一流学校 一流老师 一流资源

三一丛书

复变函数

要点与解题

龚冬保 编著

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

西安交大教学资源文库

复变函数

要点与解题

龚冬保　编著

西安交通大学出版社

内容提要

本书精选了近500道典型的复变函数题。书中对复变函数课程的每部分内容都给出了客观题和非客观题，对每题的解题思路、解题方法以及解法旁注，都简明清晰、一题多解，并大多有独特的解法。

本书适合学习“复变函数”或“数学物理方法”课程的各专业师生。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数要点与解题/龚冬保编著. —西安：西安交通大学出版社，2006.8

(西安交大教学资源文库. 三一 丛书)

ISBN 7-5605-2229-7

Ⅰ.复...　Ⅱ.龚...　Ⅲ.复变函数-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.O174.5

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第064453号

书　名	复变函数要点与解题
编　著	龚冬保
出版发行	西安交通大学出版社
地　址	西安市兴庆南路25号(邮编:710049)
电　话	(029)82668315　82669096(总编办)
	(029)82668357　82667874(发行部)
印　刷	陕西宝石兰印务有限责任公司
字　数	192千字
开　本	880mm×1230mm　1/32
印　张	5.375
版　次	2006年8月第1版　2006年8月第1次印刷
书　号	ISBN 7-5605-2229-7/O·243
定　价	9.00元

前　言

复变函数对于多数工科专业的数学物理方法课程而言，是一门重要的基础课程。为了帮助读者学好本课程，我们根据原国家工科数学教学委员会制订的“复变函数教学基本要求”及“数学物理方法”课程对复变函数的要求，精选了近500道例题，从分析题目的条件和结论着手，讲清解题思路，做出解答。在多数题的解答过程中就解题所用到的知识、解题的方法、技巧的特点及题与题之间的联系等方面，做了注释。

书中大部分例题是我们自己编制的，不少题的解法在一般教材或参考书中并不常见。因此，读者在使用本书时，要把书中例题当作习题，自己独立做，不会时再看书；看懂了离开书再自己做，反复练习，以便掌握这些方法。通过解题，熟悉和掌握知识的要点；通过解题，学会灵活运用所学知识分析和解决问题的方法；通过解题，培养和训练数学的思维能力，是本书的编写宗旨，希望本书能帮助初学者学好复变函数这门课。

编者衷心感谢西安交通大学出版社的支持，使本书得以问世。欢迎读者指出书中存在的讹误和不足。

编　者

2006.6

目　　录

第 1 章　复数与复变函数

1.1　复数及复平面

1-1　复数$\dfrac{2\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1}=(\quad)$.

(A) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{i}}{2}$　　(B) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{i}}{2}$

(C) $1-\mathrm{i}$　　(D) $-1-\mathrm{i}$

解 1　分子分母同乘$-1-\mathrm{i}$得

$$\frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1}=\mathrm{i}(-1-\mathrm{i})=1-\mathrm{i}\qquad 选(C).$$

解 2　本题用复数的指数表示式算更简单：$\mathrm{i}=e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$，$\mathrm{i}-1=\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{3}{4}\pi}$，故　原式$=\sqrt{2}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=1-\mathrm{i}$.

本题虽不难，但解 2 使人觉得用指数表示式进行复数运算有许多优点.

1-2　若$z^2=\bar{z}^2$，则必有(　).

(A) $z=0$　　(B) $\mathrm{Re}(z)=0$

(C) $\mathrm{Im}(z)=0$　　(D) $\mathrm{Re}(z)\cdot\mathrm{Im}(z)=0$

解　设$z=x+\mathrm{i}y$，则$z^2=x^2-y^2+2\mathrm{i}xy$.

$z^2=\bar{z}^2=\overline{z^2}$，意味着$\mathrm{Im}(z^2)=0$，即$2xy=0$.

选(D).

本题要求基本运算熟悉，特别是共轭复数的运算与性质.

