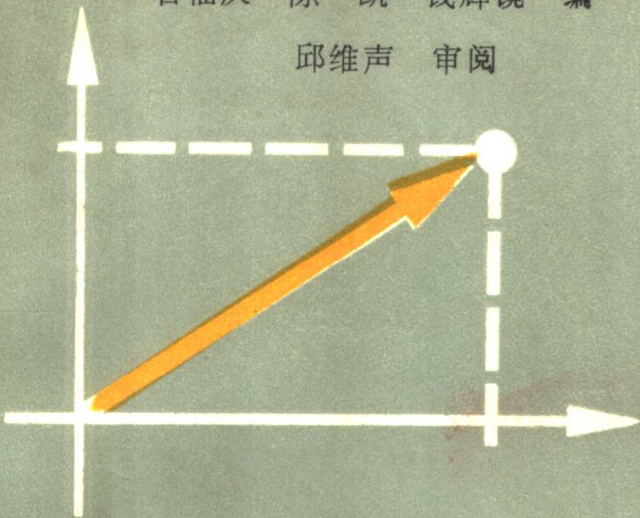
XIANXING DAISHU FUDAO

石福庆 陈 凯 钱辉镜 编

邱维声 审阅



线性代数辅导

中 国 铁 道 出 版 社

线性代数辅导

石福庆　陈　凯　钱辉镜　合编

邱维声　　审阅

中国铁道出版社出版

责任编辑　冯秉明　封面设计　王毓平

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092 $\frac{1}{32}$ 印张11.875 字数：272 千

1983年9月 第1版　1983年9月 第1次印刷

印数：0001—55,000册　定价：1.20元

内 容 简 介

本书是按中央广播电视大学本课程教学大纲的要求和讲授的内容编写的。包括数学归纳法、行列式、线性方程组、矩阵、矩阵的标准形和二次齐式等六章。结合电视教学，内容由浅入深，叙述详尽。通过对大量典型例题的剖析，辅导学生理解基本概念，掌握基本运算能力。每章还附有小结及复习思考题，帮助学生总结提高，适于自学。同时本书又具有理工科大学《线性代数》应有的基本内容。

本书可供广播电视大学和职工大学学员及自学者使用，也可供普通高等工科院校学生及辅导教师参考使用。

前　言

为了帮助电视大学学员，职工大学学生以及自学者学好“线性代数”，我们编写了这本辅导教材。

本书是按中央广播电视大学关于本课程的教学大纲要求和讲授内容而编写的。我们补充编写了第一章数学归纳法，作为学习线性代数的预备知识。第二章至第六章，每章按下述四个部分编写：

一、主要内容：在这一部分中说明本章学习了哪些内容；给出了基本概念的定义和常用公式，同时也说明了它们之间的关系。

二、要求：在这部分里具体地明确了对各章内容应掌握的程度，这是以中央广播电视大学本课程的教学大纲为依据的。

三、典型例题分析：它是每章的重点，在这一部分选择了大量有代表性的典型例题，由浅入深，由易到难。通过剖析解题的思路，总结归纳解题的方法，辅导学生掌握基本内容和基本的运算技能。在这一部分也选择了学生在学习本课程时容易出错的典型例题，通过分析，以使学生更好地掌握基本概念和运算性质。作者力图通过对典型例题的分析，提高学生分析问题和解决问题的能力。

四、思考题及习题：本部分列出一些有关概念方面的思考题以及习题，供学生在复习时参考。

由于作者水平有限，时间仓促，本书中错误在所难免，请广大读者批评指正。

在本书的编写过程中，得到北京大学、中央广播电视大学等许多单位的老师和有关同志的帮助，在此表示衷心的感谢。

编　　者

1982年5月于北京

目　录

第一章　数学归纳法

数学归纳法是数学证明的一个重要方法。此方法在线性代数中经常得到运用。在这一章里，我们将数学归纳法作为学习线性代数的预备知识，简要地介绍一下。

一、由特殊到一般的推理方法

人们在实践中接触客观世界，逐步认识客观世界，在这个过程中，我们往往采用一种推理的方法：首先考察和研究某些个别的特殊事物，再由这些事物总结和抽象出带有一般性的规律和结论。这样的方法叫作归纳法。

