全国十二大考研辅导机构指定用书

金榜®考研数学系列

全国硕士研究生入学考试用书

数学基础过关660题

数学二

SHUXUE JICHU GUOGUAN 660 TI (SHUXUEER)

主编　李永乐

★ 完全按照新大纲编著

★ 权威解析精选试题

★ 全面评注各类题型

2008

新华出版社

全国十二大考研辅导机构指定用书

金榜®考研数学系列

全国硕士研究生入学考试用书

数学基础过关660题

数学二

SHUXUE JICHU GUOGUAN 660 TI (SHUXUEER)

主编　李永乐

编者：（按姓氏笔画）

清　华　大　学	刘庆华
北　京　大　学	刘西垣
北　京　大　学	李正元
清　华　大　学	李永乐
北京交通大学	赵达夫
东北财经大学	龚兆仁

新华出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学基础过关 660 题. 2/李永乐主编

北京:新华出版社,2007.2

全国硕士研究生入学考试用书

ISBN 978-7-5011-7886-5

Ⅰ.数... Ⅱ.李... Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—习题

Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 019712 号

数学基础过关 660 题(数学二)

策　　划:白云覃

责任编辑:李国萍

出版发行:新华出版社

地　　址:北京石景山区京原路 8 号

邮　　编:100043

经　　销:新华书店

印　　刷:北京云浩印刷有限责任公司

开　　本:787mm×1092mm　1/16

印　　张:15.25

字　　数:361 千字

版　　次:2007 年 2 月第 1 版

印　　次:2007 年 2 月北京第 1 次印刷

书　　号:ISBN 978-7-5011-7886-5

定　　价:22.00 元

本社购书热线:(010) 63077122　中国新闻书店电话:(010) 63072012

若有印装质量问题,请与印厂联系(010)82570299

前　言

2007 年考研数学试卷的结构又发生了变化，增加了选择题，减少了解答题。目前选择题 10 个，填空题 6 个，共 16 个题 64 分，占了数学总分的 42.6%。

需要提醒广大考生的是：对于往届考生的失误要引以为戒，一定要重视选择题、填空题的复习。例如，从教育部考试中心公布的统计结果来看：2006 年数学一选择题难度系数 0.524，填空题难度系数 0.538。在选择题与填空题上正确率仅二分之一强，是不是丢分丢的有点太多了？

本次再版在题目选编上有较大的变动。一是增加了选择题的数量；二是对解答与评注进行了修订，以适应各种水平同学的需求。希望本书的修订再版能对同学们的复习备考有更大的帮助。对本书不足和疏漏之处，恳请读者批评指正。

考虑到数学二考试大纲的实际情况，为满足数学二考生的需求，今尝试为数学二单独出一本，书名仍延用原书名，题量减少为 480 题。

祝考生复习顺利，心想事成，考研成功！

编　者

2007 年 2 月

目　录

第一部分　选择题

高等数学

线性代数

◇◇ 高等数学 ◇◇

1. 下列命题中正确的是

(A) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\geqslant\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\Rightarrow\exists\,\sigma>0$，当$0<|x-x_0|<\sigma$时$f(x)\geqslant g(x)$.

(B) 若$\exists\,\sigma>0$使得当$0<|x-x_0|<\sigma$时有$f(x)>g(x)$且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A_0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B_0$均$\exists$，则$A_0>B_0$.

(C) 若$\exists\,\sigma>0$，当$0<|x-x_0|<\sigma$时$f(x)>g(x)\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\geqslant\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

(D) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\Rightarrow\exists\,\sigma>0$，当$0<|x-x_0|<\sigma$时有$f(x)>g(x)$.

[ ]

【答案】 (D)

【分析】 (D) 正确. (D) 正是极限的不等式性质中所述的结论. (A) 的错误在于由$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$不能判断$x_0$附近$f(x)$与$g(x)$的大小关系. 由(B)的条件只能得$A_0\geqslant B_0$. 在(C)中没假设极限存在.

选(D)

2. 下列命题中不正确的是

(A) 数列极限$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}x_{n+l}=a$. 其中$l$为某个确定的正整数.

(B) 数列$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}x_{2n-1}=\lim\limits_{n\to+\infty}x_{2n}=a$.