1-3　设$z=x+\mathrm{i}y$是虚数(即$y\neq 0$)，则$\dfrac{z}{1+z^2}$为实数的条件是(　).

(A) $xy=1$　　(B) $x^2-y^2=1$

(C) $x^2+y^2=1$　　(D) $y^2-x^2=1$

解　由条件知

$$\frac{z}{1+z^2}=\frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}.$$

要学会充分运用共轭复数的概念及性质.

即 $$z+|z|^2\bar{z}=\bar{z}+|z|^2 z.$$

$(\bar{z}-z)(|z|^2-1)=0$ 由 $y\neq 0$ 得 $|z|^2=1$. 选(C).

1-4 设 $z=x+\mathrm{i}y$, $|x|\neq|y|$, z^4 为实数,则( ).

(A) $xy=0$　　(B) $x+y=0$

(C) $x-y=0$　　(D) $x^2-y^2=0$

解 z^4 为实数,故 $z^4=\bar{z}^4$,即

$$(z-\bar{z})(z+\bar{z})(z^2+\bar{z}^2)=0.$$

或 $$8xy(x^2-y^2)=0.$$ 而 $x^2-y^2\neq 0$. 选(A).

复数 z 为实数的充要条件是 $z=\bar{z}$.

1-5 $\mathrm{Im}[(1+\mathrm{i})^7+(1-\mathrm{i})^7]=(\ \ )$.

(A) 0　　(B) $2\sqrt{2}$　　(C) $-2\sqrt{2}$　　(D) $-\sqrt{2}$

解 由 $(1+\mathrm{i})^7=(\overline{1-\mathrm{i}})^7=\overline{(1-\mathrm{i})^7}$

故 $(1+\mathrm{i})^7+(1-\mathrm{i})^7$ 是实数. 选(A).

1-6 $(1+\mathrm{i})^5/(1-\mathrm{i})^4=(\ \ )$.

(A) $\frac{1}{4}(1+\mathrm{i})$　　(B) $-\frac{1}{4}(1+\mathrm{i})$

(C) $1+\mathrm{i}$　　(D) $-1-\mathrm{i}$

解 1 分子分母同乘 $(1+\mathrm{i})^4$,得

$$原式=\frac{(1+\mathrm{i})^8(1+\mathrm{i})}{2^4}=1+\mathrm{i}.$$ 选(C).

解 2 (用指数表示) $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, $1-\mathrm{i}=\sqrt{2}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$,

故 $$原式=\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^4(1+\mathrm{i})=1+\mathrm{i}.$$

本题用复数的指数形式做更简便.

$(1+\mathrm{i})^4=-2^2$

1-7 $\dfrac{(1-\mathrm{i})^5-1}{(1+\mathrm{i})^5+1}=(\ \ )$.

(A) $\dfrac{31-32\mathrm{i}}{25}$　　(B) $\dfrac{-1-32\mathrm{i}}{25}$

(C) $\dfrac{-1+8\mathrm{i}}{25}$　　(D) $\dfrac{31-8\mathrm{i}}{25}$

解 由上题知 $(1+\mathrm{i})^4=4e^{\mathrm{i}\pi}=-4$.

$$(1-\mathrm{i})^4=4e^{-\mathrm{i}\pi}=-4.$$

$$原式=\frac{-5+4\mathrm{i}}{-3-4\mathrm{i}}=\frac{5-4\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}=\frac{(5-4\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}{25}=\frac{-1-32\mathrm{i}}{25}.$$

选(B).

要熟悉复数的指数形式及其运算.

1-8 $\dfrac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^4}{(1-\mathrm{i})^8}=(\quad)$.

(A) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ (B) $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

(C) $\dfrac{1}{8}(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})$ (D) $-\dfrac{1}{8}(1+\sqrt{3}\mathrm{i})$

解 1 由 $(1-\mathrm{i})^8=[(1-\mathrm{i})^2]^4=(-2\mathrm{i})^4=2^4$.

