高等院校财经类专业核心课程

经济数学基础（三）

概率统计

解题思路和方法

主　编　袁荫棠
副主编　刘书田
编写者　袁荫棠　范培华

世界图书出版公司

高等院校财经类专业核心课程辅导教材

经济数学基础(三)

概率统计 解题思路和方法

主　编　袁荫棠
副主编　刘书田
编写者　袁荫棠　范培华

世界图书出版公司
北京・上海・广州・西安

图书在版编目(CIP)数据

概率统计解题思路和方法 / 袁荫棠，范培华编著.—北京:
世界图书出版公司北京公司，1998.2
（经济数学基础；3 / 袁荫棠，刘书田主编）
ISBN 7-5062-3666-4

I. 概… II. ①袁… ②范… III. ①概率论-解题 ②数理统计-解题 IV. O21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (98) 第 01682 号

书　　名：经济数学基础㈢　概率统计（解题思路和方法）
主　　编：袁荫棠　　副主编：刘书田
责任编辑：孔彦
出　　版：世界图书出版公司北京公司
印　　刷：河北香河新华印刷有限公司
发　　行：世界图书出版公司北京公司（北京朝内大街 137 号，100010）
销　　售：各地新华书店
开　　本：787 × 1092mm　1/16　印张：13.5　字数：33 万字
版　　次：1998 年 2 月第 1 版　1998 年 2 月第 1 次印刷
印　　数：00001-10000
书　　号：7-5062-3666-4/F · 49
定　　价：16.00 元

前　言

《经济数学基础》是高等学校财经类专业的核心课程之一,应广大读者学习该课程的需要,我们编写了本套书。

全书有以下特点:(1)以大纲为准　书中每章前面均写有〈要求与说明〉,它摘自国家教委颁布的《经济数学基础》教学大纲,强调读者应以教学大纲要求为准进行学习;(2)紧密结合教材　全书内容和章节编排都紧密结合教材,又比教材更加有条理、更加深入、更易于理解和掌握。在每节之前,不仅先概括主要概念、定理、公式等基本内容,而且还归纳出一些在理解概念与掌握方法时所需要的结论,正是这些结论往往在解题过程中能起到事半功倍的作用;(3)例题精析　本书例题的选择广泛和有代表性,以充分达到教学大纲的要求。在例题中,既有一般教科书和习题集中的典型题目,也有选自全国高教自考、全国文凭考试、全国研究生统考和全国 MBA 联考中的试题,而且还有作者根据多年教学实践自己编写的大量有启发性和指导性的例题。这些例题构思新颖、方法灵活。不仅有一般的计算题、应用题和证明题,还有填空题和选择题等。为适应不同读者的需要,在例题的编排上,注意到了难易结合,既有基本题,也有一定难度的综合题。对于所选例题,以内容为准进行归类,不仅指出同类题的解题思路和程序,并且指出了在应用方法和运算过程中常犯的错误,读者可以举一反三,触类旁通;(4)配有习题　在每章之后均配有习题供读者练习,在较系统地指导读者"怎样进行思考"之后,读者在这里可以进行基本训练,以增强自己解决问题的能力,并检验自己对所学知识掌握的程度。

读者阅读此书,可以开阔眼界,增强分析问题、解决问题和参加应试的能力。全书可以作为财经类和管理类学生学习期间和研究生考前的学习辅导书,也可以作为授课教师的参考书。对于参加成人教育和自学考试的读者,也不失为一本有指导价值的读物。

经统一策划和集体讨论之后,全书分别由教学经验丰富的教师执笔,并由袁荫棠(中国人民大学)任主编,刘书田(北京工业大学)任付主编。全书由《微积分》、《线性代数》和《概率统计》三个分册组成,其中,《微积分》分册由葛振三(一至四章)和刘书田(五至十章)编写;《线性代数》分册由范培华(第一章)和王新民(二至六章)编写;《概率统计》分册由袁荫棠(一至三章)和范培华(四至七章)编写。

全书在成书过程中,得到了北京大学王其文、中国人民大学胡显佑、张学贞、中央财政金融大学单立波、北京工业大学赵惠斌、刘国忠、北京商学院侯文起、中央电视大学冯泰、厦门大学陈亚贞、上海财经大学朱幼文、中南财经大学袁勇行、东北财经大学龚兆仁、苏州大学程庆云、湖南财经学院苏醒、西安石油学院肖筱南等各位专家与教授的支持和帮助,在此表示衷心的感谢。

书中如有不妥之处,恳请读者指正。

编者

1997 年 6 月

目　录

第一章　随机事件与概率

要求与说明

1　理解随机事件、随机事件的频数、频率、概率等概念.