(C) 数列x_n收敛(即$\exists$极限$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$)，则$x_n$有界.

(D) $f(x)$定义于$(a,+\infty)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则$f(x)$在$(a,+\infty)$有界. [ ]

【答案】 (D)

【分析 1】 若$\exists$极限$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，只能得到当$x$充分大之后$f(x)$有界，即$\exists\,x_0>a$，$f(x)$在$[x_0,+\infty)$有界，不能保证$f(x)$在整个定义域$(a,+\infty)$有界. 例如，$f(x)=\dfrac{1}{x}$定义于$(0,+\infty)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$无界. 因此(D)是不正确的.

选(D)

【分析 2】 若极限$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n\,\exists$，则$x_n$有界. 这是我们应熟悉的基本定理，即(C)正确. 关于(A)，(B)的正确性，从直观上理解即可.

$x_n:x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$

$x_{n+l}:x_{1+l},x_{2+l},x_{3+l},\cdots,x_{n+l},\cdots$

x_n中去掉前l项即x_{n+l}.

$x_{2n-1}:x_1,x_3,x_5,\cdots,x_{2n-1},\cdots$

$x_{2n}:x_2,x_4,x_6,\cdots,x_{2n},\cdots$

它们一起含盖了x_n的所有项.

因此选(D).

3. 设 $x_n \leqslant a \leqslant y_n$,但 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$ 则 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$

(A) 都收敛于 a. (B) 都收敛,但不一定收敛于 a.

(C) 可能收敛,也可能发散. (D) 都发散. [　　]

【答案】 (A)

【分析】 由 $x_n \leqslant a \leqslant y_n$,得

$$0 \leqslant a - x_n \leqslant y_n - x_n.$$

又由 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$ 以及夹逼定理得

$$\lim_{n\to\infty}(a - x_n) = 0.$$

因此,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 由此得 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

所以选(A).

4. 设 $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$

(A) 存在且等于零. (B) 存在但不一定等于零.

(C) 不一定存在. (D) 一定不存在. [　　]

【答案】 (C)

【分析】 由 $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n \Rightarrow 0 \leqslant z_n - x_n \leqslant y_n - x_n$.

又因 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(z_n - x_n) = 0$. 但不保证 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n$ 存在. 例如,

取 $x_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n+1}$,$y_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$,

$z_n = (-1)^n + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n}\right)$,此时有,$x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$,但当 $n \to \infty$ 时,z_n 的极限不存在,因此选(C).

【评注】 (1) 要注意夹逼定理的条件,当 $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ 时,才有 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$ 不一定有 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$,当 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$(或 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$)存在,且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$,才能有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

5. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$,$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$,$\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$,则下列命题中不正确的是

(A) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = +\infty$. (B) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)h(x)) = \infty$.

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) + h(x)) = +\infty$. (D) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = +\infty$. [　　]

【答案】 (B)

【分析 1】 易知,两个正无穷大量之和与之积均是正无穷大量,即(A)、(D) 正确. 又正无穷大量与有界量之和仍为正无穷大量,即(C) 也正确.

因此,(B) 不正确. 选(B).

【分析 2】 我们知道,当 $A = 0$ 时,$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)h(x))$ 是未定式(无穷大量与无穷小量之

积). 因此(B) 不正确.

【评注】 当$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty,\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A\neq 0$时 $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)h(x))=\infty$.

6. 下列极限正确的是

(A) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{x}=1$.　　(B) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$.

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$.　　[　]

【答案】 (B)

【分析】 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}\xlongequal{\text{令}\frac{1}{x}=t}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$,因此选(B)

而 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\sin\pi}{\pi}=0$,又$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0,\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}=0$,$\sin x$是有界量,

因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}=0,\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

【评注】 在重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$中,要注意极限过程是$x\to 0$.

7. 下列叙述正确的是

(A) 如果 $f(x)$ 在 x_0 某邻域内无界,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

(B) 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$,则 $f(x)$ 在 x_0 某邻域内无界.

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

(D) 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$.　　[　]

【答案】 (B)

【分析 1】 因为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$,所以,对于任意$M>0$,存在$\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时,$|f(x)|>M$由此可得$f(x)$在$x_0$的某邻域内无界,因此选(B).