在数学中，我们研究数与形时，常常要采用由特殊到一般的归纳法——数学归纳法。这方面的例子很多，下面列举几例说明。

例 1　求数列

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1,\ n$$

的n项之和S_n。

解　特殊情况

$n=1 \quad S_1=1$

$n=2 \quad S_n=1+2=3$

$n=3 \quad S_n=1+2+3=6$

$n=4 \quad S_4=1+2+3+4=10=\dfrac{4(4+1)}{2}$

$n=5 \quad S_5=1+2+3+4+5$

$$=15=\frac{5(5+1)}{2}$$

一般规律：

$$S_n=1+2+3+4+\cdots+(n-1)+n$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}$$

例 2　求自然数中前n个奇数的和。

解　特殊情况：

$n=1$	1	$=1=1^2$
$n=2$	$1+3$	$=4=2^2$
$n=3$	$1+3+5$	$=9=3^2$
$n=4$	$1+3+5+7$	$=16=4^2$
$n=5$	$1+3+5+7+9$	$=25=5^2$

一般规律：

$$1+3+5+7+9+\cdots+(2n-1)=n^2$$

例 3　求半径为R的圆内接正n边形的面积。

解　特殊情况：

$n=3 \quad S_3=\frac{3}{4}\sqrt{3}R^2=3\cdot\frac{1}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{3}$

$n=4 \quad S_4=2R^2=4\cdot\frac{1}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{4}$

$n=5 \quad S_5=\frac{1}{16}R^2(10-2\sqrt{5})\sqrt{25+10\sqrt{5}}$

$$=5\cdot\frac{1}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{5}$$

$n=6 \quad S_6=\frac{3}{2}\sqrt{3}R^2=6\cdot\frac{1}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{6}$

一般规律（当$n\geqslant3$）：

$$S_n=\frac{1}{2}n\cdot R^2\sin\frac{2\pi}{n}$$

例 4 求函数$y=f(x)=\sin x$的n阶导数。

解 特殊情况：

$n=1$ $f'(x)=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$

$n=2$ $f''(x)=\cos(x+\frac{\pi}{2})=\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2})$

$n=3$ $f'''(x)=\cos(x+2\cdot\frac{\pi}{2})=\sin(x+3\cdot\frac{\pi}{2})$

$n=4$ $f^{(4)}(x)=\cos(x+3\cdot\frac{\pi}{2})$

$$=\sin(x+4\cdot\frac{\pi}{2})$$

一般规律：

$$f^{(n)}(x)=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$$

例 5 计算定积分$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$

解 特殊情况：

$n=1$ $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

$n=2$ $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx=\frac{\pi}{4}=\frac{2-1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$

$n=3$ $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x dx=\frac{2}{3}=\frac{3-1}{3}\cdot 1$

$n=4$ $I_4=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x dx=\frac{3\pi}{16}$

$$=\frac{(4-1)}{4}\cdot\frac{(4-3)}{(4-2)}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$n=5$ $I_5=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x dx=\frac{8}{15}$

$$=\frac{(5-1)}{5}\cdot\frac{(5-3)}{(5-2)}\cdot 1$$

$$n=6\qquad I_6=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 xdx=\frac{15\pi}{96}$$

$$=\frac{(6-1)}{6}\cdot\frac{(6-3)}{(6-2)}\cdot\frac{(6-5)}{(6-4)}\cdot\frac{\pi}{2}$$

一般规律：

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\dfrac{n-5}{n-4}\\ \cdots\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}\quad n\text{为偶数}\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\dfrac{n-5}{n-4}\\ \cdots\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 1\quad n\text{为奇数}\end{cases}$$