2　掌握随机事件的运算,熟练掌握概率的基本性质、概率的乘法公式、条件概率及事件的独立性.

3　掌握全概公式、贝叶斯公式,并会解有关的问题.

4　掌握求古典型概率的条件,会计算较简单的古典型概率.

§1.1　随机事件

一　随机事件的概念

1　随机试验的特点

在给定的一组条件下,其可能出现的结果不止一个的试验称为随机试验,简称试验,它具有三个鲜明的特点:

(1)　重复性　在可控制条件下,试验可以或原则上可以重复进行.

(2)　明确性　试验的结果具有多种可能性,但是在试验之前可以明确一切可能出现的基本结果.

(3)　随机性　在一次试验中,某种结果出现与否是不确定的,在试验前不能准确地预言将会出现哪一种结果.

2　随机事件与基本事件

(1)　随机事件　在一次试验中可能出现,也可能不出现的结果称为随机事件.简称事件.

(2)　基本事件　在一次试验中,每一个可能出现的基本结果,称为基本事件,基本事件是最简单的随机事件,在每次试验中只能且必能发生该试验的一个基本事件.

(3)　必然事件　每次试验中一定发生的事件称为必然事件.记为 Ω.

(4)　不可能事件　每次试验中一定不发生的事件,称为不可能事件,记为 Φ.

3　随机事件的集合定义

我们把由一个试验的所有可能出现的基本结果组成的集合,称为该试验的样本空间.它就是必然事件 Ω;基本事件是仅包含样本空间 Ω 中的一个元素的单点集合;随机事件是样本空间 Ω 的一个子集;不可能事件是不包含 Ω 中任何一个元素的空集,样本空间 Ω 与空集 Φ 也可以看作是 Ω 的子集.由它们所定义的两个确定性事件,即必然事件与不可能事件,可以作为随机事件的两个极端情况,看作是特殊的随机事件.

二　随机事件间的关系与运算

我们利用集合论的概念与记法定义事件间的相互关系与运算,并将其归纳在表 1.1 内.

表 1.1

事件间关系与运算的文字叙述	集合论中的表示法	概率论中的含义
事件 A 包含事件 B(或事件 B 含于事件 A	$A \supset B$(或 $B \subset A$)	事件 B 发生,则事件 A 一定发生
事件 A 和 B 相等	$A = B$	事件 A 发生,则 B 一定发生,反之亦然.
事件 A 与 B 之和(或并)	$A \cup B$	两个事件 A、B 中,至少有一个事件发生.
有限个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n (n \geqslant 2)$ 的和(或并)	$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$	n 个事件 $A_1, A_2 \cdots, A_n$ 中至少有一个事件发生
可列个事件 $A_1, \cdots, A_n, \cdots$ 的和(或并)	$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$	可列个事件 $A_1, \cdots A_n, \cdots$ 中至少有一个事件发生
事件 A 与 B 的积(或交)	$A \cap B$(简记为 AB)	事件 $A \cap B$ 发生,当且仅当 A 与 B 同时发生
有限个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n (n \geqslant 2)$ 的积(或交)	$A_1 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n$ (简记为 $A_1 A_2 \cdots A_n$)	n 个事件 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 同时发生
可列个事件 $A_1, \cdots A_n, \cdots$ 的积(或交)	$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$	可列个事件 $A_1, \cdots A_n, \cdots$ 同时发生
事件 A 与 B 的差	$A - B$	事件 $A - B$ 发生,当且仅当事件 A 发生,B 不发生
事件 A 的逆事件(或对立事件)	$\overline{A} \triangleq \Omega - A$	事件 $\overline{A}$ 发生,当且仅当事件 A 不发生
事件 A 与 B 互不相容(或 A 与 B 互斥)	$A \cap B = \Phi$	事件 A 与 B 不可能同时发生