及 $(\sqrt{3}-\mathrm{i})^4=4(1-\sqrt{3}\mathrm{i})^2=-8(1+\sqrt{3}\mathrm{i})$.

故 原式 $=-\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{3}\mathrm{i})$. 选(B).

解 2 $\sqrt{3}-\mathrm{i}=2(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i})=2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$

故 $(\sqrt{3}-\mathrm{i})^4=2^4\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}$, $(1-\mathrm{i})^8=2^4$

故 原式 $=\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. 选(B).

1-9 若 $\dfrac{-3-\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,则(　).

(A) $r=5,\theta=\arctan 3-\pi$

(B) $r=\dfrac{\sqrt{10}}{2},\theta=\arctan 3-\pi$

(C) $r=\dfrac{\sqrt{10}}{2},\theta=\pi-\arctan 3$

(D) $r=5,\theta=\pi+\arctan 3$

解 由 $(1+\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}$ 得:原式左边 $=\dfrac{1}{2}(3\mathrm{i}-1)$.

故 $r=\dfrac{1}{2}\sqrt{10}$, $\tan\theta=-3$,故 $\theta=\pi-\arctan 3$. 选(C).

注意辐角 θ 在第二象限.

1-10 若 $\dfrac{3+\mathrm{i}\sqrt{2}}{-1+\dfrac{\mathrm{i}}{3}\sqrt{2}}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,则(　).

(A) $r=\dfrac{1}{3},\theta=\arctan\dfrac{6}{7}\sqrt{2}-\pi$

(B) $r=3,\theta=\pi-\arctan\dfrac{6}{7}\sqrt{2}$

(C) $r=\frac{1}{3},\theta=\pi-\arctan\frac{6}{7}\sqrt{2}$

(D) $r=3,\theta=\arctan\frac{6}{7}\sqrt{2}-\pi$

解　原式 $=-3\frac{3+\mathrm{i}\sqrt{2}}{3-\mathrm{i}\sqrt{2}}$,故 $r=3$.

而原式 $=\frac{3}{\sqrt{1}}(-7-6\sqrt{2}\mathrm{i})$,$\theta$是第三象限的角,故

$$\theta=\arctan\frac{6}{7}\sqrt{2}-\pi.\qquad 选(D).$$

θ是第三象限的角.

1-11　若 $|z|=1,w=z^n+\frac{1}{z^n}$($n$是正整数),则(　).

(A) $\mathrm{Re}(w)=0$　　(B) $\mathrm{Im}(w)=0$

(C) $\arg(w)=0$　　(D) $\arg(w)=\pi$

解　由 $|z|=1$ 知$\frac{1}{z}=\bar{z}$,因此

$z^n+\frac{1}{z^n}=z^n+\overline{z^n}$ 为实数,故 $\mathrm{Im}(w)=0$.　　选(B).

$|z|=1$ 时 $\overline{z^n}=\overline{z}^n=1/z^n$.

1-12　$\left(\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^{3n}+\left(\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^{3n}=$(　).

(A) $(-1)^n2$　　(B) $(-1)^{n-1}2$

(C) 2　　(D) -2

解　由$\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{3}\pi}$及$\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4}{3}\pi}$知,等式中两项皆为1.　　选(C).

1-13　设 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,则 $\frac{1+z}{1-z}=$(　).

(A) $\cot\frac{\theta}{2}$　(B) $\mathrm{i}\cot\frac{\theta}{2}$　(C) $\tan\frac{\theta}{2}$　(D) $\mathrm{i}\tan\frac{\theta}{2}$

解　$\frac{1+z}{1-z}=\frac{1-|z|^2+(z-\bar{z})}{1+|z|^2-(z+\bar{z})}=\frac{y}{1-x}\mathrm{i}.$

而　$$\frac{y}{1-x}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\cot\frac{\theta}{2}.\qquad 选(B).$$

本题也可这样做:原式 $=\frac{1+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta}{1-\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\mathrm{i}=\mathrm{i}\cot\frac{\theta}{2}.$

1-14 $\dfrac{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^3}{(1+\mathrm{i})^{10}}=(\quad)$.

