机械振动基础

南京航空学院

梁尧阶　黄太平　伊立言　合编

国防工业出版社

前　　言

涡轮喷气发动机的研究、设计、生产与使用过程中不断出现必须解决的零件、部件及整机的振动问题，要求航空发动机专业的工程技术人员具有良好的振动理论基础。为此，航空发动机设计专业教学计划中列入了《机械振动基础》课程。本书是根据三机部教材编审计划，由西北工业大学702教研室、北京航空学院405教研室及南京航空学院202教研室共同拟定编写大纲、共同编写、共同使用的专业基础教材。

1968年9月三院校《机械振动基础》教材编写会议纪要指出：本课程的重点内容为单个自由度与两个自由度线性系统的振动，教材应系统地阐明其基本理论；振动分析以经典方法为主，以典型振系为主，突出物理概念、突出基本方法；多自由度系统与弹性系统是振动理论的重要组成部分，教材仍应有重点地系统分析介绍。会议纪要并指出：教材内容不宜过分受学时限制，可以适当增加内容以供学习中灵活选用，并供学有余力的学生课外自学或在以后的学习和工作中参考。编写中注意了书中一些章节在内容上的独立性，使其自成体系，便于教学上的灵活选用与学生自学。电子计算技术的发展对振动分析与计算方法有着重大的影响，教材中注意反映这一特点，但考虑到各院校具体情况不同，没有编入电子计算机计算程序。

本书由南京航空学院梁尧阶主编，参加编写的还有黄太平（第五章）与伊立言（第六章）。

本书由西北工业大学顾家柳主审，北京航空学院马宗祥、张锦参加了审阅。南京航空学院朱世晋等同志曾对部分初稿提了宝贵的意见。

限于我们的水平与经验，书中谬误在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

1980年11月于南航

目 录

绪　论

振动是物质世界中普遍存在的一种运动形式。例如秋千和钟摆的摆动，汽车的颠簸，人说话发声和听到外来响声，甚至动物的呼吸和心脏搏动，等等，都是宏观形式的振动；而热、电流和磁流等则是微观的分子振动。研究物质世界中各种各样形式振动的规律是振动理论的任务。机械振动则着重研究机械力形式的振动。机械振动，就其定义来说，是指：弹性体或介质的质点的平衡受到扰动后出现的相对于平衡位置的复往运动。受到扰动后的弹性体或介质的质点，在偏离其平衡位置的同时，将出现一个使其返回平衡位置的恢复力。这个恢复力可以是弹性力，可以是重力，也可以是这两种力的组合，所以这种机械振动系统必定是一个弹性系统或重力作用的系统。

图 1

以众所熟知的单个自由度弹簧质量系统为例（图 1），运动质量 m 与弹簧构成一个弹性系统。m 被看作是运动的质点，弹簧 K 受拉伸或压缩所产生的弹簧力，使偏离平衡位置的质点 m 向平衡位置返回。而钟摆偏离稳定平衡位置时，重力的作用将使它有向平衡位置返回的趋势。在本书中所讨论的将是这些机械力作为恢复力的系统的振动。与航空发动机有关的振动问题绝大部分都属于机械振动。

发动机整机以及其部件、组件和零件的振动都属于机械振动；发动机转子的动平衡，发动机振动的测量以及发动机振动的隔离和消减等也都是利用机械振动的原理来实现的。这些振动问题的分析和讨论大多属于有关专业课程中的内容。这些振动问题的基础知识，在物理学和理论力学课程中已学过，但是还很不够，有必要对已学过的一个自由度质点振动，在深度上和广度上进一步提高，特别需要加强的是振动过程的物理概念；过去没有学过的多个自由度系统振动，弹性体振动，非线性振动，随机振动和冲击等，都是专业课程中必需的基础知识。熟悉以上所述的机械振动基础知识，对于今后在发动机研究、设计和制造工作中处理和分析研究实际问题，对于今后在机械振动方面进一步提高、也都可能会得到有益的帮助。

在工程中，机械振动常被作为有害的因素来加以研究，求得振动的减轻或消除。确实如此，由于振动而出现的问题不少，甚至是严重的事故。例如，振动在测试中妨碍精密仪器设备的正常功能；在生产中降低机械加工的精度和表面光洁度；在机器设备运行中加剧构件的疲劳和磨损、缩短机器和构件的使用寿命；飞机机翼颤振和发动机振动都曾造成飞机失事，机毁人亡。航空发动机研制和改进，几乎每一型号都遇到过和振动作斗争的经历。每一个型号航空燃气涡轮发动机几乎没有例外的都遇到过叶片振动问题。到目前为止，叶片振动仍然还有大量未解决的问题，还要继续作大量的理论和试验研究工作。飞机和车辆的振动和生产车间的振动环境都会使乘员和工人易感疲劳、眩晕，降低工作效率，造成事故。常常与振动俱来的噪音污染环境，成为公害，危害健康，影响之甚不亚于直接的振动环境。所以研究振动问题时，常常研究产生振动的原因，找出消除或减轻振动的方法，其中又常常着重找出和调整振动系统的共振频率，使之远离振动源的激振频率；也力图计算出振动的响应，作