三　常用结论

(1) $\Phi \subset A \subset \Omega$

(2) $AB \subset A \subset A \cup B \qquad A - B \subset A \subset A \cup B$

(3) $\Phi \cap A = \Phi \qquad \Phi \cup A = A$

(4) $A \cap \overline{A} = \Phi \qquad \overline{A} \cup A = \Omega$

(5) $\bar{\bar{A}} = A \quad \overline{\Omega} = \Phi \quad \overline{\Phi} = \Omega$

(6) $A \cup A = A$

$(A - B) \cup A = A$

$(A \cup B) \cap A = A$

(7) $A - B$ 与 AB 互不相容，且 $A = (A - B) \cup AB$

(8) $A - B$、$B - A$、AB 两两互不相容，且 $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup AB$

(9) $A\overline{B}$、$\overline{A}B$、AB 两两互不相容，且 $A \cup B = A\overline{B} \cup \overline{A}B \cup AB$

(10) $A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A$

(11) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(AB)C = A(BC)$

(12) $A(B \cup C) = AB \cup AC$

$A \cup (BC) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(13) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} \quad \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$

以上各式中的 A、B、C、A_i 等均为任意随机事件.

说明 (1) 事件的运算非常重要，有关的常用结论务必熟悉，它不仅在讨论各事件间关系时经常用到，而且在今后的概率计算中，也经常需要将一些事件用另一些事件的运算来表示.

(2) 用文氏图有利于分析和理解事件间的关系和运算.

(3) 采用集合论中的概念和记法，用集合间的关系与运算法则讨论事件间的关系与运算往往是很方便的.

【例 1】 掷一颗骰子的试验，观察其出现的点数，记事件 A = "掷出偶数点"，B = "掷出奇数点"，C = "掷出点数小于 5"，D = "掷出 1 点".讨论上述各事件间的关系.

分析 在研究事件间关系和运算时，为了利用集合间的关系和运算法则，我们常要采用集合论中的概念与记法.首先写出试验的样本空间 Ω，然后写出所讨论的每个随机事件相应的集合，最后讨论各集合，即各事件间的关系.

解 在掷一颗骰子的试验中，全部可能出现的基本结果有六个，即掷出 1 点、2 点、…、6 点.该试验的样本空间及各事件分别为：

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{2, 4, 6\} \quad B = \{1, 3, 5\} \quad C = \{1, 2, 3, 4\} \quad D = \{1\}$

由上可见： $B \supset D \quad C \supset D$

A 与 B 为对立事件，即 $B = \overline{A}$.

A 与 D 互不相容.

【例 2】 简化下列各式：

(1) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$

(2) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$

(3) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)$

(4) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$

分析 由于每一个随机事件都是由样本空间中的一些元素组成的集合，它们都是样本空间的

子集.因此利用集合的运算法则很容易将上述各事件的运算进行简化.

解 (1) $(A \cup B) \cap (B \cup C) = (A \cup B)B \cup (A \cup B)C$

$$= AB \cup B \cup AC \cup BC$$

$$= B \cup AC$$

最后一步是由于 $B \supset AB, B \supset BC$,因此有 $B \cup AB \cup BC = B$.

(2) 直接应用(1)的结果,有

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = (B \cup A) \cap (A \cup \overline{B}) = A \cup B\overline{B} = A$$

(3) 应用(2)的结果,有

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap (\overline{A} \cup B) = A\overline{A} \cup AB = AB$$

(4) 两次应用(2)中结果,有

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A, \quad (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \overline{A}$$

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = A\overline{A} = \Phi$$

或应用(3)中结果,有

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$$

$$= AB(\overline{A} \cup \overline{B}) = AB\overline{A} \cup AB\overline{B} = \Phi$$

【例3】 设事件 A、B、C 都是某个试验中的随机事件.事件 E 表示 A、B、C 三个事件中至少有一个事件发生,则 $E =$ ( ).

(A) $A \cup B \cup C$ (B) $\Omega - \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

(C) $A \cup (B - A) \cup (C - (A \cup B))$ (D) $A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$

解 应选择(A)、(B)、(C).这是由于事件 E 就是三个事件之和的定义,因此 $E = A \cup B \cup C$.

对于(B),$\Omega - \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = \Omega - \overline{A \cup B \cup C}, = A \cup B \cup C$

对于(C),$A \cup (B - A) = A \cup B$

$$(A \cup B) \cup (C - (A \cup B)) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$$

对于(D),$AB\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$ 表示三个事件 A、B、C 中仅发生其中一个事件,而另两个事件不发生,这就排除了它们中任何两个事件同时发生以及三个事件同时发生的情况.与三个事件中至少有一个事件发生不相等.事实上,$E \supset A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C$.

