素数幻方

張道鑫著

12阶三次幻方

高治源　潘凤雏

18	6	34	65	105	53	92	40	80	111	139	127
17	20	63	94	31	120	25	114	51	82	125	128
79	41	22	144	33	83	62	112	1	123	104	66
19	86	76	23	142	78	67	3	122	69	59	126
46	91	117	13	68	134	11	77	132	28	54	99
102	49	8	71	106	133	12	39	74	137	96	43
129	116	98	87	84	7	138	61	58	47	29	16
52	115	119	136	45	38	107	100	9	26	30	93
131	48	141	70	35	88	57	110	75	4	97	14
113	121	64	72	2	36	109	143	73	81	24	32
108	42	101	5	124	85	60	21	140	44	103	37
56	135	27	90	95	15	130	50	55	118	10	89

$S_{12}^{3} = 9082800$

中国幻方研究者协会主编

香港天马图书有限公司

封面设计：曹　陵

多情梦寐　九宫山上观风景　这边独好

有意幻方　八卦阵中论春秋　其乐无穷

ISBN 962-450-640-X

9 789624 506402

编 著 者：张道鑫
出　　版：天马图书有限公司
　　　　　香港上水新成路 123 号 3 楼
电　　话：（852）—26706633
传　　真：（852）—26701382
印　　刷：芜湖市丽士电脑公司
出版时间：2003 年 6 月 15 日
印　　数：1000 册

国际书号：ISBN 962—450—640—X/D. 42673

定价：8. 00 元

序　言

在自然数的海洋中，飘浮着一些特别的岛屿名叫素数！在幻方的辽阔大地上，有许多神奇的山峰称作素数幻方！

素数的分布实在太散漫了，一批数学大师们投入了他们的全部精力和智慧，也难以把握。有关素数的哥德巴赫猜想，被称之为数学皇冠上的明珠，至今仍未被人们摘取。但我们的幻方爱好者，却离开平原去攀登山峰，用杂乱多变的素数来构造均衡对称的幻方，在崎岖的山峦间寻觅。走在最高处、拥有最多发现的捷足者就是湖北天门的张道鑫先生。

张道鑫先生，一个农机工作者，长期从事行政、技术管理，退休闲暇之后，他与幻方结缘，并痴迷其中。他先运用层层相叠的拉丁方构造成方方正正的立体幻方，并有所收获。当听说素数幻方山峰中的奇闻后，便快步奔向“珠穆朗玛峰”而去。辛劳不负有心人，从三阶、四阶，到五阶、六阶，最后来到十层 21 阶和十一层 22 阶“金字塔”幻方脚下。他发现了各种各样的神奇岩洞，姿态万千的岩石崖壁，置身在如此美妙的素数幻方的陡峭山峰间，他兴奋异常、留连忘返。从冰山雪窟中，他找到了幻方三枝连；在对峙巨石间，他发现孪生素数幻方；步入神秘的岩洞，他体会到“洞中有洞”的嵌套幻方；漫游云雾飘浮的山谷，他想像出去首掉尾的“怪物”幻方。饱览如此壮丽的神奇景色，他笑了；获得那么众多的珍奇异宝，他满足了。最后，在高高的峰巅上，他盘桓凝思、为设计两座金字塔幻方而思考。当有朝一日这个新的风景点出现在我们眼前时，我们也就看到了一位传奇式的登山老人用他的聪明才智立下的幻方丰碑。