为计算系统构件动应力的根据。隔振也是研究机械振动的另一个方面，目的是为了尽可能减小振动的传入或输出。

振动的危害，往往使人忽视振动可以被广泛利用的重要性。实际上机械振动在物质世界中的重要作用到处可见。例如，没有人的声带和耳膜的振动，就不会有人类丰富的语言和思想感情的交流。在工程中，机械振动常被利用于生产和测试等各个方面。利用振动原理的机械可以从事铸造的密集成型；矿山矿石的输送选分；矿石水泥等的球磨粉碎；建筑中的捣固打实等等工作。机械制造工业中广泛采用振动型式的机械，有效地应用于除灰、清洗、光饰、脱水、去毛刺、时效等等工序。利用振动原理的还有振动测量仪器，振动试验台，动平衡机等。总之，振动在科学研究和工农业生产中的应用也是用途广泛，不胜枚举的。

去除有害的振动或者有效地应用振动原理为科研生产服务，都必须全面研究振动系统的振动特性，即全面分析系统在不同阻尼条件下，振动响应随激振频率变化的关系，找出所希望的最有利解决办法。因此，研究分析这种被称为响应谱的振动特性是机械振动的一个很重要的内容。

机械振动有多种分类方法。首先会遇到的是按振动自由度的多少，分为单个自由度系统的振动，多个自由度系统的振动以及无限个自由度系统（常称为弹性体或连续介质）的振动。我们知道，自由度是指描述系统运动的独立坐标数目。描述图1中质量 m 的运动，只要一个坐标就够了，所以不计参与运动的弹簧质量时，它是一个自由度的系统。我们注意到质量 m 在 x 方向作上下往复运动的同时，由于螺旋弹簧的特点，还伴有绕 x 轴的回转往复运动，当这个回转运动不是小到可以不计时，就需要用角坐标 θ 来描述。这样，质量 m 的运动就需要 x 和 θ 两个坐标来描述，这个系统便是二个自由度的了。如果振动系统是二组串接的弹簧与质量：m_1，K_1 和 m_2，K_2（图2），不计二个弹簧的质量时，描述系统的运动需要 x_1 和 x_2 二个独立座标，这也是二个自由度的系统。尚若图1中的系统计及弹簧的质量参与运动时，因为弹簧钢丝质量连续分布在钢丝长度上、同一瞬时每一点的运动都各不相同，需要无数个独立座标来描述弹簧的运动，所以是无限多个自由度的系统；而弹簧本身就是弹性体，所以又常称为弹性体系统，也称为连续介质系统。杆、梁、板和壳等都是无限多个自由度的弹性体系统。

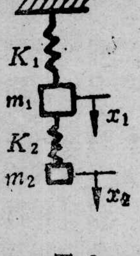


图 2

在机械振动中常按振动时有无外力激振分为自由振动和强迫振动。自由振动是指系统对初始激振（表现形式为初始位移及速度或初始外力）的响应，振动由初始条件造成的偏离稳定平衡位置所产生的恢复力维持。系统内无阻碍运动的阻力时，自由振动将持久不衰的继续下去；尚若系统中有阻碍运动的阻力，它耗散了系统的能量，不断减小振幅，最终振动停止，称为减幅振动。强迫振动则是系统在外加激振力作用下被迫振动。还有一种在定常外力作用下，由于系统具有的反馈特性引起的振动称为自激振动。例如风吹树叶的抖动，乐弓对弦乐器的作用而产生的弦振动和压气机叶片的颤振等都是这种类型的振动。此外还有不能用简谐函数、周期函数或非周期函数等所谓确定的函数式描述的所谓随机激振（力或位移）产生的随机振动。例如汽车因路面凸凹不平造成的颠簸振动，大气湍流使飞机机翼产生的随机振动等都是这类振动。这种振动的特征只能用概率和统计的分类的方法来描述。这些由于不同激振机理而出现的振动又是另一种分类的方法。

各种振动系统的运动可以用运动微分方程式来描述。当运动微分方程式中表示惯性力、

阻尼力及恢复力的各项都各与系统相应的运动加速度、速度及位移成线性关系，即各项的系数都是常量时，运动方程式为线性微分方程，它所描述的振动为线性振动。尚若这些力和相应的运动量中有不成线性的关系，则运动方程式为非线性微分方程，所描述的振动为非线性振动。

还有其它分类方法和其它形式的振动，这里就不一一赘述了。

实际的振动系统称为物理系统，通常都是非常复杂和难以分析计算。系统中常常包含数目众多而又作为一个整体作用的构件。分析这类系统，首先要辨明各个构件的物理性质，这些决定系统动力特性的物理性质，通常是由试验方法确定。知道这些构件的各个特性之后，便可以建立一个代表物理系统的理想化数学模型。一个物理系统可以由多个不同的数学模型分别表示。我们总是希望建立能保持物理系统主要特微而又是最简单的一个。

一个系统的物理性质是指系统的物理参量。通常，实际系统总是连续的。它们的参量是分布的。但是，很多情况中常常可能用离散参量代替系统中的分布参量，从而简化分析计算。这通常是将连续系统加以适当的“集总”。因此，数学模型可以分为两大类：(1)离散参量系统或称集总系统；(2)分布参量系统或称连续系统。

分析计算中最重要的是确定数学模型的类型，因为它决定着数学公式的建立。离散参量系统的振动特性由常微分方程描述，而分布参量系统的则是由偏微分方程描述。在多数情况下总是认为离散系统比分布系统易于分析计算。