【例4】 设 x 表示一个沿数轴做随机运动的质点位置,说明下列各对事件间的关系:

(1) 事件 $A_1 =$ "$|x - a| < \sigma$" 与 $B_1 =$ "$x - a < \sigma$" $(\sigma > 0)$;

(2) 事件 $A_2 =$ "$x > 20$" 与 $B_2 =$ "$x \leqslant 20$";

(3) 事件 $A_3 =$ "$x > 22$" 与 $B_3 =$ "$x < 19$".

解 记该试验样本空间为 Ω,则

$$\Omega = \{x: \ -\infty < x < +\infty\}$$

(1) $A_1 = \{x: \ a - \sigma < x < a + \sigma\}$

$B_1 = \{x: \ x < a + \sigma\}$

易见,$B_1 \supset A_1$

(2) $A_2 = \{x : x > 20\}, B_2 = \{x : x \leqslant 20\}$

显然,A_2 与 B_2 为对立事件,当然它们也是互不相容的.

(3) $A_3 = \{x : x > 22\}$ 与 $B_3 = \{x : x < 19\}$ 为互不相容事件.

说明 从(2)和(3),我们看到互不相容事件与对立事件是两种不同的关系.两个互不相容的事件,在一次试验中仅仅是不能同时发生,并不能排除它们同时都不发生的可能性.比如(3)中,若

$x = 21$，它既不大于22，又不小于19，但是两个对立事件，它们在一次试验中不仅不能同时发生，而且也不可能同时不发生，即两个对立事件在一次试验中不但是仅能发生其中之一，而且也必然发生其中之一，比如(2)中若A_2发生，即$x > 20$，则B_2，即"$x \leqslant 20$"就不可能发生；若"$x > 20$"不发生，即x不大于20，则x必小于或等于20，即B_2一定发生. 因此我们得出结论：两个对立事件一定是互不相容事件.

【例5】 事件A与B相容，记$C = AB, D = A \cup B, E = \overline{A} \cup \overline{B}, F = A - B$，说明事件$A$、$C$、$D$、$E$、$F$的关系.

解 由于$A \supset AB, A \supset A - B, A = (A - B) \cup AB, A \cup B \supset A, \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{AB}$，因此有$D \supset A \supset C, D \supset A \supset F, E \supset F$.

C与E为对立事件，即$E = \overline{C}$；C与F互不相容；$A = C \cup F$.

说明 此例可见，在讨论各事件关系时，熟悉我们所总结的常用结论是非常必要的. 我们反复强调这一点，是因为不少读者在概率论学习入门时，忽略了对这些结论的掌握，以致增加了解题的困难.

【例6】 已知事件A与B是对立事件，求证$\overline{A}$与$\overline{B}$也是对立事件.

证 由于A与B是对立事件，因此$AB = \Phi$，且$A \cup B = \Omega$.

$$\overline{A}\,\overline{B} = \overline{A \cup B} = \Omega - (A \cup B) = \Phi$$

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{AB} = \Omega - (AB) = \Omega$$

§1.2 随机事件的概率

一 古典概率

设试验的样本空间中所含基本事件总数为有限个，并且每个基本事件发生的可能性都一样，则随机事件A的概率定义为

$$P(A) = \frac{A\text{ 中所含基本事件个数}}{\text{试验的基本事件总数}} \triangleq \frac{\# A}{\# \Omega}$$

这样定义的概率称为**古典概率**. 符合上述假定的概率模型称为**古典概型**. 其中$\# A$和$\# \Omega$分别表示有限集A和样本空间中包含的元素(即基本事件)个数.

* 二 几何概率

假定Ω是$R^n (n = 1,2,3)$中任何一个可度量的区域，从Ω中"等可能地"选择一点，则在相应的随机试验中，该试验的样本空间就是Ω. 我们设A为Ω的一个可度量的子集，则事件A的概率定义为

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

这个公式定义的概率称为**几何概率**. 符合上述假定的概率模型称为**几何概型**. 其中，$\mu(A)$与$\mu(\Omega)$分别表示可度量区域A与Ω的容积. 这里的容积指的是长度、面积和体积的总称.