愿张道鑫先生的这本《素数幻方》成为幻方爱好者乐于浏览的风景线。

高　治　源
于延安宝塔山上
2002 年 2 月 8 日

《素数幻方》与《幻方再论》同时开印，下一本－《袖珍型最佳幻方小辞典》将于 2003 年 11 月 3 日印成，欢迎朋友们提供素材。

资料请寄芜湖市安师大凤凰山 37－36。电子信箱：g2358@mail.wh.ah163.net

2003 年 5 月 16 日

羊　年　致　辞

过去的一年是万马奔腾的一年，在我的经历中，一批事情值得留下文字。其一。我们发现了《魔环》，它是一门新的学科、是组合数学的又一分支。它的问世，将会引出深远的社会影响。发现它的是三位数学爱好者：昆明理工大学杨高石，孝感工业学校曹陵与我。其二.《有趣的魔环》与《幼儿启蒙探讨》两书已经印成，这就为推动魔环游戏的开展准备了条件。其三。“神童”杨弋、第一位学会《幻方》的小朋友、安师大附中一年级 10 班，他是马年小学升初中的“状元”。在这年 11 月份第八届全国计算机分区联赛普及组中以满分的成绩获全国一等奖；其四、安师大幼儿园大 2 班的寇明阳登上了历史舞台，他的加减乘除运算已经过关，是第一位研究《魔环》的小朋友。我正在为他加工，我们的王绎皓伴读，王绎皓，中 4 班。伏龙、凤雏得一而安天下。兼有《魔环》与《幻方》的寇明阳将会创下更加出色的成绩。寇明阳的出现，使我得出了一个我也惊讶的判断：在幼儿园阶段，完成加减乘除综合运算的训练是可能的。我正在请王绎皓帮忙，如果在一年半的时间内她能完成这套训练，那就意味着，我们的这套设计具有普遍的意义。其五。安徽师范大学教育技术系 2000 级杨富宝同学的出现，促成了《素数表－100 万之内》的问世，为素数幻方的研究提供了条件。其六、睢宁蔡宜文先生登台，他在马年的 2 月 15 日到 12 月初 6 日，连过十一关，以惊人的速度创下了一大批新的连续素数幻方记录，这就是 11 阶、16 阶、20 阶、24 阶、28 阶、30 阶、32 阶。36 阶、38 阶、42 阶、54 阶。其七、孝感工业学校曹陵于 2002 年 5 月 4 日，给出了当 N 阶为素数时，对角线的“高优”5 次与 4 次同生共存的理论探讨，并于 2002 年 12 月 8 日给出了 47 阶以下的全部素数阶“高优”，这意味着“高优”的实践已经完成。时不几天，12 月 17 日得到了 16、20 阶“高优”与 19 阶“极优”。又不几天，12 月 23 日得到了 25、49 阶“高优”，这是 $(2M+1)^2$ 阶家族派来的代表，这就使“特优完美幻方”的内容更加充实。

两本新书将在羊年亮相。一本是《素数幻方》，一本是《幻方再论》。《素数幻方》，张道鑫编，《幻方再论》，曹陵编。

张道鑫，长期从事行政、技术管理的农机工作者，他为素数研究给出了一整套绝妙的设计，他的《素数幻方》是一只会下“金蛋”的鸡，第一批“金蛋”就是蔡宜文先生的一大批《连续素数幻方》，这批幻方的发表，使《素数幻方》一书更放光彩。

曹陵，祖籍湖北应山，生于南京，长在溧水，孝感工业学校教师，在特优完美幻方理论的研究上取得了重要突破。他的《幻方再论》是幻方编制方法的一套系统总结，将对推动幻方研究产生深远的影响。

马年为我们推动《魔环》与《幻方》知识的普及提供了绝好的条件，这两本新书的发表，将有助于一个可喜局面的形成：羊年吉祥，喜气洋洋。

王　忠　汉
马　年　除　夕

前　言

笔者在拜读高源先生的《奇妙的幻方》时，深受“这两个素数幻方真是天造地设般的奇迹，它们的诞生实在来之不易”的启发和激励，蒙发我一种去“数海拾贝”的好奇心理，将久已迷恋的幻立方研究束之高阁，同许多默默奉献的幻方研究者一样，历经艰难曲折，终于在那万紫千红、耀眼夺目的无数宝贝中，拾得几枚自我喜爱的珍品。

幻方的趣味性和奇特性，吸引了世代千万个爱好者。他们忘寝废食、呕心沥血，在那五彩缤纷、深奥难测的幻方世界里，缔结了美妙珍奇的丰硕成果。古今研究者们的这种拼搏和奉献精神，深深地打动了我。笔者是农机工作者，从事行政技术管理，对幻方一无所知。进入退休赋闲之后，却与幻方结下了不解之缘，可谓矢志不移，痴迷不已。

多情梦寐　九宫山上观风景　这边独好

有意幻方　八卦阵中论春秋　其乐无穷

近几年，在高治源教授的亲切关怀下，在王忠汉、施学良、汪咬元、毛经中老师们的具体帮助下，在丁宝训、陈皓、林正禄、孙友、丁望新、胡银美、李抗强、许仲义、曹陵、张荣斌、刘志雄等同志们的热情鼓舞下，这本《素数幻方》终于同大家见面了，特表示衷心的感谢！

在编写素数幻方时，本着既要积极参与，又要尽量节省的意图，文字记述较少，图样制作偏多；只作简要陈述，未予理论证明；亦未深入探讨其变异性质，更未发掘其内在的数理关系及应用价值；凡此不足及谬误之处，敬请广大幻方爱好者及数学专家们不吝赐教。