在电子计算机出现和被应用于振动领域之前，计算一个略为复杂的振动系统往往要耗费很多人力和时间；计算上百个自由度的振动系统是难以想像的事。电子计算机被广泛应用于振动领域之后，计算自由度以万计的振动系统已经不是罕见的难事。很多新的计算方法随着电子计算机的出现而产生。这样就促使了讨论二个及多个自由度系统时采用矩阵形式，因为这种方法能够很容易的在电子计算机进行计算，但是这样做并没有改变振动的基本原理。

第一章　简谐振动

在各种类型的振动中，简谐振动是最常研究的一种。这是因为简谐振动是振动运动中最基本的一种，而各种各样的周期振动又可以分解为简谐振动以便进行研究。

1—1　周期振动

一个振动物体的运动量（位移、速度或加速度）可以用时间 t 的函数 $x(t)$ 描述时，倘若振动运动量是周期变化的，即

$$x(t)=x(t+nT) \tag{1—1}$$

则这种振动称为周期振动。式中 T 是一个不为零的常量，称为振动的周期；n 为正整数。图 1—1(a)～(d)是周期振动的一些例子。

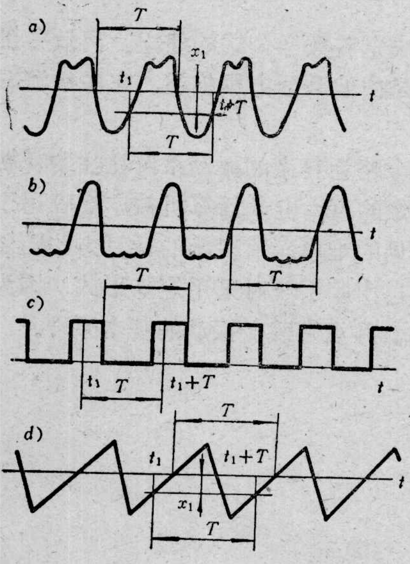


图　1—1

方程式(1—1)的含义是：相隔一个或若干个周期的两个瞬时振动量恒等（图 1—2）。这是周期振动的特征。

作周期振动的振动体离开平衡位置的最大位移叫做振动的幅值。描述周期振动振动幅值的量，根据不同的需要，可以用不同的方法表示。例如图 1—2 中所示，位移 $x(t)$的最大值 X_F 称为峰值，$x(t)$ 的最大值和最小值之差X_{FF} 称为峰——峰值。

在周期振动中，周期的倒数就是每秒钟振动的次数，叫做振动的频率 $f(c/s)$。c/s 是每秒钟的周数（亦称循环数）常用 Hz 表示，读作赫（或赫芝）。当频率以弧度/秒的单位表示时，称为角频率或圆频率 ω（rad/s，或 1/秒）一般简称为频率。

T、f和ω 之间的关系为

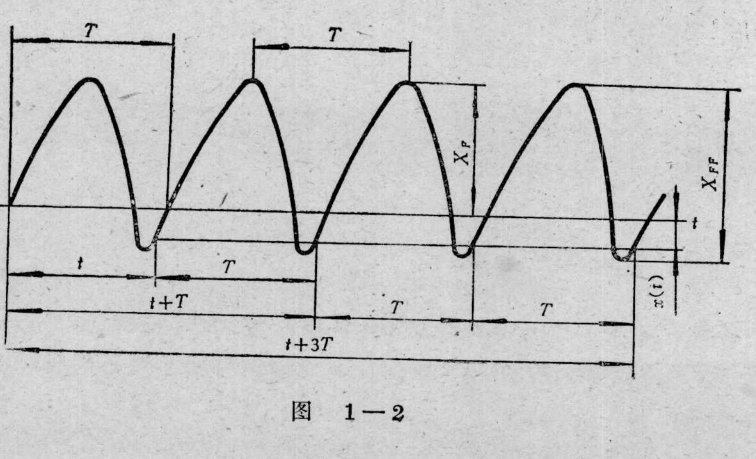


图　1—2

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{T} \tag{1—2}$$

倘若(1—1)式的条件不能得到满足，而是

$$|x(t)-x(t+T)|<\varepsilon \tag{1—3}$$

式中 ε 是给定的微量。这种情况的振动虽保持一定的周期，但相隔一个周期的二个瞬时的振动量微有变化，很近似于周期振动，故称之为概周期振动或时间周期振动。图1—8所示的拍振以及第二章所讨论的弱阻尼振动都是这种概周期振动的例子。

1—2 简 谐 振 动

简谐振动是最简单的周期振动，但又是周期振动中很重要的一个特例。这种振动也称为谐振动，它的运动可以用正弦函数或余弦函数描述，表示为

$$x = A\sin(\omega t+\varphi) \tag{1—4}$$

式中 x——振动体运动的位移

A——振幅

ω——角频率 （1/秒）

φ——相位角 （弧度）

对于一定的简谐振动，A、ω 和 φ 都是常量。图1—3表示了(1—5)式的简谐振动。从图中可见，倘若 $\varphi=0$，纵座标轴位于 $\omega t=0$ 处，这时的简谐振动是正弦函数

$$x = A\sin\omega t$$

表示的运动；倘若 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，则纵座标轴位于 $\omega t=\frac{\pi}{2}$处，即

$$x = A\sin(\omega t+\frac{\pi}{2}) = A\cos\omega t \tag{1—5}$$

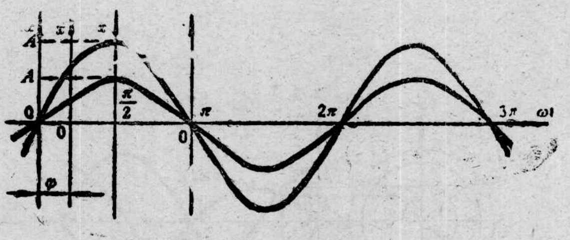


图 1—3

表示的余弦曲线。而 $\varphi=\pi$ 时，(1—4) 式成为

$$x = -A\sin\omega t \tag{1—6}$$

这时相当于 x 轴移至 $\omega t=\pi$ 处.