三 统计定义

在不变的一组条件下，重复进行大量试验，事件A发生的次数(又称频数)m与试验的总次数n的比值，即事件A发生的频率$f(A)$，呈现某种稳定性，它在某一数值p附近摆动，一般说来，随着

试验次数 n 的增大,摆动的幅度将会减少,我们称这个客观存在的频率稳定值 p 为事件 A 的概率,记作 $P(A)=p$. 但是,在很多情况下,无法确定出 p 的值,通常只是用频率值 $f(A)=m/n$ 近似地估计概率 $P(A)$ 的大小.

四　概率论的公理化结构

从古典概率、几何概率和统计概率中,我们可以抽象出随机事件概率最基本的三个性质.在建立概率论的公理化结构时,我们强调定义在样本空间 Ω 的子集 A 上的集合函数 $P(A)$.即随机事件 A 的概率必须满足下述三个公理:

【公理 1】 $P(A)\geqslant 0$

【公理 2】 $P(\Omega)=1$

【公理 3】 **可列可加性**,即对于可列个两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$,有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

五　概率论公理的重要推论

(1) $P(\varnothing)=0$

(2) **有限可加性**.

设有限个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

其中最常用的是 $n=2$ 的情形:事件 A 与 B 互不相容,有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

(3) 两个对立事件的概率和为 1,即 $P(\overline{A})=1-P(A)$

(4) 若 $A\supset B$,有 $P(A-B)=P(A)-P(B)$

(5) 若 $A\supset B$,则 $P(A)\geqslant P(B)$

(6) $P(A)\leqslant 1$

(7) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

一般地,当 $n\geqslant 2$ 时,有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\cdots+(-1)^{n+1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

上述各结论中的 A、B、C、$A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均为任意随机事件.

六　有关公式与法则

1　排列　从 n 个不同元素中任取 m 个不同的元素,按照一定的顺序排成一列,所有排列种数记为 P_n^m,则

$$P_n^m=\begin{cases}0 & m>n\\ \dfrac{n!}{(n-m)!} & m<n\\ n! & m=n\end{cases}$$

规定 $0!=1$

2　可重复排列　从 n 个不同元素中,每次取出一个元素,观察后放回去,第二次再从中取出一个元素,观察后再放回去.如此重复 m 次,将 m 次观察到的元素按照一定顺序排成一列,其排列种数记为 N,则

$$N = n^m$$

3　组合　从 n 个不同元素中,取出 m 个不同元素,不考虑顺序组成一组,其组合总数记为 C_n^m,则

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{m\,!} = \frac{n\,!}{m\,!(n-m)!} \qquad (m \leqslant n)$$

当 $m > n$ 时,$C_n^m = 0$

4　组合性质:

(1)$C_n^m = C_n^{n-m}$

(2)$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$

(3)$\sum\limits_{k=0}^{r} C_n^k C_m^{r-k} = C_{n+m}^r$

(4)$\sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n$

5　加法法则　设一件工作可以由 m 条不同途径中之任何一条途径均可以完成,而第 i 条途径有 $n_i(i = 1,2,\cdots,m)$ 种不同方案,则完成该件工作的所有不同方案总数为 $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$.

6　乘法法则　设一件工作需要经过前后 m 个步骤才能完成.而第 i 个步骤中有 $n_i(i = 1,2,\cdots,m)$ 种不同方案,则完成该件工作的所有不同方案总数为 $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_m$.

【例 1】　在十个整数 0,1,2,…,9 中,任取四个不同的数字,计算它们能够组成一个四位偶数的概率.

解　设事件 A 表示"所取出的四个不同数字能够组成一个四位偶数".样本空间所含元素的个数,即该试验的基本事件总数就是从十个数字中任取四个不同数字的全部不同的等可能取法.它共有 P_{10}^4 种.其中奇、偶数各占一半.而四位偶数应从这些偶数中去掉千位数字是 0 的三位偶数.即

$$P(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{5 \times 9 \times 8 \times 7 - 8 \times 7 \times 4}{10 \times 9 \times 8 \times 7} = \frac{41}{90}$$

【例 2】　现有号码各异的五双运动鞋(编号为 1,2,3,4,5).一次从中任取四只,计算四只中的任何两只都不能配成一双的概率.