【分析 2】 举反例说明(A)、(C)、(D)均不成立. 设$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$,令$x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$,

$y_n=\dfrac{1}{n\pi}$,

则 $x_n\to 0,y_n\to 0\quad(n\to+\infty)$

$$\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=\lim_{n\to+\infty}(2n\pi+\frac{\pi}{2})=+\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty}f(y_n)=0$$

$\Rightarrow f(x)$在$x=0$邻域无界,但$x\to 0$时$f(x)$不是无穷大量. 也说明$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不$\exists$.

此例说明(A),(C)不正确.

若令 $f(x)=0$(常数函数),则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,但 $\dfrac{1}{f(x)}$ 无定义,故(D)不正确.

因此选(B)

【评注】 1° $f(x)=\begin{cases}x & x\text{ 为有理数}\\ 0 & x\text{ 为无理数}\end{cases}$,

则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$,但 $\dfrac{1}{f(x)}$ 在 $x=0$ 的任一邻域的无理点均无定义.

2° 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,且 $f(x)\neq 0$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$.

8. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}e^{\frac{1}{x-2}}$,则当 $x\to 2$ 时有

(A) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=4$.

(B) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=0$.

(C) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$.

(D) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ 不存在,且 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)\neq\infty$. [ ]

【答案】 (D)

【分析】 $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x+2)e^{\frac{1}{x-2}}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x+2)e^{\frac{1}{x-2}}=0$

所以选(D).

【评注】 注意 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$,$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$,因而 $\lim\limits_{x\to\infty}e^x$ 不存在.

9. 下列命题中

① 设 $x_n>0$ 是无穷小,则 $\sqrt[n]{x_n}$ 是无穷小.

② 设 x_n 是无穷小,则 $n^2x_n^2$ 是无穷小.

③ 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$,$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=l$(实数),则 $x\to a$ 时 $g(x)$ 是无穷小.

④ 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\infty$,$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$,则 $x\to a$ 时 $g(x)$ 不是无穷小.

正确的是

(A)①②.

(B)②③.

(C)③④.

(D)④①. [ ]

【答案】 (B)

【分析】 这四个命题中两个正确,两个错误.

【分析 1】 ① 是 0^0 型极限,它是未定式,如

$$x_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}x_n=0,\ \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_n}=\frac{1}{2}\neq 0$$

$\Rightarrow$① 是不正确的.

④ 也是不正确的.因为无穷小与无穷小之比可以是无穷大.如 $f(x)=(x-a)^2$,$g(x)=x-a$,$\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0,\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{x-a}=\infty,\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$

因此选(B).

【分析 2】 ② 是正确的.

$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0\Rightarrow\exists N$,当 $n>N$ 时 $|x_n|<\dfrac{1}{2}\Rightarrow|n^2x_n^n|<n^2(\dfrac{1}{2})^n(n>N)$. 又 $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2(\dfrac{1}{2})^n=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}n^2x_n^n=0$.

③ 是正确的.

$$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}\cdot f(x)=l\times 0=0.$$

$\Rightarrow x\to a$ 时 $g(x)$ 是无穷小.

因此选(B).

10. 设 $x\to 0$ 时 $ax^2+bx+c-\cos x$ 是比 x^2 高阶无穷小,其中 a,b,c 为常数,则

(A)$a=\dfrac{1}{2},b=0,c=1$.　　(B)$a=-\dfrac{1}{2},b=0,c=0$.

(C)$a=-\dfrac{1}{2},b=0,c=1$.　　(D)$a=\dfrac{1}{2},b=0,c=0$.　　[　　]

【答案】 (C)

【分析】 由题意得

$$\lim_{x\to 0}(ax^2+bx+c-\cos x)=0$$

得　$c=1$

又因为　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^2+bx+c-\cos x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(a+\frac{b}{x}+\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=0$$

所以　$b=0,a=-\dfrac{1}{2}$. 因此选(C)

【评注】 上述结论利用当 $x\to 0$ 时,$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,以及极限的四则运算法则.

11. 设 $x\to 0$ 时 $(1+\sin x)^x-1$ 是比 $x\tan x^n$ 低阶的无穷小,而 $x\tan x^n$ 是比 $(e^{\sin^2x}-1)\ln(1+x^2)$ 低阶的无穷小,则正整数 n 等于

(A)1.　　(B)2.