以例1为例，当我们由 $n=1$，2，3，4，5这些特殊情况所得到的S_n适合下式：

$$S_n=\frac{n(n+1)}{2}\tag{1}$$

那么是否对于一切自然数n，S_n都适合公式（1）呢？这是需要加以证明的。用什么方法来证明（1）式对于一切自然数 n 都成立呢？这就需要用到下一节将要介绍的数学归纳法。

二、数学归纳法的两种类型

数学归纳法有不同的形式及类型。通常采用的是第一数学归纳法和第二数学归纳法两种。它们是：

定理一　（第一数学归纳法原理）

设有一个与自然数 n 有关的命题，若

1° 当 $n=1$ 时命题成立；

2° 假设 $n=k$ 时命题成立，可以推出 $n=k+1$ 时命题也成立；那么命题对于一切自然数 n 都成立。

定理二 （第二数学归纳法原理）

设有一个与自然数 n 有关的命题，若

1° 当 $n=1$ 时命题成立；

2° 假设命题对于 $n\leqslant k$ 的一切自然数都成立，则 $n=k+1$ 时命题也成立；那么命题对于一切自然数 n 都成立。

关于这两个定理的证明，要用到有关集合方面的知识，如最小数原理等。在此不作叙述。

应用第一数学归纳法，证明某个与自然数 n 有关命题时的步骤是：

第一步，验证 $n=1$ 时，命题为真（命题成立）；

第二步，假设当 $n=k$ 时命题成立，需要证明 $n=k+1$ 时命题也成立。

由这个证明过程可以看到，通过第一步，保证了 $n=1$ 时，命题成立。再通过第二步的证明，就保证了对于一切的自然数 n，命题都成立。例如对于 $n=2$，有了第一步 $n=1$ 成立，又由第二步，取 $k=1$，显然保证了 $n=k+1=2$ 的成立，依次可推断 $n=3$，4，…，的一切自然数，命题都成立。由此可见第一数学归纳法的推理方法是合理的。运用第二数学归纳法证明问题时，第一步要证明 $n=1$ 时命题成立；第二步假设 $n\leqslant k$ 时命题成立，需要证明 $n=k+1$ 时命题也成立。通过以上两步，可以推断对于一切自然数 n 原命题都成立。因此第二数学归纳法是合乎逻辑推理的。

上述两种类型的数学归纳法的不同之处，在于第二步。

在某些与自然数 n 有关的命题中，可能要遇到一些递推关系。同一个数学表达式中涉及到自然数 $n-1$，n 和 $n+1$ 等。对于这样的命题，在采用数学归纳法证明时，证明方法有所改变。譬如，通过两个相邻结果的正确性，去推断第三个结果的正确性。这时运用第二数学归纳法时，第一步要验证 $n=1$，$n=2$ 时命题成立；第二步假设 $n=k-1$，$n=k$ 时命题成立，需要证明 $n=k+1$ 时命题也成立。这方面的例子，在线性代数中常遇到的。

三、数学归纳法举例

例 6　证明 $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

证　当 $n=1$时，左边$=1$，右边$=\dfrac{1\cdot(1+1)}{2}=1$，等式成立。

假设当 $n=k$ 时等式成立，即

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

则当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}&1+2+3+\cdots+k+(k+1)\\&=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\&=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\end{aligned}$$

由此可知，当 $n=k+1$ 时等式也成立。由数学归纳法，对于任何自然数 n 原等式均成立。

例 7　若$f(n)=4^{n+1}-3n-4$，试证对于任意自然数 n，$f(n)$均能被 9 整除。

证 当$n=1$时，$f(1)=9$，命题成立；假设当$n=k$时命题成立，即有

$$f(k)=4^{k+1}-3\times k-4=9N$$

（其中N为某一个正整数）

当$n=k+1$时，

$$\begin{aligned}f(k+1)&=4^{k+1+1}-3(k+1)-4\\&=4\times4^{k+1}-3k-3-4\\&=4\times4^{k+1}-3k-7\\&=4(4^{k+1}-3k-4)+4(3k+4)-3k-7\\&=4\times9N+12k+16-3k+7\\&=36N+9(k+1)\end{aligned}$$