从以上所述，可见：(1) 相位 ϕ 角的大小只与起始振动值有关，而不影响振动运动的性质；(2)用正弦函数或余弦函数描述简谐振动也同样不影响振动的性质，只是初始的相位角的不同而已。对于用正弦函数表示的简谐振动，倘若要用余弦函数表示，只要引入一个 $\pi/2$ 的相位角就可以，即

$$x=A\sin(\omega t+\varphi)=A\cos\left(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2}\right)=A\cos(\omega t+\varphi_1) \qquad (1—7)$$

其中 $\varphi_1=(\phi-\frac{\pi}{2})$.

倘若常量 A 的数值改变，从图1—3中可见，这只是简谐振动 $x(t)$ 值的改变，也没有改变振动的性质。

对于简谐振动，常用振幅表示峰值和双振幅表示峰值——峰值。这时，振幅表示振动体偏离平衡位置的最大距离，双振幅是振幅的两倍。

对于振动位移为

$$x=A\sin\omega t \qquad (1—8)$$

的振动体，其振动速度为

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=\omega A\cos\omega t=\omega A\sin\omega t=\omega A\sin(\omega t+\frac{\pi}{2}) \qquad (1—9)$$

振动加速度为

$$\ddot{x}=\frac{d\dot{x}}{dt}=-\omega^2A\sin\omega t=\omega^2A\sin(\omega t+\pi) \qquad (1—10)$$

从(1—8)，(1—9)和(1—10)式可见，最大速度

$$v_0=\omega A \qquad (1—11)$$

是最大位移 A 的 ω 倍，速度与位移之间的相位角之差是 $\frac{\pi}{2}$。或者说在同一瞬时 t，速度比位移超前$\frac{\pi}{2}$的角度。同样，最大加速度

$$a_0=\omega^2A \qquad (1—12)$$

是最大位移A的 ω^2 倍，在同一瞬时 t，加速度比位移超前 π 的角度。

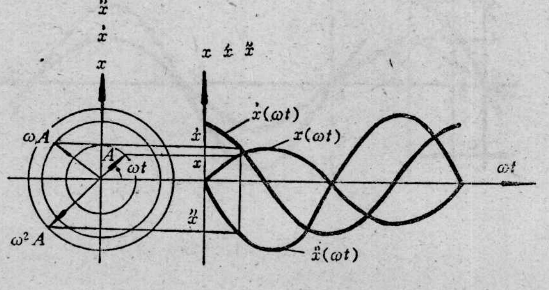


图 1—4

我们知道，简谐振动位移

$$x=A\sin\omega t$$

可以由沿反时针方向以等角速度 ω 旋转的矢量 A 在 x 轴上的投影表示（图1—4）。同样，振动速度和加速度也可以各由旋转矢量 ωA 和 ω^2A 在 x 轴上的投影表示。不过速度矢量比位移矢量超前 90^0，加速度矢量则比位移矢量超前180^0（见图1—4）。下面就可以看到，这

种矢量表示法对于求解简谐振动的合成，有时很方便。

1—3 简谐振动的合成

一个振动系统中，常常会同时存在着两个或更多的简谐振动。这些振动的方向相同时，可以合成为简谐的、周期性非简谐的以及“拍”等振动。当这些简谐振动的方向相互垂直时，则合成振动为平面图线轨迹。在振动测量中，常利用相互垂直振动合成的这个特点得到利萨如图线，作为频率测量的方法。

一、方向相同的两个简谐振动的合成

1) 同向同频的两个简谐振动的合成

设一个振动系统中有两个方向与频率相同的组成振动

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1\sin\omega t \\ x_2 &= A_2\sin(\omega t+\varphi) \end{aligned}\right\} \qquad (1—13)$$

其中第一个组成振动 x_1 的初始相位角为零，第二个组成振动 x_2 的初始相位角为 φ，所以 φ 也就是这二个组成振动的相位差。这二个组成振动都是线性振动，它们的合成可以由叠加得到，即

$$\begin{aligned} x &= x_1+x_2 = A_1\sin\omega t + A_2\sin(\omega t+\varphi) \\ &= (A_1+A_2\cos\varphi)\sin\omega t + A_2\sin\varphi\cos\omega t \end{aligned} \qquad (1—14)$$