解法一　设事件 A = "四只鞋尺码各异,全不成双",则事件 A 相应于从五双鞋中任取四双鞋有 C_5^4 种取法,再从取出的四双鞋中,每双鞋取一只鞋有 $C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1$ 种取法,依乘法法则有

$$\# A = C_5^4 C_2^1 C_2^1 C_2^1 C_2^1 = 80$$

$$\# \Omega = C_{10}^4 = 210$$

$$P(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{8}{21} \approx 0.38$$

解法二　事件 A 相应于从五只左(或右)脚鞋中取四只,有 $2C_5^4$ 种取法;或从左(或右)脚鞋中取三只,同时从右(或左)脚鞋中再取一只,使之与前而所取的三只不成双.有 $2C_5^3C_2^1$ 种取法;或从左、右脚鞋子中种取两只使之不成双,有 $C_5^2C_3^2$ 种取法.因此有

$$\# A = 2C_5^4 + 2C_5^3C_2^1 + C_5^2C_3^2 = 80$$

$$P(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{80}{210} \approx 0.38$$

说明 在例1中，若认为 $P(A)=0.5$ 则是错误的，因为诸如0132、0948、0246等四个数字组成的数既不为奇数，又不是四位偶数，而是三位偶数.因此在 $\# A$ 的计算时，应从全部偶数($5\times 9\times 8\times 7$个)中去掉上述由数字0作为千位数字的三位偶数.否则将会犯多算 $\# A$ 的错误.而在例2的解法二中，在计算 $\# A$ 中，首先若将 $C_5^2C_3^2$ 也二倍，即认为 $\# A=2C_5^4+2C_5^3C_2^1+2C_5^2C_3^2=110$.将会出现重复计算的错误.比如事件"先从五只左脚鞋子中取出尺码为1号与2号的两只鞋，又从右脚的3,4,5号鞋中取出3号与4号两只鞋，"与事件"先从五只右脚鞋子中取出尺码为3号与4号的两只鞋，再从左脚的1,2,5号鞋子中取出1号与2号两只鞋"，它们是同一个基本事件.其次若将 C_5^4 与 $C_5^3C_2^1$ 不进行二倍，又会产生漏算的错误.因此，古典型概率的计算问题，关键是正确计算出事件 A 中所含基本事件的个数，又称有利于 A 的基本事件个数 $\# A$，既不能多算，又不能漏算.这往往是其难点所在.仔细分析构成事件 A 的内含是计算其 A 中所含基本事件个数 $\# A$ 的很有效的方法.

【例3】 一间学生宿舍中，住有六位同学，计算下列事件的概率：

(1) 六个人中至少有一人生日在十月份的概率 $P(A)$；

(2) 六个人中恰好有四个人的生日在十月份的概率 $P(B)$；

(3) 六个人中恰好有四个人的生日在同一个月份内的概率 $P(C)$.

(假定每人生日在各个月的可能性相同)

解 每人生日都可能在十二个月中的任何一个月份.六个人生日所在月份的全部等可能的不同排法总数为 12^6，它们组成了该试验的样本空间 Ω，即 $\#\Omega=12^6$.

(1) $\overline{A}$ 是"至少有一个人生日在十月份"这一事件的对立事件，它表示"六个人的生日都不在十月份"，他们的生日可以在其它十一个月中的任何一个月份，$\#\overline{A}=11^6$

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{\#\overline{A}}{\#\Omega}=1-\left(\frac{11}{12}\right)^6$$
$$\approx 0.4067$$

(2) 事件 B 相应于六个人中有四个人生日都在十月份，而另两个人生日在其它十一个月份内，因此

$$\# B=C_6^4\times 11^2$$

$$P(B)=\frac{\# B}{\#\Omega}=\frac{15\times 11^2}{12^6}\approx 0.0061$$

(3) 恰好有四个人生日在十月份与恰好有四个人生日在其它任何一个月份的概率是一样的.

$$P(C)=\frac{\# C}{\#\Omega}=\frac{C_{12}^1\times C_6^4\times 11^2}{12^6}\approx 0.0073$$

【例4】 设有大小相同、标号分别为1,2,3,4,5的五个球，同时有标号为1、2、…、10的十个空盒，将五个球放入这十个空盒中，假设每个球放人任何一个盒子的可能性都是一样的，并且每个空盒可以同时容纳五个以上的球.计算下列事件的概率：

(1) $A=$"某指定的五个盒子中各有一个球"；

(2) $B=$"每个盒子中最多只有一个球"；

(3) $C=$"某指定的盒子内不空".