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $-\dfrac{1}{4}$ (C) $\dfrac{\mathrm{i}}{4}$ (D) $-\dfrac{\mathrm{i}}{4}$

解 $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^3=2^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=8\mathrm{i}$.

$$(1+\mathrm{i})^{10}=2^5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5}{2}\pi}=2^5\mathrm{i}.$$

故 原式 $=\dfrac{1}{4}$. 选(A).

用复数的指数表示形式.

1-15 $|(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n|=(\quad)$.

(A) $2^n\cos^n\dfrac{\theta}{2}$ (B) $2^n\sin^n\dfrac{\theta}{2}$

(C) $2^{\frac{n}{2}}(1+\cos\theta)^{n/2}$ (D) $2^{\frac{n}{2}}(1+\sin\theta)^{n/2}$

解 $|1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^2=(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta=2(1+\cos\theta)$

故 $|(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n|=2^{\frac{n}{2}}(1+\cos\theta)^{n/2}$. 选(C).

本题容易错选(A)项，因为 $2(1+\cos\theta)=4\cos^2\dfrac{\theta}{2}$ 得 $|1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|=2\cos\dfrac{\theta}{2}$. 错在 $\cos\dfrac{\theta}{2}$ 应加上绝对值.

1-16 $\left|\dfrac{(1+\mathrm{i})^n}{(1-\mathrm{i})^{n-2}}\right|=(\quad)$.

(A) 1 (B) 2 (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) 4

解 原式 $=\dfrac{|1+\mathrm{i}|^n}{|1-\mathrm{i}|^n}\cdot|1-\mathrm{i}|^2=2$. 选(B).

注意 $|(1+\mathrm{i})^n|=|(1-\mathrm{i})^n|$.

1-17 $|\sqrt{8+6\mathrm{i}}|=(\quad)$.

(A) $\sqrt[4]{10}$ (B) $\sqrt{10}$ (C) $\sqrt{14}$ (D) $\sqrt[4]{14}$

解 $|8+6\mathrm{i}|=10$. 选(B).

注意 $|\sqrt{z}|=\sqrt{|z|}$.

1-18 $\max\{|z^4+\mathrm{i}z^2|\,\big|\,|z|\leqslant 1\}=(\quad)$.

(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (B) $\sqrt{\dfrac{11}{4}}$ (C) $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ (D) 2

解 由 $|z^4+\mathrm{i}z^2|\leqslant|z|^4+|z|^2\leqslant 2$，而当 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ 时，

用不等式确定最大值是常用方

$z^4 = e^{i\pi} = -1, iz^2 = ie^{i\frac{\pi}{2}} = -1, |z^4 + iz^2| = 2$,故最大值为 2.

选(D).

法.

1-19 $\arg(\sqrt{3}+i)^{-3} = ($ $)$.

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $-\frac{\pi}{2}$ (C) $-\frac{5}{2}\pi$ (D) $\frac{5}{2}\pi$

解 $\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$,因此

$$\arg(\sqrt{3}+i)^{-3} = -\frac{\pi}{2}.$$

选(B).

注意求辐角的方法.

1-20 对任意复数 z_1, z_2,证明不等式

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

证 1 (几何法) 如图 1.1,由三角形两边之和大于第三边,即

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

等号仅当 O、z_1、z_2 三点共线,向量 Oz_1 与 Oz_2 方向一致时成立. 只要证了这一个不等式,其余都可由此推得:

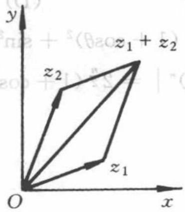

图 1.1

$$|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)|$$

$$\leqslant |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1| = |z_1 + z_2 - z_2| \leqslant |z_1 + z_2| + |z_2|$$

故 $|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 + z_2|$,同理 $|z_2| - |z_1| \leqslant |z_1 + z_2|$

即 $-|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 + z_2|$

也就是 $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2|$.