因为 A_1、A_2 和 φ 都是任意常量，所以(1—14)式中的 $A_1+A_2\cos\varphi$ 和 $A_2\sin\varphi$ 各为$\sin\omega t$ 和 $\cos\omega t$ 项的常系数。可见，合成振动的形式应该是

$$x = A_R\sin(\omega t+\varphi_R) \qquad (1—15)$$

式中合成振幅 A_R 和合成相位角 φ_R 仍然是常量。对比(1—14)和(1—15)式，可得

$$\left.\begin{aligned} A_1+A_2\cos\varphi &= A_R\cos\varphi_R \\ A_2\sin\varphi &= A_R\sin\varphi_R \end{aligned}\right\} \qquad (1—16)$$

由(1—16)式中两个方程式的平方和以及两个方程式相除，可得

$$\left.\begin{aligned} A_R^2 &= A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\varphi \\ \varphi_R &= tg^{-1}\frac{A_2\sin\varphi}{A_1+A_2\cos\varphi} \end{aligned}\right\} \qquad (1—17)$$

因为 $\cos\geqslant-1$，所以 A_R^2 恒为正数或为零，A_R 应为实数。对于一定的A_1，A_2 和 φ，A_R 和 φ_R也是一定的常量。

综上所述，可见：(1)两个同向的同频简谐振动的合成振动仍为简谐振动；(2)合成简谐振动的振幅与相位角大小取决于组成的振幅和相位差的大小；(3)对我们特别有兴趣的是 A_R 随 φ 而变化的情况，由(1—17)式可得

φ	A_R
O	A_1+A_2
$\dfrac{\pi}{2}$	$\sqrt{A_1^2+A_2^2}$
π	A_1-A_2
$\dfrac{3\pi}{2}$	$\sqrt{A_1^2+A_2^2}$
2π	A_1+A_2

可见：两组成振动初始相位角相同时（亦即相位差为零），合成振动的振幅为二组成振动振幅之和；两初始相位角相差 180^0 时，合成振动的振幅为两组成振动振幅之差（图1—5）。所以，倘若 $A_1=A_2=A$ 和 $\varphi=\pi$，则 $A_R=0$，也就是振动消失。

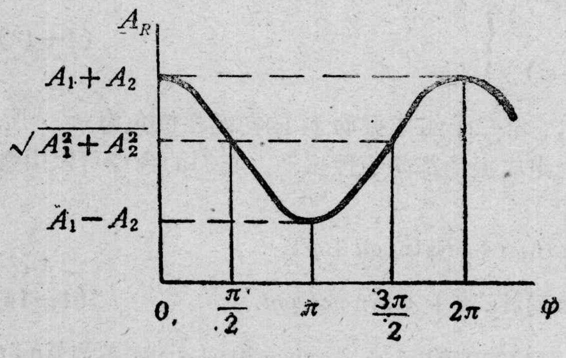


图 1—5

以上所述的物理概念对解释实际振动问题有时很有用处。例如，两个频率完全相同的音叉被先后敲响后音响的合成，在振幅相同的情况下，每次敲击的合成音响常不相同，有时高、有时低，甚至可能会出现“无声”，就是因为敲击两个音叉的时间间隔，也即相位关系，不能保持完全相同的缘故。

以上所述是用三角分析的方法求得两个同频组成振动的合成振动。倘若使用矢量表示法求解，则更为方便和直观。

例如，对于(1—14)式表示的组成振动，可以由图1—6中矢量 OP_1 和 OP_2 在 x 轴上的投影分别表示，其中 $OP_1=A_1$ 和 $OP_2=A_2$。在任意瞬时 t，矢量 OP_1 的角位移为 ωt，这时矢量 OP_2 与 OP_1 的夹角则为相位差 φ。根据矢量合成的原理，OP_1OP_2 平行四边形中的对角矢量 OP 就是矢量 OP_1 与 OP_2 的合成矢量，它在 x 轴上的投影

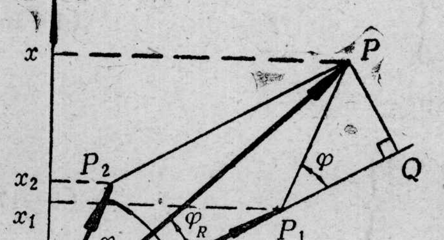


图 1—6

$$x=OP\sin(\omega t+\varphi_R)=A_R\sin(\omega t+\varphi_R)$$

表示合成的简谐振动，式中合成振幅 $OP=A_R$。从平行四边形 OP_1PP_2 很容易看出：

$$A_R=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\varphi}$$

为了求得合成振动与 x_1 间的相位差 ϕ_R，从 OP_1，作延长线、并由 P 点作与之相垂直的直线交于 Q 点。在直角三角形 OQP 的关系中可见

$$tg\varphi_R=\frac{PQ}{OQ}=\frac{PQ}{OP_1+P_1Q}=\frac{PP_1\sin\varphi}{OP_1+OP_2\cos\varphi}$$

$$=\frac{A_2\sin\varphi}{A_1+A_2\cos\varphi}$$

所以

$$\varphi_R=tg^{-1}\frac{A_2\sin\varphi}{A_1+A_2\cos\varphi} \tag{1—18}$$

得到的结果和由三角分析方法求得的(1—17)式完全一样。

从矢量图中可以看出二个组成振动矢量间的相位差 φ 的大小对合成振动矢量大小的关系。$\varphi=0$ 时，合成矢量为组成矢量的和；当 $\varphi=\pi$ 时，合成矢量为组成矢量的差，此时若二个组成矢量相等，则合成矢量为零、振动消失。