张　道　鑫

2002 年 5 月 5 日

目　　录

序　　言

在自然数的海洋中，飘浮着一些特别的岛屿名叫素数！在幻方的辽阔大地上，有许多神奇的山峰称作素数幻方！

素数的分布实在太散漫了，一批数学大师们投入了他们的全部精力和智慧，也难以把握。有关素数的哥德巴赫猜想，被称之为数学皇冠上的明珠，至今仍未被人们摘取。但我们的幻方爱好者，却离开平原去攀登山峰，用杂乱多变的素数来构造均衡对称的幻方，在崎岖的山峦间寻觅。走在最高处、拥有最多发现的捷足者就是湖北天门的张道鑫先生。

张道鑫先生，一个农机工作者，长期从事行政、技术管理，退休闲暇之后，他与幻方结缘，并痴迷其中。他先运用层层相叠的拉丁方构造成方方正正的立体幻方，并有所收获。当听说素数幻方山峰中的奇闻后，便快步奔向“珠穆朗玛峰”而去。辛劳不负有心人，从三阶、四阶，到五阶、六阶，最后来到十层 21 阶和十一层 22 阶“金字塔”幻方脚下。他发现了各种各样的神奇岩洞，姿态万千的岩石崖壁，置身在如此美妙的素数幻方的陡峭山峰间，他兴奋异常、留连忘返。从冰山雪窟中，他找到了幻方三枝连；在对峙巨石间，他发现孪生素数幻方；步入神秘的岩洞，他体会到“洞中有洞”的嵌套幻方；漫游云雾飘浮的山谷，他想像出去首掉尾的“怪物”幻方。饱览如此壮丽的神奇景色，他笑了；获得那么众多的珍奇异宝，他满足了。最后，在高高的峰巅上，他盘桓凝思、为设计两座金字塔幻方而思考。当有朝一日这个新的风景点出现在我们眼前时，我们也就看到了一位传奇式的登山老人用他的聪明才智立下的幻方丰碑。

愿张道鑫先生的这本《素数幻方》成为幻方爱好者乐于浏览的风景线。

高　治　源
于延安宝塔山上
2002 年 2 月 8 日

《素数幻方》与《幻方再论》同时开印，下一本－《袖珍型最佳幻方小辞典》将于 2003 年 11 月 3 日印成，欢迎朋友们提供素材。

资料请寄芜湖市安师大凤凰山 37－36。电子信箱：g2358@mail.wh.ah163.net

2003 年 5 月 16 日

羊 年 致 辞

过去的一年是万马奔腾的一年，在我的经历中，一批事情值得留下文字。其一。我们发现了《魔环》，它是一门新的学科、是组合数学的又一分支。它的问世，将会引出深远的社会影响。发现它的是三位数学爱好者：昆明理工大学杨高石，孝感工业学校曹陵与我。其二。《有趣的魔环》与《幼儿启蒙探讨》两书己经印成，这就为推动魔环游戏的开展准备了条件。其三。“神童”杨弋、第一位学会《幻方》的小朋友、安师大附中一年级 10 班，他是马年小学升初中的“状元”。在这年 11 月份第八届全国计算机分区联赛普及组中以满分的成绩获全国一等奖；其四、安师大幼儿园大 2 班的寇明阳登上了历史舞台，他的加减乘除运算己经过关，是第一位研究《魔环》的小朋友。我正在为他加工，我们的王绎皓伴读，王绎皓，中 4 班。伏龙、凤雏得一而安天下。兼有《魔环》与《幻方》的寇明阳将会创下更加出色的成绩。寇明阳的出现，使我得出了一个我也惊讶的判断：在幼儿园阶段，完成加减乘除综合运算的训练是可能的。我正在请王绎皓帮忙，如果在一年半的时间内她能完成这套训练，那就意味着，我们的这套设计具有普遍的意义。其五。安徽师范大学教育技术系 2000 级杨富宝同学的出现，促成了《素数表－100 万之内》的问世，为素数幻方的研究提供了条件。其六、睢宁蔡宜文先生登台，他在马年的 2 月 15 日到 12 月初 6 日，连过十一关，以惊人的速度创下了一大批新的连续素数幻方记录，这就是 11 阶、16 阶、20 阶、24 阶、28 阶、30 阶、32 阶。36 阶、38 阶、42 阶、54 阶。其七、孝感工业学校曹陵于 2002 年 5 月 4 日，给出了当 N 阶为素数时，对角线的“高优”5 次与 4 次同生共存的理论探讨，并于 2002 年 12 月 8 日给出了 47 阶以下的全部素数阶“高优”，这意味着“高优”的实践己经完成。时不几天，12 月 17 日得到了 16、20 阶“高优”与 19 阶“极优”。又不几天，12 月 23 日得到了 25、49 阶“高优”，这是（$2M+1$）^{2}阶家族派来的代表，这就使“特优完美幻方”的内容更加充实。