证 2 (代数法) 设 $z_k = x_k + iy_k (k = 1, 2)$

则只要证 $|z_1 + z_2|^2 \leqslant |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2$

即只要证 $x_1x_2 + y_1y_2 \leqslant \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ (1)

只要证 $(x_1x_2 + y_1y_2)^2 \leqslant (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$

此不等式等价于 $x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 - 2x_1y_1x_2y_2 \geqslant 0$

由于 x_k, y_k 皆是实数,上式左边是完全平方式,故此不等式成立,也就是

$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ 成立,以下同证 1.

代数方法比几何方法麻烦些,但更具一般性:

$(x_1x_2 + y_1y_2)^2 \leqslant (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$

本质上是柯西不等式,这就容易推广到一般 n 维欧氏空间.

证 3 （三角法）. 设 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$，

则 $$|z_1 + z_2|^2 = (r_1\cos\theta_1 + r_2\cos\theta_2)^2 + (r_1\sin\theta_1 + r_2\sin\theta_2)^2$$
$$= r_1^2 r_2^2 + 2r_1 r_2\cos(\theta_1 - \theta_2) \leqslant r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2$$
$$= (r_1 + r_2)^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$

即 $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ 成立，以下同证 1.

用复数的指数表示法，叫做三角表示法. 在一定的场合对复数性质的研究很方便.

1-21 当 x, y 等于什么实数时，等式

$$\frac{x + 1 + i(y - 3)}{5 + 3i} = 1 + i$$

成立？

解 1 左边 $= \dfrac{1}{34}[(x+1) + i(y-3)](5-3i)$

$$= \frac{1}{34}[5(x+1) + 3(y-3) + i[5(y-3) - 3(x+1)]]$$

故 $$\begin{cases} 5(x+1) + 3(y-3) = 34 \\ -3(x+1) + 5(y-3) = 34 \end{cases}$$

两式相减得 $y - 3 = 4(x+1)$，代入 $x + 1 = 2$，$x = 1, y = 11$.

解 2 原式化为：$x + 1 + i(y-3) = (1+i)(5+3i)$

故 $x + 1 = 2, y - 3 = 8$，得 $x = 1, y = 11$.

复数运算与实数基本一样，但除法及共轭的运算有特殊性，值得注意.

解 1 用了共轭运算；解 2 则是用乘法运算.

1-22 证明：

(1) $|z|^2 = z\bar{z}$　　(2) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

(3) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$　　(4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} (z_2 \neq 0)$

(5) $\bar{z}^n = \overline{(z^n)}$

(6) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{2}(z + \bar{z}), \mathrm{Im}(z) = \dfrac{1}{2i}(z - \bar{z})$

证 此题的证明是十分简单的，但这(6)个小题，今后可作为共轭复数及其运算的基本性质，熟悉它们是很重要的，故我们列举于此. 下面我们仅证(3)和(4).

这是共轭运算的重要性质，共轭运算是复数运算有别于实数的一大特点.

(3) **证 1** （代数法）. 记 $z_k = x_k + iy_k (k = 1, 2)$

则 $$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

故 $$\overline{z_1 z_2} = x_1 x_2 - y_1 y_2 - i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$
$$= x_1(x_2 - iy_2) - y_1 i(x_2 - iy_2)$$

$$= (x_1 - y_1 \mathrm{i})(x_2 - y_2 \mathrm{i})$$

$$= \bar{z}_1 \bar{z}_2.$$

证 2 （三角法）. 记 $z_1 = r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}, z_2 = r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$.

则 $\overline{z_1 z_2} = r_1 r_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} = r_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1} \cdot r_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

(4) 利用(3) 的结果，记 $\dfrac{z_1}{z_2} = w$.