对于数目多的同频组成振动应用矢量表示法求合成振动更为方便，因为这时可以利用矢量多边形图，找出最后构成闭合多边形的那一条矢量，就是合成振动的矢量，它相对于起始的组成振动矢量的角度就是它的相位角。

2) 方向相同但频率不同的二个简谐振动的合成

设一个振动系统中有二个同方向的组成简谐振动

$$\left.\begin{aligned} x_1=A_1\sin\omega_1 t \\ x_2=A_2\sin\omega_2 t \end{aligned}\right\} \tag{1—19}$$

按组成的简谐振动的线性性质，可以叠加得到合成振动为

$$x=A_1\sin\omega_1 t+A_2\sin\omega_2 t$$

式中 $\omega_1\neq\omega_2$。组成简谐振动和合成振动的振幅——时间曲线 $x_1\sim t$，$x_2\sim t$ 及 $x\sim t$ 如图 1—7 所示。图中的合成振动 $x—t$ 曲线表明了振幅随时间而变化的情况。由此可见：同向不同频

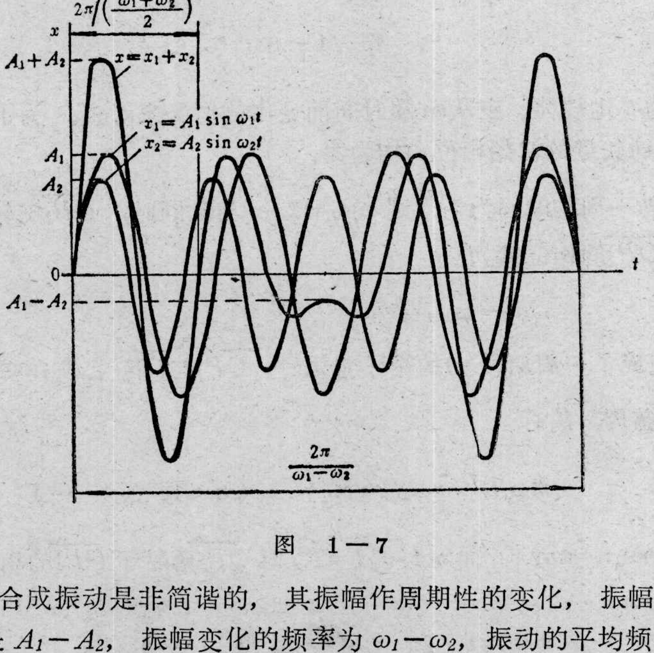


图 1—7

的二个简谐振动的合成振动是非简谐的，其振幅作周期性的变化，振幅变化的最大值是 A_1+A_2、最小值是 A_1-A_2，振幅变化的频率为 $\omega_1-\omega_2$，振动的平均频率为 $(\omega_1+\omega_2)/2$。

利用矢量图（图1—8）可以得到关于这种变化规律的解释。在 t_1 瞬时，矢量 OP_1 与 OP_2 各位于 $\omega_1 t_1$ 及 ω_{2t1} 处（图1—8），合成振动的振幅为合成矢量 OP_{Rt1}；到 t_2 瞬时，由于 $\omega_1 \neq \omega_2$，$\overrightarrow{OP_1}$ 和 $\overrightarrow{OP_2}$ 的相位差由原来的 φ_{t1} 变为 φ_{t2}，这时 $\varphi_{t2} \gtreqless \varphi_{t1}$，所以合成矢量 OP_{Rt2} 也因而改变，$OP_{Rt2} \gtreqless OP_{Rt1}$。由于二矢量的相位差不断地连续改变，合成矢量的大小也就不断地改变。

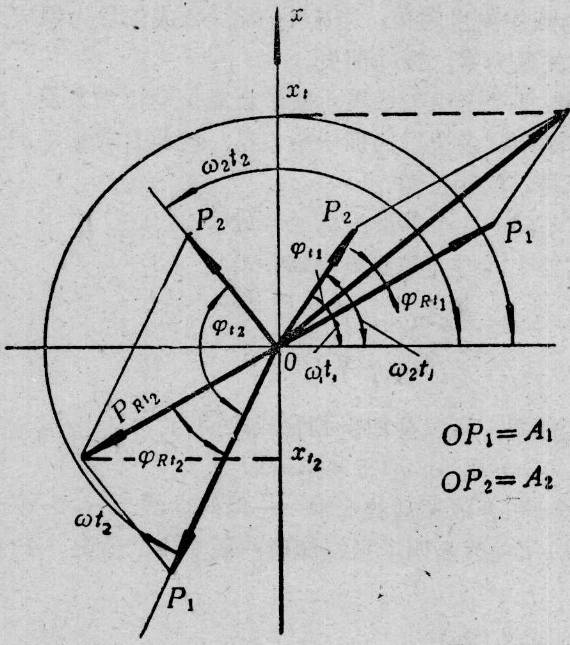


图 1—8

要知道 $\overrightarrow{OP_{Rt}}$ 的变化规律，应从 ϕ_t 随时间而变化的情况来考查。为了便于讨论，假设 $\omega_1 > \omega_2$，两组成振动矢量的初始相位角均为零。