(C)3.　　(D)4.　　[　　]

【答案】 (B)

【分析】 当 $x\to 0$ 时,$(1+\sin x)^{x}-1\sim\ln[(1+\sin x)^x-1+1]$

$=x\ln(1+\sin x)\sim x\sin x\sim x^2$,　　$(e^{\sin^2x}-1)\ln(1+x^2)\sim\sin^2x\cdot x^2\sim x^4$

而

$$x\tan x^n\sim x\cdot x^n=x^{n+1}$$

因此

$$2<n+1<4$$

$\Rightarrow$ 正整数 $n=2$. 所以选(B).

12. 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 不 $\exists$, $\lim\limits_{x\to a}h(x)$ 不 $\exists$, 则下列结论中正确的是

(A) $\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot g(x)$ 不 $\exists$.

(B) $\lim\limits_{x\to a}(g(x)+h(x))$ 不 $\exists$.

(C) $\lim\limits_{x\to a}(h(x)\cdot g(x))$ 不 $\exists$.

(D) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{1}{x-a}\sin\dfrac{1}{x-a}+f(x)\right)$ 不 $\exists$. [ ]

【答案】 (D)

【分析 1】 按题设, 易知 $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ 不 $\exists$. (否则, 若 $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))\exists$, 则 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}[(f(x)+g(x))-f(x)]\exists$, 矛盾). (D) 中 $g(x)=\dfrac{1}{x-a}\sin\dfrac{1}{x-a}$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 不 $\exists\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{1}{x-a}\sin\dfrac{1}{x-a}+f(x)\right)$ 不 $\exists$.

选(D).

【分析 2】 举反例说明(A), (B), (C) 均错, 例如.

$$g(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases},\ h(x)=\begin{cases}-1, & x>0\\ 1, & x<0\end{cases}$$

则 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$, $\lim\limits_{x\to 0}h(x)$ 均不 $\exists$, 但

$$\lim_{x\to 0}(g(x)+h(x))=0,\ \lim_{x\to 0}(g(x)\cdot h(x))=-1.$$

故(B), (C) 不正确.

若取 $f(x)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)g(x)=0$, 故(A) 也不正确. 选(D)

【评注】 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 不 $\exists$, 则 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ 不 $\exists$, 当 $A\neq 0$ 时, 又有 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]$ 不 $\exists$. 当 $A=0$ 时, $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))$ 可能 $\exists$, 也可能不 $\exists$.

13. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x^2+x^2f(x)}{x^6}\right)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3+f(x)}{x^4}$ 为

(A) 0.

(B) 3.

(C) $\dfrac{9}{2}$.

(D) ∞. [ ]

【答案】 (C)

【分析 1】 因为

$$\frac{3+f(x)}{x^4}=\frac{3x^2+x^2f(x)}{x^6}=\frac{3x^2-\sin 3x^2+\sin 3x^2+x^2f(x)}{x^6}$$

又 $$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-\sin 3x^2}{x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{6x-6x\cos 3x^2}{6x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x^2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(3x^2)^2}{x^4}=\frac{9}{2}$$

所以 $$\lim_{x\to 0}\frac{3+f(x)}{x^4}=\frac{9}{2}+0=\frac{9}{2}.$$ 选(C)

【分析 2】 对 $\sin 3x^2$ 用泰勒公式. 由

$$\sin t=t-\frac{1}{3!}t^3+o(t^3)(t\to 0)$$

令 $t=3x^2$ 得

$$\sin 3x^2 = 3x^2 - \frac{1}{6}(3x^2)^3 + o(x^6)(x \to 0) = 3x^2 - \frac{9}{2}x^6 + o(x^6)$$

于是

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x^2 + x^2 f(x)}{x^6} = \lim_{x \to 0} \frac{3x^2 - \frac{9}{2}x^6 + x^2 f(x) + o(x^6)}{x^6}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{3 + f(x)}{x^4} - \frac{9}{2} + \lim_{x \to 0} \frac{o(x^6)}{x^6} = 0$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3 + f(x)}{x^4} = \dfrac{9}{2}$. 选(C).