上式中k和N均是正整数。表明当$n=k+1$时命题也成立。因此，由数学归纳法证明原命题对于一切自然数n均成立。

例8 试证n边形的内角之和等于$(n-2)\pi$。

证 因为本命题当$n\geqslant3$时才有意义，所以要从$n=3$开始证明。

当$n=3$时，三角形内角之和为$\pi=(3-2)\pi$，命题成立。

假设$n=k$（$k\geqslant3$）时命题成立，即图1-1所示的k边形$A_1A_2A_3\cdots A_k$内角之和为$(k-2)\pi$。

当$n=k+1$时，$k+1$边形$A_1A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}$（图1-2）的内角之和等于$k$边形$A_1A_2A_3\cdots A_k$内角之和再加$\triangle A_1A_kA_{k+1}$的三个内角。即$k+1$边形之内角和是$(k-2)\pi+\pi=[(k+1)-2]\pi$。这就证明了当$n=k+1$时命题也成立。因此由数学归纳法证明了对于$n\geqslant3$的一切自然数$n$，原命题均成立。

例9 证明三角恒等式

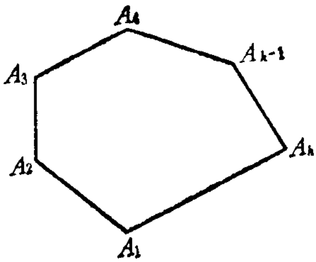


图 1-1

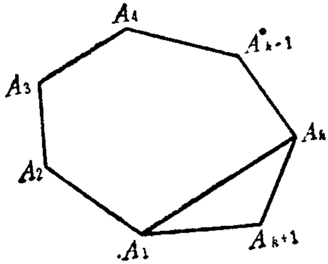


图 1-2

$$\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha+\cdots+\cos(2n-1)\alpha$$
$$=\frac{\sin2n\alpha}{2\sin\alpha}$$

其中 n 为任何自然数，$\sin\alpha\neq0$。

证 当 $n=1$ 时，

左边 $=\cos\alpha$， 右边 $=\dfrac{\sin2\alpha}{2\sin\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha}=\cos\alpha$

等式成立。

假设当 $n=k$ 时等式成立，即有

$$\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha+\cdots+\cos(2k-1)\alpha$$
$$=\frac{\sin2k\alpha}{2\sin\alpha}$$

则当 $n=k+1$ 时，有

$$\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha+\cdots+\cos(2k-1)\alpha+\cos(2k+1)\alpha$$
$$=\frac{\sin(2k\alpha)}{2\sin\alpha}+\cos(2k+1)\alpha$$
$$=\frac{\sin(2k\alpha)+2\sin\alpha\cdot\cos(2k+1)\alpha}{2\sin\alpha}$$

$$=\frac{\sin(2k\alpha)+\sin 2(k+1)\alpha-\sin(2k\alpha)}{2\sin\alpha}$$

$$=\frac{\sin 2(k+1)\alpha}{2\sin\alpha}\quad(\sin\alpha\neq 0)$$

这就证明了当 $n=k+1$ 时，恒等式成立。因此，对于一切自然数 n 原等式恒成立。

例10 试证对于任何自然数 n，下式

$$(\cos A+i\sin A)^n=\cos nA+i\sin nA$$

均能成立。

证 当 $n=1$ 时

$$(\cos A+i\sin A)^1=\cos A+i\sin A$$

等式成立。

假设当 $n=k$ 时等式成立，即

$$(\cos A+i\sin A)^k=\cos kA+i\sin kA$$

则当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}(\cos A+i\sin A)^{k+1}&=(\cos A+i\sin A)^k\cdot(\cos A+i\sin A)\\&=(\cos kA+i\sin kA)(\cos A+i\sin A)\\&=\cos kA\cdot\cos A+i\sin A\cos kA+i\sin kA\cdot\cos A\\&\qquad-\sin kA\cdot\sin A\\&=\cos kA\cdot\cos A-\sin kA\cdot\sin A+i(\sin A\cos kA\\&\qquad+\sin kA\cos A)\\&=\cos(k+1)A+i\sin(k+1)A。\end{aligned}$$