设矢量 $\overrightarrow{OP_1}$ 旋转一周的时间为 t_1，则 $\omega_1 t_1 = 2\pi$；与此同时，$\overrightarrow{OP_2}$ 旋转了 $\omega_2 t_1$ 角度。由此得 $t = t_1$ 时 $\overrightarrow{OP_1}$ 与 $\overrightarrow{OP_2}$ 的相位差为

$$\omega_1 t_1 - \varphi_2 t_1 = \phi_1$$

当合成矢量 $\overrightarrow{OP_{Rt}}$ 完成了一周期 (T_A) 的循环变化时，$\overrightarrow{OP_1}$ 与 $\overrightarrow{OP_2}$ 必须在初始位置再度重合。这时 $\overrightarrow{OP_1}$ 旋转了 m 整周，故有

$$m\omega_1 t_1 - m\omega_2 t_1 = m\varphi_1 \qquad (m = 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

这里，$mt_1 = T_A$ 和 $m\omega_1 t_1 = m2\pi$；而 $m\phi_1$ 是 $t = T_A$ 时 $\overrightarrow{OP_2}$ 落后于 $\overrightarrow{OP_1}$ 的相位差，它必须是整周数，即

$$m\phi_1 = n \cdot 2\pi \qquad (n = 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

由这些关系式，可得

$$\left.\begin{aligned} T_A &= \frac{2\pi}{\dfrac{\omega_1}{m}} \\ T_A &= \frac{2\pi}{\dfrac{\omega_2}{m-n}} \\ T_A &= \frac{2\pi}{\dfrac{\omega_1-\omega_2}{n}} \end{aligned}\right\} \tag{1—20}$$

由此可得

$$\frac{m}{n}=\frac{\omega_1}{\omega_1-\omega_2} \tag{1—21}$$

倘若 ω_1 与 ω_2 有公约数 F、则$\omega_1=aF$ 及 $\omega_2=bF$，可得

$$\frac{m}{n}=\frac{a}{a-b} \tag{1—22}$$

这里，a 与 b 都必须是整数，它们没有 1 以外的公约数。

当 ω_1 与 ω_2 的比数不能得整数比时，合成振动振幅变化的周期不能用(1—20) 式求定。这时的合成振动振幅将不重复地变化下去。

例1—1　若 $\omega_1=2000$ 1/秒，$\omega_2=500$ 1/秒，试求合成振动振幅变化周期 T_A。

解　因为

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{2000}{500}=\frac{4}{1}$$

得　$a=4$ 及 $b=1$。所以

$$\frac{m}{n}=\frac{4}{4-1}=\frac{4}{3}$$

得　$m=4$ 及 $n=3$。这说明 $\overrightarrow{OP_1}$ 旋转 4 周的同时，$\overrightarrow{OP_1}$ 与 $\overrightarrow{OP_2}$ 的相位差达到 3 周，合成振动振幅 OP_{Rt} 完成一循环的变化，它的周期是

$$T_A=\frac{2\pi}{\dfrac{2000-500}{3}}=0.0126\text{秒}$$

例1—2　若 $\omega_1=876.5$ 1/秒及 $\omega_2=512$ 1/秒，试求合成振动振幅变化的周期。

解　因为 ω_1 与 ω_2 无 1 以外的公约数，故

$$\frac{m}{n}=\frac{876.5}{876.5-512}=\frac{1752}{729}$$

所以有 $m=1752$ 及 $n=729$，从而求得

$$T_A=\frac{2\pi}{\dfrac{876.5-512}{729}}=12.5664\text{ 秒}$$

例1—3　若 $\omega_1=1766.66$ 1/秒及 $\omega_2=1225$ 1/秒，试分析合成振动振幅的变化。

解　ω_1 与 ω_2无 1 以外的公约数，故

$$\frac{m}{n}=\frac{1766.6\dot{6}}{1766.6\dot{6}-1225}=\frac{1766.6\dot{6}}{541.6\dot{6}}$$

得 $m=1766.6\dot{6}$ 及 $n=541.66$。可见这种情况不能得到整数的 m 与 n，违背了 m 与 n 应为整数的规定。故合成振动的振幅将永不重复地变化下去。但是，在工程实际中有效数值的容许下，倘若近似地取 $\omega_1=1766.67$ 1/秒及 $\omega_2=1225$ 1/秒，则有

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{1766.67}{1225}=\frac{176667}{122500}$$

由此得 $a=176667$ 及 $b=122500$，所以

$$\frac{m}{n}=\frac{176667}{176667-122500}=\frac{176667}{54167}$$

得　$m=176667$ 及 $n=54167$，它们之间无 1 以外的公约数。合成振动的振幅变化周期为

$$T_A=\frac{2\pi}{\dfrac{1766.67}{176667}}=628.32\text{秒}$$

当两个组成振动的频率为整数倍的关系时，合成振动为非简谐的周期振动。图 1—10 为 $x_1=A_1\sin\omega t$ 和 $x_2=A_2\sin 2\omega t$ 及它们的合成振动 $x=A_1\sin\omega t+A_2\sin 2\omega t$ 的 $x\sim t$ 曲线图。不难证明，这种合成振动的频率等于组成振动中较低的那个频率 ω。