14. 已知 $I = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ax^2 + bx - \ln(1 - 2x + x^2)}{x^2} = 5$，则

(A) $a = -4, b = 2$.　　(B) $a = 4, b = -2$.

(C) $a = 3, b = -2$.　　(D) $a = -3, b = 2$.　　[　]

【答案】 (B)

【分析 1】 用泰勒公式.

$$\ln(1 + t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2) \quad (t \to 0)$$

令 $t = -2x + x^2$，则 $t^2 = (-2x + x^2)^2 = 4x^2 + o(x^2) \quad (x \to 0), o(t^2) = o(x^2)$，于是

$$\ln(1 - 2x + x^2) = -2x + x^2 - \frac{1}{2} \cdot 4x^2 + o(x^2)$$

$$= -2x - x^2 + o(x^2)$$

分子 $= (a + 1)x^2 + (b + 2)x + o(x^2)$

因此，

$$I = \lim_{x \to 0} \frac{(a + 1)x^2 + (b + 2)x + o(x^2)}{x^2} = 5$$

$\Rightarrow b + 2 = 0$　即 $b = -2$　(否则 $I = \infty$)

$\Rightarrow a + 1 = 5, a = 4$.

选(B).

【分析 2】 由题设知

$$a = I_1 + 5,$$

其中　$I_1 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 - 2x + x^2) - bx}{x^2} \xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{-2 + 2x}{1 - 2x + x^2} - b}{2x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2 + 2x - b(1 - 2x + x^2)}{2x(1 - 2x + x^2)}$$

分子极限为 $-2 - b$，必须有 $-b - 2 = 0$，

即 $b = -2$(否则 $I_1 = \infty \Rightarrow I = \infty$)

于是

$$I_1 = \lim_{x \to 0} \frac{2x - 2 + 2(1 - 2x + x^2)}{2x(1 - 2x + x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{2x - 4x + 2x^2}{2x}$$

$$= -1$$

因此

$a=5-1=4.$
选(B).

15. $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=$

(A)0. (B)$-\dfrac{1}{6}$.

(C)$-\dfrac{1}{8}$. (D)$-\dfrac{1}{12}$. [ ]

【答案】 (D)

【分析】 用泰勒公式求这个极限

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)\quad(x\to 0)$$

$$\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=1+\left(-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)\quad(x\to 0)$$

相减得

$$\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{4}\right)x^4+o(x^4)=-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)\quad(x\to 0)$$

因此

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{12}.$$ 选(D)

【评注】 求$\dfrac{0}{0}$型极限常可用洛必达法则或泰勒公式,若需多次用洛必达法则,导致求导计算不方便,而又容易由间接法求得分子、分母的泰勒公式时,应该用泰勒公式求这类$\dfrac{0}{0}$型极限.

16. 设 $x\to a$ 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分别是 $x-a$ 的 n 阶与 m 阶无穷小,则下列命题

① $f(x)g(x)$ 是 $x-a$ 的 $n+m$ 阶无穷小.

② 若 $n>m$,则$\dfrac{f(x)}{g(x)}$是 $x-a$ 的 $n-m$ 阶无穷小.

③ 若 $n\leqslant m$,则 $f(x)+g(x)$ 是 $x-a$ 的 n 阶无穷小.

中,正确的个数是

(A)1. (B)2.

(C)3. (D)0. [ ]

【答案】 (B)

【分析】 此类问题要逐一分析,按无穷小阶的定义:

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{(x-a)^n}=\mathrm{A}\neq 0(\exists),\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{(x-a)^m}=\mathrm{B}\neq 0(\exists)$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)g(x)}{(x-a)^{n+m}}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{(x-a)^n}\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{(x-a)^m}=\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}\neq 0(\exists)$

$\Rightarrow f(x)g(x)$ 是$(x-a)$的 $n+m$ 阶无穷小;

又，若 $n > m$，

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\Big/(x-a)^{n-m}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^n}\Big/\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{(x-a)^m}=\frac{A}{B}\neq 0(\exists)$$

$\Rightarrow f(x)\Big/g(x)$ 是 $(x-a)$ 的 $n-m$ 阶无穷小；

因此 ①，② 正确，但 ③ 不正确. 例如，$x\to 0$ 时，$\sin x$ 与 $-x$ 均是 x 的一阶无穷小，但

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$

即，$\sin x+(-x)$ 是 x 的 3 阶无穷小，

因此选(B).