解 每个球都有十种不同放法，五个球放入十个空盒中，全部不同的等可能放法共有 10^5 种，它们组成了该试验的样本空间 Ω.

(1) 事件 A 为"某错定的五个盒子中各有一个球"，相应于五个空盒已经指定，只错将五个球

进行排列次序后各放入一个指定的空盒内，因此

$$\# A = 5! \qquad \# \Omega = 10^5$$

$$P(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{5!}{10^5} = 0.0012$$

(2) 事件 B 相应于五个球放进五个空盒中，且每盒只有一个球. 它相应于先从十个空盒中确定五个空盒，有 C_{10}^5 种方案；然后再在所选定的五个空盒中各放入一个球. 依乘法法则有

$$\# B = C_{10}^5 \times 5!$$

$$P(B) = \frac{\# B}{\# \Omega} = \frac{C_{10}^5 \times 5!}{10^5} = 0.3024$$

(3) $\overline{C}$ 表示"指某定的盒子内没有球"，即"五个球都放入其它九个盒子中"

$$\# \overline{C} = 9^5$$

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{9^5}{10^5} = 0.40951$$

说明 (1) 计算古典型概率问题，为了确定一个事件所含基本事件个数，我们有时需要分析构成该事件的具体内含，这经常会用到排列、组合公式以及前面提到的加法法则(例 2 解法二) 与乘法法则(例 2 解法一、例 3(2)、(3) 与例 4(2).)

(2) 应用对立事件概率的和为 1，往往可以使问题大大简化.

一般地，计算若干事件中至少发生一件的概率，用其对立事件求解比较方便. 比如，例 3(1) 与例 4(3)

【例 5】 从一副扑克牌(52 张) 中，任取三张(不重复抽取)，计算取出的三张牌中至少有两张花色相同的概率 $P(A)$.

解法一 事件 A 相应于先从四种花色中选定一种花色，再从选定的该花色中抽取三张牌；或者先从四种花色中选定一种花色，并从该花色中抽取两张牌，然后再从剩余三种花色的 39 张牌中抽取一张牌. 因此

$$\# A = C_4^1 C_{13}^3 + C_4^1 C_{13}^2 C_{39}^1 = 13312$$

$$\# \Omega = C_{52}^3 = 22100$$

$$P(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{13312}{22100} \approx 0.602$$

解法二 事件 $\overline{A}$ 相应于取出的三张牌花色各异，因此有

$$\# \overline{A} = C_4^3 \times C_{13}^1 \times C_{13}^1 \times C_{13}^1 = 8788$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{8788}{22100} \approx 0.602$$

【例6】 一批产品有 N 件，其中有 N_1 件次品($N_1 < N$)，N_2 件正品($N = N_1 + N_2$). 从 N 件产品中一次抽取(不重复)n 件($n < N$)，计算其中恰有 m 件次品的概率，并讨论 m 可以取哪些值.

解 记取到的 n 件产品中次品件数 m 的最小取值为 h，最大取值为 l，则当正品数 $N_2 \geqslant n$ 时，则有可能取全部是正品，即次品件数 m 最小取值为 0，当 $N_2 < n$ 时，则 n 件中至少有 $n - N_2$ 件次品. 因此 m 可能取到的最小值 h 为

$$h = \begin{cases} 0 & N_2 \geqslant n \\ n - N_2 & N_2 < n \end{cases}$$

即 $h = \max\{0, n - N_2\}$

类似地

$l = \min(N_1, n)$

记事件 A_m 表示取出的 n 件产品中有 m 件次品，则

$$P(A_m) = \frac{C_{N_1}^{m} C_{N_2}^{n-m}}{C_{N_1+N_2}^{n}} \qquad m = h, h+1, \cdots, l$$

显然，$h < l$

说明　若应用组合中的规定：当 $k > r$ 时，$C_r^k = 0$. 而不可能事件的概率为0，则也可以认为 m 的取值为 $0, 1, 2, \cdots, n$ 共 $n+1$ 个值，不过其中有可能取某些值的概率为零.

* **例7**　一根长为 l 的小棍，将其在任意两点折断. 计算所折成的三段能构成一个三角形的概率.