两本新书将在羊年亮相。一本是《素数幻方》，一本是《幻方再论》。《素数幻方》，张道鑫编，《幻方再论》，曹陵编。

张道鑫，长期从事行政、技术管理的农机工作者，他为素数研究给出了一整套绝妙的设计，他的《素数幻方》是一只会下“金蛋”的鸡，第一批“金蛋”就是蔡宜文先生的一大批《连续素数幻方》，这批幻方的发表，使《素数幻方》一书更放光彩。

曹陵，祖籍湖北应山，生于南京，长在溧水，孝感工业学校教师，在特优完美幻方理论的研究上取得了重要突破。他的《幻方再论》是幻方编制方法的一套系统总结，将对推动幻方研究产生深远的影响。

马年为我们推动《魔环》与《幻方》知识的普及提供了绝好的条件，这两本新书的发表，将有助于一个可喜局面的形成：羊年吉祥，喜气洋洋。

王　忠　汉
马 年 除 夕

前　言

笔者在拜读高源先生的《奇妙的幻方》时，深受“这两个素数幻方真是天造地设般的奇迹，它们的诞生实在来之不易”的启发和激励，蒙发我一种去“数海拾贝”的好奇心理，将久已迷恋的幻立方研究束之高阁，同许多默默奉献的幻方研究者一样，历经艰难曲折，终于在那万紫千红、耀眼夺目的无数宝贝中，拾得几枚自我喜爱的珍品。

幻方的趣味性和奇特性，吸引了世代千万个爱好者。他们忘寝废食、呕心沥血，在那五彩缤纷、深奥难测的幻方世界里，缔结了美妙珍奇的丰硕成果。古今研究者们的这种拼搏和奉献精神，深深地打动了我。笔者是农机工作者，从事行政技术管理，对幻方一无所知。进入退休赋闲之后，却与幻方结下了不解之缘，可谓矢志不移，痴迷不已。

多情梦寐　九宫山上观风景　这边独好
有意幻方　八卦阵中论春秋　其乐无穷

近几年，在高治源教授的亲切关怀下，在王忠汉、施学良、汪咬元、毛经中老师们的具体帮助下，在丁宝训、陈皓、林正禄、孙友、丁望新、胡银美、李抗强、许仲义、曹陵、张荣斌、刘志雄等同志们的热情鼓舞下，这本《素数幻方》终于同大家见面了，特表示衷心的感谢！

在编写素数幻方时，本着既要积极参与，又要尽量节省的意图，文字记述较少，图样制作偏多；只作简要陈述，未予理论证明；亦未深入探讨其变异性质，更未发掘其内在的数理关系及应用价值；凡此不足及谬误之处，敬请广大幻方爱好者及数学专家们不吝赐教。

张　道　鑫
2002年5月5日

素 数 幻 方

张 道 鑫

一、 素数

众所周知，只能被 1 和本身整除的自然数叫素数，用 P 表示。它是编制素数幻方的基本元素。素数在自然数中的分布虽然离散杂乱，缺少规律，但在其组成各种类型数列的时候，却有章可循。

除去 2 与 5 外，其它所有素数的个位数必是 1 或 3、7、9。因而，由个位数不尽相同的素数组成的幻方，称为异尾素数幻方；由个位数相同的素数组成的幻方，称为同尾素数幻方。

二、等差数列中的素数

等差数列中，相邻两项的差叫公差，用 d 表示，显然，$d \in N$。

当 $d \neq 10N$ 时，形成的等差数列为异尾数列，即个位数不同的素数. 它们存在某些确定公差 $d \neq 10N$ 的由 3－5 个素数组成的等差数列，如：

d = 6 时，有 5 11 17 23 29 ； 7 13 19 ； 31 37 43 ； 41 47 53 59 ；

d = 12 时，有 5 17 29 41 53 ； 7 19 31 43 ； 47 59 71 83 ；89 101 113

d = 18 时，有 5 23 41 59 ； 11 29 47 ；43 61 79 97 ； 53 71 89 107

d = 24 时，有 5 29 53 ； 13 37 61 ；59 83 107 131 ；79 103 127 151

d = 36 时，有 7 43 79 ； 11 47 83 ；31 67 103 139 ； 37 73 109

当 $d = 10N$ 时，形成的等差数列为同尾数列，即个位数相同的素数. 它们也存在某些确定公差 $d = 10N$ 的由 3 个或 3 个以上个素数组成的等差数列，如：

d = 30 时，有 11 41 71 101 131 ； 13 43 73 103 ； 7 37 67 97 127 157 359 389 419 449 479 509

d = 60 时，有 11 71 131 191 251 311 ； 43 103 163 223 283 ； 47 107 167 227 ； 19 79 139 199

d = 90 时，有 61 151 241 331 421 ； 13 103 193 283 373 463 ； 17 107 197 ； 19 109 199 ；

d = 120 时，有 281 401 521 641 761 881 ； 73 193 313 433 ； 37 157 277 397 ； 29 149 269 389 509

d = 210 时，有 801 1091 1301 1511 1721 1931 2141 2351 ；
1453 1663 1873 2083 2293 2503 2713 ；
47 257 467 677 887 1097 1307 ；
199 409 619 829 1039 1249 1459 1669 1879 2089

d = 2310 时，有 71 2381 4691 7001 9311 11621 13931 ；
3823 6133 8443 10753 13063 15373 17683 19993 22303 ；