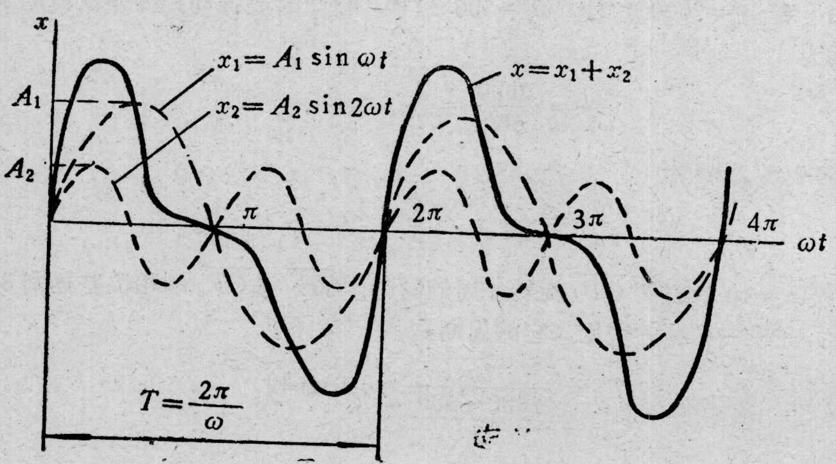


图　1—10

当二个组成振动的频率相近时，$\omega_1\approx\omega_2$，合成振动为拍振。为了简化讨论，设二个组成简谐振动的振幅相同，即 $A_1=A_2=A$。则合成振动可以表示为

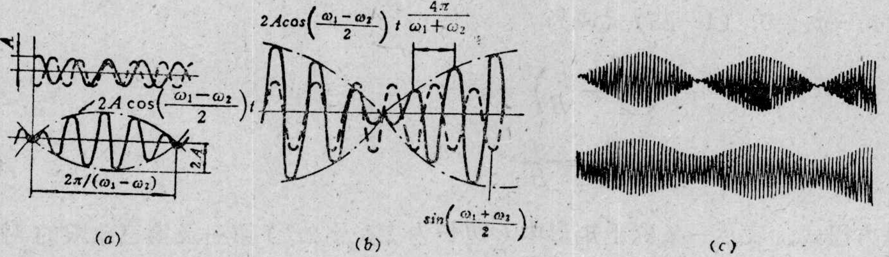
$$x=A\sin\omega_1 t+A\sin\omega_2 t=2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t \tag{1—23}$$

当 $\omega_1=\omega+\varepsilon$ 及 $\omega_2=\omega$，而 $\varepsilon<<\omega$ 时，(1—23)式可写成为

$$x=2A\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}t\right)\sin\left(\omega+\frac{\varepsilon}{2}\right)t \tag{1—24}$$

因为 ε 很小，所以 $\sin\left(\omega+\frac{\varepsilon}{2}\right)t$ 可以看作是频率为 $\omega+\frac{\varepsilon}{2}$（很接近于 ω）的正弦波，但其

振幅是随时间而变化的 $2A\cos\frac{\varepsilon}{2}t$，振幅的最大值为 $2A$。振幅由零变为 $2A$ 而后又回复到零的整个历程称为“拍”（或称“节奏”），拍的周期 T_b 是 $\frac{2\pi}{\omega_1-\omega_2}$。这种形式的振动常被称为拍振。值得到注意的是一个“拍”只是振幅按 $\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)$ 规律变化的半个波，所以它的



(a) (b) (c)

图 1—9

周期只是这个余弦波的二分之一（图1—9a）。此外，振幅变为最小时，倘若 $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ 的大小为 $\frac{\omega_1-\omega_2}{2}$ 的偶数倍，则其相位突然改变方向（图 1—9b）。当二个组成振动的振幅不等时，合成振动的最小振幅为 A_1-A_2，拍振的形状如图 1—9c 所示。

拍振的现象会出现在双转子涡轮发动机中。当二个转子的转速很相近，各自激起的振动又属同一数量级时，可以测到这种拍振的波形。

二、方向相互垂直的二个简谐振动的合成

设有二个方向相互垂直的简谐振动

$$\left.\begin{aligned} x&=A\sin(\omega_1 t+\varphi_1)\\ y&=B\sin(\omega_2 t+\varphi_2)\end{aligned}\right\}\quad(\omega_1\gtreqless\omega_2) \tag{1—25}$$

其中 A 与 B 是振幅，φ_1 和 φ_2 是初始相位角，都是任意常量，取决于初始条件。这两个简谐振动的合成振动由 xy 平面上的平面轨迹表示，(1—25)式是这轨迹的参量方程式，参量为时间 t。

现在我们讨论 $\omega_1=\omega_2=\omega$ 的情况。这时(1—25)式可以写成为

$$\left.\begin{aligned} x&=A\sin(\omega t+\varphi_1)\\ y&=B\sin(\omega t+\varphi_2)\end{aligned}\right\} \tag{1—26}$$

从(1—26)式中消去参量时间 t，可以得到表示合成振动轨迹的关系式，

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-2\frac{xy}{AB}\cos(\varphi_1-\varphi_2)=\sin^2(\varphi_1-\varphi_2) \tag{1—27}$$

这是一个表示椭圆通式的二次方程式，这个椭圆的座标位置和大小取决于组成振动的振幅 A 和 B，以及初始相位角 φ_1 和 φ_2 或它们的相位差 $\varphi_1-\varphi_2$。

当 $\varphi_1-\varphi_2$ 等于四分之一周期，即 $(\varphi_1-\varphi_2)=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，则 $\sin(\varphi_1-\varphi_2)=1$、$\cos(\varphi_1-\varphi_2)=0$，则(1—27)式写成为