解　这是一个样本空间中含有无限多"等可能"基本事件的概率模型. 应该用几何概率公式计算.

设事件 A 表示折成的三段能构成一个三角形. x, y 分别表示两个折断点与该棍左端点的距离，则

$$\Omega = \{(x, y):\ 0 < x < y < l\}$$

$$A = \{(x, y):\ 0 < x < \frac{l}{2}, 0 < y - x < \frac{l}{2}, 0 < l - y < \frac{l}{2}\}$$

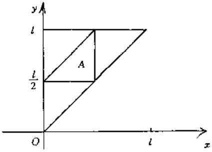

图 1.1

由图 1.1，容易计算出 $\mu(\Omega) = \frac{l^2}{2}$，　$\mu(A) = \frac{l^2}{8}$

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = 0.25$$

§ 1.3　条件概率、乘法公式与事件的独立性

一　条件概率

设 A、B 为任意两个随机事件，且 $P(B) > 0$，我们称在已知事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的概率为条件概率. 为了与无条件概率 $P(A)$ 相区别. 将这个条件概率记作 $P(A \mid B)$，它定义为

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

容易验证，如果 $P(B) > 0$，条件概率具有如下三条性质：

(1)　对任意事件 A，$P(A \mid B) \geqslant 0$

(2)　$P(\Omega \mid B) = 1$；

(3)　对任意可列个两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mid B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \mid B)$$

二　乘法公式

设 $P(B) > 0$，由条件概率定义，有

$$P(AB) = P(B)P(A \mid B)$$

类似地，如果 $P(A) > 0$，则

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A)$$

对于 $n(n \geqslant 2)$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,如果 $P(A_1, A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$,则

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

三　事件的独立性

(1)　如果 $P(AB) = P(A)P(B)$,则称事件 A 与 B 是相互独立的,简称 A 与 B 独立.

(2)　如果 $P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j), i \neq j, i, j = 1,2,3$,则称事件 A_1, A_2, A_3 是两两独立的.

(3)　如果事件 A_1, A_2, A_3 是两两独立的,并且 $P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$,则称 A_1, A_2, A_3 是相互独立的.

(4)　如果对于任意 $k(2 \leqslant k \leqslant n)$ 个有序整数,$1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant n$,恒有 $P(A_{j_1}A_{j_2}\cdots A_{j_k}) = P(A_{j_1})P(A_{j_2})\cdots P(A_{j_k})$,则称 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是相互独立的.

(5)　可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中,如果对于任意正整数 $n(n \geqslant 2)$,事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都是相互独立的,则称随机事件序列 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是相互独立的.

四　贝努里概型

(1)　设有几个试验 $E_1, E_2, \cdots, E_n$,如果其中任何一个或几个试验的结果都不影响其它试验中各种结果发生的概率,则称 n 个试验 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 是相互独立试验.

(2)　如果对于任意正整数 $n(n \geqslant 2)$,n 个试验 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 都是相互独立的,则称无限试验序列 $E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots$ 是相互独立试验序列.

(3)　只有两个对立结果的试验,称为贝努里试验.

(4)　如果 n 个试验 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 满足:

①　n 个试验是相互独立的;

②　每次试验 $E_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 中只可能出现两种结果:事件 A 发生或事件 $\overline{A}$ 发生,并且每次试验中事件 A 发生的概率都相等,则称这 n 个试验 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 为 n 重贝努里概型.

(5)　如果对于任意正整数 $n(n \geqslant 2)$,n 个试验 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 都是 n 重贝努里概型,则称无限独立试验序列 $E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots$ 是无限重贝努里概型.

(6)　**贝努里公式**　在 n 重贝努里试验概型中,设事件 A 在每次试验中发生的概率都是 $p(0 < p < 1)$,记事件 $B_k(0 \leqslant k \leqslant n)$ 表示"在 n 次试验中事件 A 恰好发生 k 次",则

$$P(B_k) \triangleq b(k; n, p) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad \text{其中 } q \triangleq 1 - p, k = 0,1,2,\cdots,n.$$

五　常用结论

(1)　如果 A 与 B 独立,有

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)P(\overline{B})$$

(2)　事件 A 与 B 独立

$\Longleftrightarrow$　A 与 $\overline{B}$ 独立

$\Longleftrightarrow$　$\overline{A}$ 与 B 独立