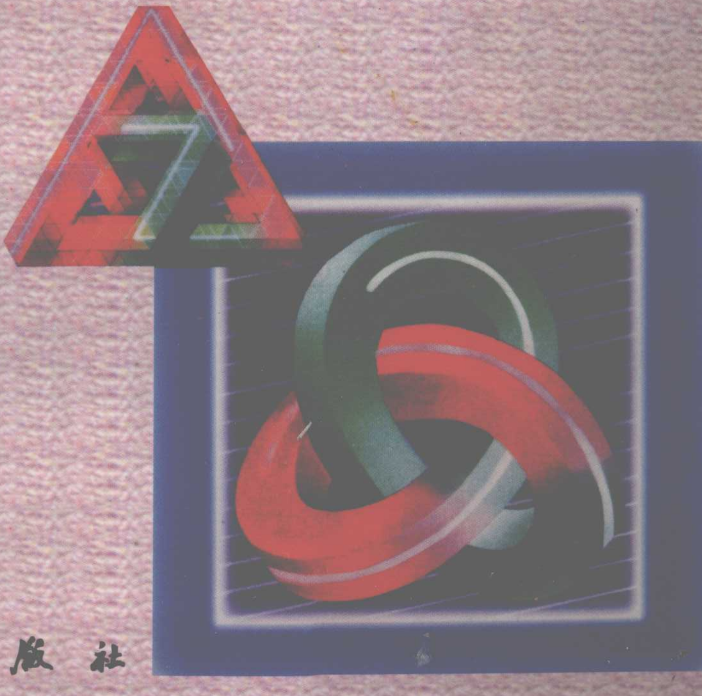
现代数学基础丛书

对称性分岔理论基础

●唐云 著



科学出版社

现代数学基础丛书

对称性分岔理论基础

唐 云 著

科学出版社

1998

内 容 简 介

近十多年来迅速发展起来的对称性分岔理论方法因其深刻的数学基础，以及在固体力学、流体力学、物理学、化学、生物学及一些工程领域中的重要应用，已受到许多数学及应用科学工作者的日益关注，特别地，近年来关于对称混沌吸引子的一些结果已成为等变动力系统理论中一个值得注意的方向. 本书系统地阐述与对称性有关的分岔和混沌吸引子的理论、方法及其应用. 本书论证严谨、深入浅出，能使读者在较短的时间内掌握对称性分岔与混沌吸引子的理论基础，并较快地深入到与此相关的各种问题的研究中去. 每章末附有习题，以便于读者深入理解本书内容.

读者对象为理工科大学数学系、应用数学系和其他相关专业的大学生、研究生、教师及有关的科学工作者.

图书在版编目（CIP）数据

对称性分岔理论基础/唐　云 著. 一北京：科学出版社，1998
（现代数学基础丛书/程民德主编）
ISBN 7-03-006139-X/O・955

Ⅰ. 对…　Ⅱ. 唐…　Ⅲ. 对称分岔 Ⅳ. O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字（97）第 13623 号

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717

科地亚印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
1998 年 3 月第　一　版　开本：850×1168　1/32
1998 年 3 月第一次印刷　印张：10 1/8
印数：1—1 500　字数：259 000

ISBN 7-03-006139-X/O・955
定价：21.00 元

前　言

对称性是指在某个群的作用下不变的性质，具有对称性的分岔问题在参数通过分岔值时，其解的个数，稳定性及对称性都可能发生变化．由于这种变化所揭示的现象带有普遍性，对称性分岔理论在固体力学、流体力学、物理学、化学、生物学及一些工程领域中都有着重要应用，并已成为许多数学及应用科学工作者关注的课题．

对称性分岔理论用到的数学工具除微分方程、泛函分析等分岔理论通常采用的方法外，还以奇点理论和群论方法作为其理论基础．奇点理论最初在 1970 年前后由 R. Thom 以突变理论的形式提出，并由 J. Mather[Mat 1-3]给出了严格的数学论证，V. I. Arnold 还在向量场的局部分岔应用方面作了发展．自本世纪 70 年代末以来，M. Golubitsky 等人[GSc1,2]将奇点理论同群论方法结合起来，系统地用于分岔问题的研究，以后又将群论工具用于离散系统吸引子的对称结构研究．他们的工作大大丰富和发展了这方面的理论，并在一系列应用问题方面取得了举世瞩目的成效．