5557　7867　10177　12487　14797　17107　19417　21727；
1019　3329　5639　7949　10259　12569　14879　17189

三、　数列

按一定次序排列的一列数叫做数列，前举各例均为单列等差数列。编制一个 n 阶幻方需要 n 个数列。现将编制素数幻方的常用数列分述如下：

1. 相似等差数列

各由 n 个素数组成且有相同公差 $d(d \in N)$ 的两个数列，叫做相似等差数列，上页 d=6 时的各例都是相似等差数列。

2. 不相似等差数列

两个公差不相等的数列，称为不相似等差数列。如 n=4，$d_1=30$，$d_2=60$ 的不相似等差素数数列：11　41　71　101　；　151　181　211　241　；与 137　197　257　317　；　277　337　397　457　。若 1、2 行的行距 $h(h \in N)$ 与 3、4 行的行距 $h(h \in N)$ 相等，当 h=140 时，可以编制 4 阶素数幻方。

3. 同形不等差数列

各由 n 个数组成且相邻两数公差分别为 $d_3, d_2, d_3\cdots\cdots(d_3 \neq d_2 \neq d_3 \neq \cdots)$ 的 n 个数列，叫做同形不等差数列。构造素数幻方时，它们是使用最为广泛的一种数列组，如：

5	7	13	17	83
29	31	37	41	107
59	61	67	71	137
101	103	109	113	179
269	271	277	281	347

这 5 个数列中，相邻两数之差依次为 2　6　4　66。以 d=2、6、4、66 表示（下同）。不论其行距如何，均可编制成 5 阶完美素数幻方。

4. 同形不等差对称数列

同形不等差对称数列是同形不等差数列的一个特例。如 n=4 时，有

31	41	61	71
241	251	271	281
97	107	127	137
307	317	337	347

这 4 个数列的公差依次为 10、20、10，可以编制成 4 阶素数幻方。

5. 两两行距相等的数列

两两行距相等的数列可分为两两行距相等的相似等差数列和两两行距相等的同形不等差对称数列。当 n=4 时，这种数列可编制出 4 阶完美幻方。

6. 不相似不等差对称数列

这是一种不常见的数列，有助于编制一些特殊的幻方，如：

7	17	37	47
97	107	127	137
227	257	277	307
317	347	367	397

前两数列的 d_1＝10、20、10；后两数列的 d_2＝30、20、30 且 h＝90。这种数列只有用特殊办法，才能编制成 4 阶同尾素数幻方。

四、 幻方

从自然数中寻求的素数，经公差确定成具有某种特性的数列，再采取相应的布数技巧，即可构成素数幻方。当前，制作幻方的技巧可谓百花争艳，各显神通。而制作素数幻方的常用方法有模式法、镶框法、跳步法和正交法，将在后文中具体分述。

由 n^2 个不同素数编制的 n 行、n 列与两条对角线上 n 个素数之和均相等的 n 阶方阵，叫做 n 阶素数幻方。

后文涉及的平面幻方，无特别说明时，均指素数幻方。

妙趣横生的 3 阶幻方

幻方著作，大多是从我国公元前 23 世纪的“洛书”讲起，如下图所示，这洛书记载的九宫图确实是不朽之著，永恒之作。用最小的 9 个连续自然数构造的九宫图，不仅阶数最低，数字最少，而且结构严谨，典型独特，内容丰富。研究素数幻方，自然也应从最基础、最古老的 3 阶幻方做起。

设 a_1, a_2, a_3；b_1, b_2, b_3；c_1, c_2, c_3 为素数组成且具有相同公差 d(d ∈ N)的 3 个等差数列，若行距 $h = c_i - b_i = b_i - a_i$，则这 9 个素数可编制与洛书同型的 3 阶幻方。如图 1－1 所示：