则 $\quad z_1 = z_2 w$ 故 $\bar{z}_1 = \bar{z}_2 \bar{w}, \bar{w} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

即 $\quad \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

1-23 对任何复数 z, $z^2 = |z|^2$ 是否一定成立？

解 对任何复数 z，这一等式不一定成立，记 $z = x + \mathrm{i}y$，则 $z^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$，而

$|z|^2 = x^2 + y^2$，要使它们相等只有当

$x^2 - y^2 = x^2 + y^2$ 及 $2xy = 0$

只有当 $y = 0$，x 为任意实数时成立，也即只有当 z 是实数时，才有 $|z|^2 = z^2$ 成立.

注意复数运算与实数的差异.

1-24 当 $|z| \leqslant 1$ 时，求 $|z^n + \alpha|$ 的最大与最小值，n 是正整数，α 是复常数.

解 1 （代数法）. 由 1-20 题知.

$$\big|\, |z|^n - |\alpha| \,\big| \leqslant |z^n + \alpha| \leqslant |z^n| + |\alpha| \leqslant 1 + |\alpha|$$

我们知道，当 $|z^n| = 1$，且向量 z^n 与 α 夹角为 $0°$ 时右边不等式等号成立. 故 $|z^n + \alpha|$ 的最大值是 $1 + |\alpha|$.

对左边不等式，要分情况讨论.

(1) 若 $|\alpha| > 1$，则 $|z^n + \alpha| \geqslant |\alpha| - |z^n| \geqslant |\alpha| - 1$. 等号当 $|z| = 1$，且 z^n 与 α 方向相反时成立. 这时最小值是 $|\alpha| - 1$.

(2) 若 $|\alpha| \leqslant 1$，则由 $|z^n + \alpha| \geqslant 0$，当 $z^n = -\alpha$ 时等号成立，最小值为 0.

总之，不论 α 为何复数，$|z^n + 1|$ 的最大值是 $1 + |\alpha|$；而当 $|\alpha| > 1$ 时，最小值为 $|\alpha| - 1$. 当 $|\alpha| \leqslant 1$ 时，最小值为 0.

求 $|z^n + \alpha|$ 最小值时，要考虑周密.

解 2 （几何法）．我们仅就 $|\alpha|>1$ 加以证明．由 $|z|\leqslant 1$ 知 $|z^n|\leqslant 1$．即 z^n 是闭单位圆上一点．$|z^n+\alpha|$ 表示 z^n 点到 $-\alpha$ 点的距离．很明显（初等几何）当 z^n 位于如图 1.2 的 w_1 的位置时，z^n 与 $-\alpha$ 距离最大，且最大值就是 $1+|\alpha|$；当 z^n 位于 w_2 点时，$|z^n+\alpha|$ 最小，最小值为 $|\alpha|-1$．

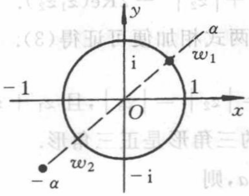

图 1.2

从几何上看问题的证明很形象．

令 $z^n=w$，则 $|w+\alpha|$ 表示 w 与 $-\alpha$ 点的距离．w 是单位圆闭区域上的点．

$|\alpha|\leqslant 1$ 的情况请读者自己研究．

1－25 设 $z=x+\mathrm{i}y$，试证明

$$\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|.$$

试解释不等式 $\dfrac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}\leqslant|z|$ 的几何意义．

证 $|z|=|x+\mathrm{i}y|\leqslant|x|+|\mathrm{i}y|=|x|+|y|$．

左边不等式我们可以给出两种证明．

证 1 由 $|x|=|z|\cos\alpha$，$|y|=|z|\sin\alpha\left(0\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$

得 $$|x|+|y|=|z|(\cos\alpha+\sin\alpha)$$
$$=\sqrt{2}\,|z|\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\leqslant\sqrt{2}\,|z|$$

