代数方程

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \tag{10.1}$$

在复数域里有 n 个根,其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是复数.

有了代数基本定理,我们就可断言,一元 n 次多项式 $f(x)$ 可以分解为一次因子的连乘积,即

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n), \tag{10.2}$$

这里 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为实数或复数,它们都是方程(10.1)的根.这样,方程的根的个数与方程的次数联系起来了.

代数基本定理的意义表现在以下三方面:

(1) 复数域包含了复系数代数方程的所有解;

(2) 任何多项式都能在复数域中分解为一次因子的连乘积;

(3) 方程的次数就是方程的根数(包括重根的个数).

伽罗瓦

的 n 个根 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 作为一个整体来考察，并研究根的置换群.

把方程(10.14)的系数看做给定的数值，例如一些复数. 对方程的系数做有限次加、减、乘、除可能得到的一切数的集合称为方程的**基本域**.

例如，若方程的系数是有理数，那么方程的基本域就是有理数域. 若方程是

$$x^2+\sqrt{2}=0,$$

那么它的基本域由一切形如 $a+b\sqrt{2}$ 的数组成，其中 a,b 是有理数.

由方程(10.14)的根 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 经过有限次加、减、乘、除可能得到的一切数的集合称为方程的**分裂域**.

根据韦达定理，方程的系数可以由它的根通过加、乘运算而得到，所以方程的分裂域永远包含它的基本域. 有时两个域是重合的.

定义 4 分裂域到自身的一个一一映射 A，叫做**分裂域关于基本域的自同构**，如果对于分裂域的每一对元素，它们的和映射到和，积映射到积，并且基本域的每一个元素映射到自身.

设 P 是方程(10.14)的基本域，K 是方程(10.14)的分裂域，则上面的定义可用公式表示：

$$(a+b)A=aA+bA,\quad (ab)A=(aA)(bA),\quad \alpha A=\alpha,$$

其中 $a,b\in K,\alpha\in P$.

同时，不难看出，$0A=0$.

分裂域关于基本域的所有自同构的集合构成一个群，这个群叫做给定方程的**伽罗瓦群**.

首先，我们要注意到，**伽罗瓦群中的自同构将给定方程的根仍然映射到这个方程的根**. 事实上，如果 r 是方程(10.1)的一个根，那么对方程的两端作用自同构 A，我们得到

$$(rA)^n+a_1A(rA)^{n-1}+\cdots+a_nA=0A.$$

因为 $a_iA=a_i,0A=0$，所以

$$(rA)^n+a_1(rA)^{n-1}+\cdots+a_n=0,$$

即 rA 是方程的根. 这就是我们要证的.

由此我们看到，每一个分裂域关于基本域的自同构都导出方程根的集合的一个确