4	9	2
3	5	7
8	1	6

洛 书

b_1	c_3	a_2
a_3	b_2	c_1
c_2	a_1	b_3

图 1－1

无论怎样翻转或镜射，3 阶幻方仅此一型，且幻和 $S=3b_2$. 洛书虽然是最古老的唯一图形，但在素数领域里，可演释出丰富多彩的变式。

下面是用较小素数组成的 4 组等差数列：

d＝12			d＝12			d＝30			d＝90		
h＝42			h＝30			h＝36			h＝36		
5	17	19	29	41	53	7	37	67	11	101	191
47	59	71	59	71	83	43	73	103	47	137	227
89	101	113	89	101	113	79	109	139	83	173	263

按图 1－1 模式将上列各数填入各自 3 阶方阵的对应位置，就构成幻和分别为 177,213,219,411 的 3 阶幻方。

47	113	17
29	59	89
101	5	71

$S_3=177$

59	113	41
53	71	89
101	29	83

$S_3=213$

43	139	37
67	73	79
109	7	103

$S_3=219$

47	263	101
191	137	83
173	11	227

$S_3=411$

图　1－2

编制同尾素数幻方比编制同阶的异尾幻方要困难得多。首先，要在素数中选取个位数相同的素数，按 d＝10n 的公差组成等差数列，然后，选择具有相同行距 h 值的 3 个等差数列，再编制成同尾素数幻方。

图 1－3 是幻和分别为 843, 1929, 921, 1077 的 3 阶同尾素数幻方。

d＝180
h＝ 30

101	491	251
431	281	131
311	71	461

$S_3=843$

d＝ 30
h＝450

613	1123	193
223	643	1063
1093	163	673

$S_3=1929$

d＝ 30
h＝270

277	607	37
67	307	547
577	7	337

$S_3=921$

d＝ 90
h＝210

269	659	149
239	359	479
569	59	449

$S_3=1077$

图　1－3

一个 3 阶幻方的各个数与另一个 3 阶幻方对应位置上的各个数均存在同一差值 k(k∈2N)时，称这两个 3 阶幻方为姐妹幻方或幻方对。设一个 3 阶幻方的元素为素数 p，另一个 3 阶幻方的元素为 p+k。图 1－4 左是 d＝2310，h＝750 的 S＝10617 的 3 阶同尾幻方，若各数加上 k＝8，则成 S＝10641 的 3 阶同尾幻方，如图 1－4 右所示。即为一对 p 与 p+8 的 3 阶幻方。

1229	6599	2789
5099	3539	1979
4289	479	5849

$S_3=10617$

1237	6607	2797
5107	3547	1987
4297	487	5857

$S_3=10641$

图 1－4

这类幻方对大量存在。图 1－5 是和为 471、723、807、849 的 4 例异尾幻方对（p+k 图样略，下同）：

d ＝120
h ＝ 6

37	283	151
271	157	43
163	31	277

P+1330

d＝ 30
h＝168

211	439	73
103	241	379
409	43	271

p+1828

d＝ 42
h＝120

227	431	149
191	269	347
389	107	311

p+252

d＝ 90
h＝174

193	547	109
199	283	367
457	19	373

p+820

图 1－5

图 1－6 是和为 7233、11409、8661、1797 的 4 例同尾幻方对：

d=2310
h = 30

101	4751	2381
4691	2411	131
2441	71	4721

P+476

d=2310
h=1470

1493	7583	2333
4643	3803	2963
5273	23	6113

p+60

d=2310
h= 30

577	5227	2857
5167	2887	607
2917	547	5197

p+2766

d=120
h=330

479	1049	269
389	599	809
929	149	719

p+2582

图 1—6

一个幻方的各数 p_1 加上 k_1($k_1 \in 2N$)等于另一个幻方对应位置上的各数 p_2，若第二个幻方的各数 p_2 加上 k_2($k_2 \in 2N$)等于第三个幻方对应位置上的各数 p_3，我们把这三个幻方叫做幻方三枝莲，或称幻方仨。