即 $$|z|\geqslant\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}.$$

证 2 只要证 $(|x|+|y|)^2\leqslant 2(x^2+y^2)$．

即 $x^2-2|x||y|+y^2\geqslant 0$，是显然成立的．

1－26 证明

(1) $|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=|z_1-z_2|^2$

(2) $|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=|z_1+z_2|^2$

(3) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$

证 (1) $$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$$
$$=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2-z_1\bar{z}_2-z_2\bar{z}_1$$
$$=|z_1|^2+|z_2|^2-(z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2})$$

注意 $z\bar{z}=|z|^2$ 的应用．

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2).$$

同理可证(2).(1),(2) 两式相加便可证得(3).

1-27 若 $|z_1| = |z_2| = |z_3|$,且 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ 证明以 z_1, z_2, z_3 为顶点的三角形是正三角形.

证 1 记 $|z_1| = a$,则

$$|z_1|^2 = |z_2 + z_3|^2 = 2(|z_2|^2 + |z_3|^2) - |z_2 - z_3|^2$$

得 $|z_2 - z_3|^2 = 3a^2$. 同样 $|z_3 - z_1|^2 = |z_1 - z_2|^2 = 3a^2$

即得 $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_2| = |z_1 - z_3|$. 命题得证.

证 1 是证明三角形三边相等.

证 2 设 $z_k = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}(k = 1,2,3)$

因而有 $a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_3}) = 0$,即

$$\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3 = \sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3 = 0.$$

不妨设 $0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 \leqslant 2\pi$. 则

$$(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)^2 = \cos^2\theta_3, \quad (\sin\theta_1 + \sin\theta_2)^2 = \sin^2\theta_3.$$

于是 $2 + 2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) = 1$.

即 $\cos(\theta_2 - \theta_1) = -\dfrac{1}{2}, \theta_2 - \theta_1 = \dfrac{2}{3}\pi$.

同理,$\theta_3 - \theta_2 = \dfrac{2}{3}\pi$,说明 z_1, z_2, z_3 在圆周上且 $\overset{\frown}{z_1z_2}$, $\overset{\frown}{z_2z_3}$ 与 $\overset{\frown}{z_3z_1}$ 的度数均为 $\dfrac{2}{3}\pi$,所以 z_1, z_2, z_3 为顶点的三角形是正三角形.

证 2 是证明 z_1, z_2, z_3 是圆 $|z| = a$ 上的三等分点.

1-28 证明复数形式的柯西(Cauchy)不等式:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k\right|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^2\sum_{k=1}^{n}|\beta_k|^2.$$

证 对任意 n 个复数,由三角不等式.知

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|\alpha_k||\beta_k|.\text{(见 1-20 题)}.$$

再由关于实数的柯西不等式得

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k\right|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k||\beta_k|\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^2\sum_{k=1}^{n}|\beta_k|^2.$$

在复数域上 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 也是 n 维欧氏空间的向量.

1-29 若复数 z_1, z_2, z_3 满足等式

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$$

证明 $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$.

说明它的几何意义.

证 由已知等式取模可得

$$|z_2 - z_1|\,|z_2 - z_3| = |z_1 - z_3|^2 \qquad (1)$$

又由已知等式知

$$\frac{(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)}{z_3 - z_1} = \frac{(z_1 - z_3) - (z_2 - z_3)}{z_2 - z_3}$$

即 $\dfrac{z_2 - z_3}{z_3 - z_1} = \dfrac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3}$,从而有

$$|z_1 - z_2|\,|z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|^2 \qquad (2)$$

(1)、(2) 两式相比得 $\dfrac{|z_2 - z_3|}{|z_1 - z_3|} = \dfrac{|z_1 - z_2|^2}{|z_2 - z_3|^3}$

故 $|z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$,代入(1) 即可得所要证明的结论:

$$|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|.$$

1-30 设 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,证明

(1) $z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$; (2) $z^n - \dfrac{1}{z^n} = 2\mathrm{i}\sin\theta$

其实，$|z| = 1$,故 $\bar{z}^n = \dfrac{1}{z^n}$.