【评注】 设 $x\to a$ 时 $f(x),g(x)$ 分别是 $x-a$ 的 n 阶与 m 阶无穷小，$n<m\Rightarrow f(x)+g(x)$ 是 $x-a$ 的 n 阶无穷小.

因为

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^n}+\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{(x-a)^m}(x-a)^{m-n}$$

$$=A+B\cdot 0=A\neq 0(\exists)$$

若 $n=m\Rightarrow f(x)+g(x)$ 是 $x-a$ 的 n 阶或高于 n 阶的无穷小.

17. 下列各题计算过程中正确无误的是

A. 数列极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(\ln n)'}{n'}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

B. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{3x^2-2x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\pi\cos\pi x}{6x-2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\pi^2\sin\pi x}{6}=0$.

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ 不存在.

D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}=\infty$. [ ]

【答案】 (D)

【分析 1】 (A) 是错的. 因为 n 是正整数，对数列没有导数概念，不能直接用洛必达法则.

(B) 是错的. 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\pi\cos\pi x}{6x-2}$ 已不是未定式，不能用洛必达法则.

(C) 也是错的. 用洛必达法则求 $\dfrac{0}{0}$ 型极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 时，若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在，也不为 ∞，则法则失效，不能推出原极限不存在，事实上该极限是存在的.

因此选(D).

【分析 2】 (D) 是正确的.

用洛必达法则求 $\dfrac{0}{0}$ 型极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 时，

若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$(有限数)，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$.

若$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$,则$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$,(D) 正是后一种情形.

【评注】 (A),(B),(C) 的正确解法是:

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n}\xlongequal{\text{数列极限转化为函数极限}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{\infty}{\infty}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

(B) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\pi x}{3x^2-2x-1}\xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\pi\cos\pi x}{6x-2}=\dfrac{-\pi}{4}$.

(C) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to0}(x\sin\dfrac{1}{x})=1\times0=0$.

18. 设 $f(x)=\begin{cases}(x+1)\arctan\dfrac{1}{x^2-1} & x\neq\pm1\\ 0 & x=\pm1\end{cases}$ 则,

(A) $f(x)$ 在点 $x=1$ 连续,在点 $x=-1$ 间断.
(B) $f(x)$ 在点 $x=1$ 间断,在点 $x=-1$ 连续.
(C) $f(x)$ 在点 $x=1,x=-1$ 都连续.
(D) $f(x)$ 在点 $x=1,x=-1$ 都间断. [ ]

【答案】 (B)

【分析】 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=2\times\dfrac{\pi}{2}=\pi$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=2\times\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\pi$

$\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在,因而 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续,$\arctan\dfrac{1}{x^2-1}$ 为有界量,$\lim\limits_{x\to-1}(x+1)=0$

$$\lim_{x\to-1}(x+1)\arctan\frac{1}{x^2-1}=0=f(0)$$

所以,$f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续,因此,选(B).

19. 在其定义区间上连续函数 $f(x)$ 是

(A) $f(x)=\begin{cases}x & 0\leqslant x\leqslant1\\ 2-x & 1<x\leqslant2\end{cases}$. (B) $f(x)=\begin{cases}x & 0\leqslant x\leqslant1\\ 1-x & 1<x\leqslant2\end{cases}$.

(C) $f(x)=\begin{cases}x & 0\leqslant x<1\\ 0 & x=1\\ 2-x & 1<x\leqslant2\end{cases}$. (D) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & 0\leqslant x<1\\ 0 & 1\leqslant x\leqslant2\end{cases}$. [ ]

【答案】 (A)

【分析 1】 设 $f(x)=\begin{cases}g(x) & (a\leqslant x\leqslant x_0)\\ h(x) & (x_0<x\leqslant b)\end{cases}$, 其中 $g(x),h(x)$ 分别在$[a,x_0]$,$[x_0,b]$是初等函数,又 $g(x_0)=h(x_0)$,则 $f(x)$ 在$[a,b]$连续. 对于(A),$x\Big|_{x=1}=(2-x)\Big|_{x=1}$,故选(A).