图 1—7 是 d=120, h=42, k_1=308, k_2=22 的幻方三枝莲：

71	353	149
269	191	113
233	29	311

S_3=573

379	661	457
577	499	421
541	337	619

S_3=1497

401	683	479
599	521	443
563	359	641

S_3=1563

图 1—7

同尾幻方三枝莲经常出现，图 1—8 给出幻和为 9663、7779、8661、3117 的各一例：

d=2310
h= 600

911	6131	2621
4931	3221	1511
3821	311	5531

P+1802，5508

d= 90
h=2310

2503	4993	283
373	2593	4813
4903	193	2683

P+3060，390

d= 30
h=2310

2857	5227	577
607	2887	5167
5197	547	2917

P+10710，1200

d=210
h=630

829	1879	409
619	1039	1459
1669	199	1249

P+3300，7360

图 1—8

若干个具有相同公差 d 和相同行距 h 的 3 个等差数列所编制的 3 阶幻方，称为 3 阶幻方串。

857	5987	2657
4967	3167	1367
3677	347	5477

S_3=9501

图 1—9

283	4993	2503
4813	2593	373
2683	193	4903

S_3=7779

图 1—10

101	4751	2381
4691	2411	131
2441	71	4721

S_3=7233

图 1—11

1801	8191	2341
4651	4111	3571
5881	31	6421

S_3=12333

图 1—12

图 1— 9 是 d=2310，h=510，k=686、198、4376 的 4 个一联的幻方串的第一个幻方；
图 1—10 是 d=2310，h=90，k=174、22、2864、390 的 5 个一联的幻方串的第一个幻方；
图 1—11 是 d=2310，h=30，k=476、946、1820、7944、1200 的 6 个一联的幻方串的第一个幻方；
图 1—12 是 d=2310，h=1770 的同尾幻方，当 k=100、152、184、554、1866、3766、7938、1400 时，依次加入各数后，就得幻和分别为 12333、12633、13089、13641、15303、20901、32199、56013、60213 的 9 个一联的幻方串。

还须提及的是：具有相同公差 d 和相同行距 h 的 3 个等差数列所编制的 3 阶幻方与

具有相同公差 h 和相同行距 d 的 3 个等差数列所编制的 3 阶幻方是互以垂直中心轴翻转 180 度而得，应视为同一幻方，如图 1—13：

d = 6, h = 120			d = 120, h = 6		
151	283	37	37	283	151
43	157	271	271	157	43
277	31	163	163	31	277

图 1—13

古老的 3 阶幻方将在孪生素数幻方和变相素数幻方中焕发出更加年轻的风采。

美不胜收的 4 阶幻方

编制 4 阶幻方比编制 3 阶幻方要容易得多，其方法多种多样，制作的 4 阶幻方更是多彩多姿。仅用最小的 16 个自然数构造的 4 阶幻方就有 880 型。怎样将具有特殊性的素数进行优化组合，调理成具有适用性的数列，适用于编制自然数 4 阶幻方的技巧，达到编制 4 阶素数幻方的目的。因此，选择什么样的素数，编排成什么样的数列，采用什么样的构造技巧，均至关重要。现以所用数列为序分述于后。

一、用相似等差数列构造

前面已经知道，各由 n 个素数组成且有相同公差 d(d ∈ N)的 n 个等差数列，叫做相似等差数列。4 阶素数幻方的构造，与这种数列密切相关。

设 A_1, A_2, A_3, A_4; B_1, B_2, B_3, B_4; C_1, C_2, C_3, C_4; D_1, D_2, D_3, D_4 是由不同素数组成且具有相同公差 d(d ∈ N)的 4 个等差数列，编成的 4 阶幻方如图 2—1。

例如　5　17　29　41　；7　19　31　43　；47　59　71　83　；127　139　151　163　是 d=12 的 4 个等差数列。将各数按图 2—1 模式填入 4×4 方阵的对应位置，得 S=258 的 4 阶幻方，如图 2—2。

B_3	C_4	A_1	D_2
A_2	D_1	B_4	C_3
D_4	A_3	C_2	B_1
C_1	B_2	D_3	A_4

图 2—1

31	83	5	139
17	127	43	71
163	29	59	7
47	19	151	41

图 2—2

图 2—3 是公差分别为 30　60　90　120 各由 4 个等差数列按图 2—1 模式编制的幻和依次为 1794　1932　2268　2796 的 4 个 4 阶同尾幻方：

241	631	11	911
41	881	271	601
971	71	571	181
541	211	941	101

233	563	43	1093
103	1033	293	503
1213	163	443	113
383	173	1153	223

457	577	47	1187
137	1097	547	487
1367	227	397	277
307	367	1277	317

479	739	29	1549
149	1429	599	619
1789	269	499	239
379	359	1669	389

图 2—3

二、用不相似等差数列构造

设公差为 d_1 的 A_1, A_2, A_3, A_4; B_1, B_2, B_3, B_4 等差数列的行距 H 与公差为 d_2 的 C_1, C_2, C_3, C_4; D_1, D_2, D_3, D_4 等差数列的行距 H 相等且 $d_2=2d_1$，则这 4 个不相似等差数列可编制 4 阶幻方，如图 2－4。

例如 11 41 71 101；151 181 211 241；137 197 257 317；277 337 397 457 是公差为 30 30 60 60 且 1、2 行与 3、4 行的 H＝140，按图 2－4 模式将各数填入 4×4 方阵的对应位置，得 S＝846 的 4 阶幻方，如图 2－5。