奇点概念描述了系统连续变化过程中出现的间断结构，引进群的对称性之后，进一步丰富了它的研究对象．运用奇点理论和群论方法来研究分岔理论大致能比较满意地处理以下几方面的问题：

(1) 将映射的分岔问题化为比较简单的正规形（识别问题），并通过分岔问题级数展式的前有限项来确定其多重解的性态（有限确定性）．

(2) 研究分岔问题在一般扰动下的解的结构（普适开折）及其不变性质（持续性），并对所涉及的分岔问题按余维数进行分类（分类问题）．

(3) 通过运用群表示论和不变量理论工具将分岔理论的研究

范围拓广到具有对称形式的解的结构变化并使计算过程简化.

(4) 对于Hopf分岔及与周期解、拟周期解有关的分岔问题作出统一的处理，并给出可行的计算公式.

(5) 运用群论方法对于分岔问题的对称破缺和增加过程，及分岔解的稳定性质作出较为有效的处理.

(6) 群论工具还可用来研究等变离散系统的吸引子，特别是混沌吸引子的对称性结构，增减和转迁过程.

在分岔理论的奇点和群论方法方面，M. Golubitsky 等人分两卷编著的"Singularities and Groups in Bifurcation Theory"([GSc5, GSS]) 无疑是很好的著作，它系统地论述了该理论的方法，并给出不少很有价值的应用范例. 但因其篇幅较大（约百万字），而对所用到的群论和奇点理论基础方面的论述又过于简略，难以为广大读者在短期内理解和掌握. 另一方面，Golubitsky 等人自 1988 年以来对于对称性混沌吸引子的引人注目的工作也未包括在这两卷书中. 为了使我国从事分岔理论应用方面的科研工作者能在不太长的时间内了解并掌握奇点和群论方法这一有用的工具，同时为使从事数学理论和应用研究的工作者能较快地深入这个方面并找到研究的途径，作者编写了这本书. 本书除汇集了 M. Golubitsky 等人上述两卷书的基本内容外，还介绍了近几年来国内外这方面的一些重要研究成果，特别是介绍了在对称的混沌吸引子方面的一些重要结果. 作者希望本书在面向科技工作者的同时，还能成为适合于研究生和大学高年级学生阅读的教材.

全书共分七章. 第一章是引论，先介绍对称性分岔问题，从中可了解到全书要讲的大致内容和方法. 再介绍本书在研究分岔问题时要用到的非线性分析方法，特别是 Liapunov-Schmidt 简约，它常常能将一个高维或无穷维的分岔问题约化成有穷维问题来研究. 然后引进以后要用到的奇点理论基本知识，其中包括中山(Nakayama) 引理和 Malgrange 预备定理.

第二章介绍单变量分岔理论，分无对称和 $\mathbf{Z}_2$ 对称两种情形，从中可了解到用奇点理论和群论方法研究分岔问题的基本要点.

第三章比较系统地介绍群论方法，分紧 Lie 群的表示论和不变量理论两个方面. 考虑到从事分岔理论和应用研究的读者可能对这方面的内容不太熟悉，我们对一些重要的基本结论给出证明.

第四章是在上一章群论方法基础上讲述关于非线性映射的对称性分岔理论，其主要内容是将第二章提到的识别问题和普适开折理论系统化、一般化，建立一些基本定理；同时还对一些常用的对称性分岔问题作出计算，并对一些基本定理给出证明.

第五章是关于向量场的局部分岔理论. 先论述关于简单分岔和 Hopf 分岔的一般结论，经过简约，它们可分别化为第二章中单状态变量的无对称和 $\mathbf{Z}_2$ 对称情形. 为研究向量场的简约和解的稳定性，这一章还介绍 Birkhoff 正规形和 Floquet 理论方法. 最后并就定态和 Hopf 这两种模态的相互作用问题进行讨论.