证 (1) $z^n + \dfrac{1}{z^n} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} = 2\cos n\theta$

(2) $z^n - \dfrac{1}{z^n} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} = 2\mathrm{i}\sin\theta$

1-31 求下列各式的值.

(1) $\dfrac{(\sqrt{3} - \mathrm{i})^5}{(1 + \mathrm{i})^6}$ (2) $\dfrac{(1 + \sqrt{3}\mathrm{i})^6}{(1 - \mathrm{i})^5}$

解 (1) $(\sqrt{3} - \mathrm{i})^5 = 2^5\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)^5 = 2^5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5}{6}\pi}$

$$(1 + \mathrm{i})^6 = \sqrt{2}^6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{2}\pi}$$

复数的指数式与代数形式的转换要熟练.

故 $$\frac{(\sqrt{3} - \mathrm{i})^5}{(1 + \mathrm{i})^6} = \frac{2^5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5}{6}\pi}}{2^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{2}\pi}} = 2^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{7}{3}\pi} = 2(1 - \sqrt{3}\mathrm{i})$$

(2) $(1 + \sqrt{3}\mathrm{i})^6 = 2^6\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} = 2^6$.

$$(1 - \mathrm{i})^5 = \sqrt{2}^5\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}\pi\mathrm{i}} = 2^4(-1 + \mathrm{i})$$

故 $$\frac{(1+\sqrt{3}i)^6}{(1-i)^5} = \frac{4}{-1+i} = -2(1+i).$$

1-32 化简：$\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$.

解 1 原式 $= (1-i)^2\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^n = -2ie^{i\frac{n}{2}\pi} = -2i^{n+1}$

解 2 原式 $= \dfrac{(1+i)^{2n-2}}{2^{n-2}} = 2(e^{i\frac{\pi}{4}})^{2n-2} = 2i^{n-1}$.

1-33 化简：$(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n$

注意将复数写成指数形式的方法.

解 $1+\cos\theta+i\sin\theta = 2\cos\dfrac{\theta}{2}\left(\cos\dfrac{\theta}{2}+i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)$.

故 $$(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n = 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}e^{i\frac{n}{2}\theta}.$$

1-34 设实数 $|r|<1$，求下面级数的和.

(1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} r^k\cos k\theta$ (2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} r^k\sin k\theta$

解 记 $\alpha_k = r^k e^{ik\theta} = (re^{i\theta})^k\ (k=0,1,\cdots)$

于是 $$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k = \frac{1}{1-re^{i\theta}} = \frac{1}{1-r\cos\theta-ir\sin\theta}$$
$$= \frac{1-r\cos\theta+ir\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

故 (1) $$\sum_{k=0}^{\infty} r^k\cos k\theta = \frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

(2) $$\sum_{k=1}^{\infty} r^2\sin k\theta = \frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

1-35 求 $\sqrt[4]{-i}$

解 $-i = e^{i(\frac{3}{2}\pi+2k\pi)}$

注意：复数无算术根的概念，因此 $\sqrt[4]{-i}$ 应当有 4 个值.

因此 $$\sqrt[4]{-i} = e^{i(\frac{3}{8}\pi+\frac{k\pi}{2})}.$$

分别令 $k=0,1,2,3$ 得

$$z_1 = e^{i\frac{3}{8}\pi}, z_2 = e^{i\frac{7}{8}\pi}, z_3 = e^{i\frac{11}{8}\pi}, z_4 = e^{i\frac{15}{8}\pi}.$$

1-36 求方程 $x^6+1=0$ 的所有根.

解 1 $x = \sqrt[6]{-1} = e^{i(\pi+2k\pi)/6}\ (k=0,1,\cdots,5)$