A_1	D_3	D_2	A_4
B_4	C_2	C_3	B_1
C_4	B_3	B_2	C_1
D_1	A_2	A_3	D_4

图 2－4

11	397	337	101
241	197	257	151
317	211	181	137
277	41	71	457

图 2－5

图 2－6 是选用不相似等差数列，按图 2－4 模式编制的 4 个同尾 4 阶幻方，其幻和分别为 2504 3372 9078 3846：

$d_1=120$
$d_2=60$
$H=210$

71	1031	971	431
641	761	821	281
881	521	401	701
911	191	311	1091

$d_1=60$
$d_2=120$
$H=70$

43	1613	1493	223
293	1423	1543	113
1663	233	173	1303
1373	103	163	1733

$d_1=30$
$d_2=60$
$H=490$

67	4457	4397	157
647	3907	3967	557
4027	617	587	3847
4337	97	127	4517

$d_1=30$
$d_2=60$
$H=10$

349	1559	1499	439
449	1489	1549	359
1609	419	389	1429
1439	379	409	1619

图 2－6

三、用同形不等差数列构造

设 A_1, A_2, A_3, A_4; B_1, B_2, B_3, B_4; C_1, C_2, C_3, C_4; D_1, D_2, D_3, D_4 均为公差依次是 d_1, d_2, d_3 且 $d_1 \neq d_2 \neq d_3$ 的 4 个数列，可编制成 4 型幻方，如图 2－7：

A_1	B_2	C_3	D_4
C_4	D_3	A_2	B_1
D_2	C_1	B_4	A_3
B_3	A_4	D_1	C_2

A_1	B_3	C_4	D_2
C_2	D_4	A_3	B_1
D_3	C_1	B_2	A_4
B_4	A_2	D_1	C_3

A_1	B_4	C_2	D_3
D_2	C_3	B_1	A_4
B_3	A_2	D_4	C_1
C_4	D_1	A_3	B_2

A_1	D_2	B_3	C_4
C_3	B_4	D_1	A_2
D_4	A_3	C_2	B_1
B_2	C_1	A_4	D_3

图 2－7

先举 4 例由较小素数组成的不等差数列：

d=2 18 36

3	5	23	59
11	13	31	67
17	19	37	73
41	43	61	97

d=2 10 20

5	7	17	37
11	13	23	43
29	31	41	61
71	73	83	103

d=2 24 10

5	7	31	41
11	13	37	47
17	19	43	53
71	73	97	107

d=2 40 20

5	7	47	67
11	13	53	73
17	19	59	79
41	43	83	103

按图 2－7 左型，将各数填入各自 4×4 方阵的对应位置，得幻和分别为 150 162 168 180 的 4 阶幻方，如图 2－8：

3	13	37	97
73	61	5	11
43	17	67	23
31	59	41	19

5	13	41	103
61	83	7	11
73	29	43	17
23	37	71	31

5	13	43	107
53	97	7	11
73	17	47	31
37	41	71	19

5	13	59	103
79	83	7	11
43	17	73	47
53	67	41	19

图 2－8

再看 4 例同形不等差同尾数列：

d= 20 40 140

11	31	71	211
41	61	101	241
131	151	191	331
401	421	461	601

d=10 140 70

13	23	163	233
43	53	193	263
73	83	223	293
373	383	523	593

d=10 20 30

7	17	37	67
97	107	127	157
307	317	337	367
547	557	577	607

d=10 30 20

19	29	59	79
139	149	179	199
349	359	389	409
439	449	479	499

按图 2－7 模式将上列各数填入各自 4×4 方阵的对应位置，得幻和分别为 864 882 1058 1056 的 4 阶同尾幻方，如图 2－9：

11	61	191	601
331	461	31	41
421	131	241	71
101	211	401	151

13	53	223	593
293	523	23	43
383	73	263	163
193	233	373	83

7	107	337	607
367	577	17	97
557	307	157	37
127	67	547	317

19	149	389	499
409	479	29	139
449	349	199	59
179	79	439	359

图 2－9

四、用同形不等差对称数列构造

由 4 个素数组成公差为 d_1, d_2, d_3 的同形不等数列，若 $d_1=d_3$，则该类数列称为同型不等差对称数列，是同型不等差数列的一个特例。

首先，寻求出 4 个素数组成的同型不等差对称数列：

d= 30 60 30

11	41	101	131
151	181	241	271
401	431	491	521
541	571	631	661

d=10 50 10

13	23	73	83
43	53	103	113
163	173	223	233
373	383	433	443

d=10 20 10

7	17	37	47
97	107	127	137
307	317	337	347
547	557	577	587

d=10 110 10

19	29	139	149
229	239	349	359
379	389	499	509
919	929	1039	1049

然后，按图 2－7 模式将上列各数填入各自 4×4 方阵的对应位置，得幻和分别为 1344 732 1038 1806 的 4 阶同尾幻方，如图 2－10：