因此，对于任何自然数 n，命题成立。

例11 试证对于任何自然数 n，等式

$$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4$$

$$=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

均能成立。

证 当 $n=1$ 时，

左边 $=1^4=\frac{1}{30}\cdot 1\cdot(1+1)(2+1)\cdot(3+3-1)=$ 右边

等式成立。

假设当 $n=k$ 时等式成立，即有

$$1^4+2^4+3^4+\cdots+k^4$$

$$=\frac{1}{30}k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)$$

则当 $n=k+1$ 时，有

$$1^4+2^4+3^4+\cdots+k^4+(k+1)^4$$

$$=(1^4+2^4+3^4+\cdots+k^4)+(k+1)^4$$

$$=\frac{1}{30}k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)+(k+1)^4$$

$$=\frac{1}{30}(k+1)[k(k+2)(3k^2+3k-1)+30(k+1)^3]$$

$$=\frac{1}{30}(k+1)(6k^4+39k^3+91k^2+89k+30)$$

$$=\frac{1}{30}(k+1)(2k^2+7k+6)(3k^2+9k+5)$$

$$=\frac{1}{30}(k+1)(k+2)(2k+3)(3k^2+6k+3+3k+3-1)$$

$$=\frac{1}{30}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1][3(k+1)^2+$$

$$+3(k+1)-1]$$

结论也成立。由此可知对于任何自然数 n，等式均成立。

例12 证明 n 为偶数时，x^n-y^n 能被 $x+y$ 整除。（其中 x，y 为整数，且 $x+y\neq 0$）

证 当 $n=2$ 时，结论显然成立。假设当 $n=2k$ 时，结论成立，即 $x^{2k}-y^{2k}$ 能被 $x+y$ 整除。则当 $n=2k+2$ 时，

有

$$x^{2k+2}-y^{2k+2}=x^{2k+2}-x^{2k}\cdot y^2+x^{2k}\cdot y^2-y^{2k+2}$$
$$=x^{2k}(x^2-y^2)+y^2(x^{2k}-y^{2k})$$

由于x^2-y^2与$x^{2k}-y^{2k}$均能被 $x+y$整除，因此 $x^{2k+2}-y^{2k+2}$也能被 $x+y$ 整除。由此可知对于一切偶数n，x^n-y^n 均能被 $x+y$ 整除。

例13 设$f(x)=\sin x$，试证对于一切自然数n恒有

$$f^{(n)}(x)=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$$

证 当$n=1$时，

$$f'(x)=\cos x=\sin(x+1\cdot\frac{\pi}{2})$$

等式成立。

假设当$n=k$时，等式成立，即有

$$f^{(k)}(x)=\sin(x+k\cdot\frac{\pi}{2})$$

当$n=k+1$时

$$f^{(k+1)}(x)=\frac{d[\sin(x+k\cdot\frac{\pi}{2})]}{dx}=\cos(x+k\cdot\frac{\pi}{2})$$
$$=\sin[x+(k+1)\cdot\frac{\pi}{2}]$$

可见当$n=k+1$时，等式成立。因此，对于一切自然数n原等式均成立。

例14 试证 $(\sin^4x+\cos^4x)^{(n)}=4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)$

证 化简

$$\sin^4x+\cos^4x=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x$$
$$=1-\frac{1}{2}\sin^2(2x)$$