第六章是关于等变向量场中定态和 Hopf 分岔的对称破缺理论，重点是 $\mathbf{O}(2)$等变的 Hopf 分岔理论. 这一章还在 $\mathbf{O}(2)$对称情形下介绍定态与 Hopf 的模态相互作用.

第七章介绍由等变映射生成的离散系统中（混沌）吸引子的对称性问题，特别对有限群作用下吸引子的容许和强容许子群的结构作出讨论.

本书为便于读者查阅及自身前后引用方便，除定义按章节独立排序外，例题、命题、引理、定理、注等均按章节统一排序.

本书要求读者有数学基础方面的知识. 每章末附有习题，以便于读者更好地掌握本书所涉的理论和方法.

本书得到中国科学院科学出版基金和国家自然科学出版基金的资助，谨于此致谢. 作者曾就本书的基本内容在北京大学、天津大学、南开数学所、西安交大和清华大学等地进行讲授，在此谨向上述单位的有关专家和同志的热情支持表示感谢. 作者特别感谢王晓峰同志在本书编写中所作的整理工作和提出的有益的建议.
但书中一定还有许多不足之处，作者诚恳地希望读者批评指正.

作 者

于清华园

目 录

第一章　引　论

作为引论，本章介绍与对称性分岔问题有关的概念、方法及以后几章要用到的一些预备知识．我们先在§1.1中通过一些例子说明对称性分岔问题的有关概念和方法，接着，在§1.2中介绍微分理论和隐函数定理，并在§1.3中引进Liapunov-Schmidt简约，从而把一个(可能是)无穷维空间中的分岔问题简约成有限维的问题来研究．然后，在§1.4中引进奇点理论方法的基本知识，并在最后§1.5中还就奇点理论中的Malgrange预备定理给出证明．

§1.1　对称性分岔问题和方法

本节先介绍对称性及分岔问题的一般提法，并通过一些例子介绍方程的解在分岔点附近的稳定性和对称性的变化，然后介绍具有对称性的离散系统中的分岔问题．在本节最后介绍处理对称性分岔问题的一般途径，从中可以了解到本书的基本内容．

1.1.1　分岔问题

设$\mathscr{X}$和$\mathscr{Y}$为Banach空间，Λ为某Banach空间中的开集，$F:\mathscr{X}\times\Lambda\to\mathscr{Y}$为可微映射．我们下面给出局部分岔的概念．

定义 1.1.1　设$(x_0,\lambda_0)\in\mathscr{X}\times\Lambda$满足方程

$$F(x,\lambda)=0,\tag{1.1}$$

$F(x_0,\lambda_0)=0$．如果在$(x_0,\lambda_0)\in\mathscr{X}\times\Lambda$的任意邻域U内，(1.1)(至少)有两个不同的解$(x_1,\lambda)$，$(x_2,\lambda)\in$U，即

$$F(x_1,\lambda)=0=F(x_2,\lambda)\text{ 且 }x_1\neq x_2,$$

则称(x_0,λ_0)为F的分岔点，λ_0称为分岔值．在分岔问题$F(x,\lambda)$

中，称 x 为状态变量，称 λ 为分岔参数，并且我们把 (x_0, λ_0) 附近满足(1.1)的点 $(x, \lambda) \in \mathscr{X} \times \Lambda$ 的集合称为 F 的分岔图.

例 1.1.1 设 $f(x, \lambda) = \lambda x - x^3$，$x, \lambda \in \mathbb{R}$. 则 $\lambda = 0$ 为 f 的分岔值，这是树枝(pitchfork)分岔.

分岔问题还可定义在无穷维空间上.

例 1.1.2 长为 π 的压杆的屈曲问题可归结为下面的 Euler 方程

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 u}{ds^2} + \lambda \sin u = 0, \\ u'(0) = u'(\pi) = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

的非零解. 设 $C^k[0, \pi]$ 为由区间 $[0, \pi]$ 上有直至 k 阶连续导数的实函数全体组成的 Banach 空间，$v \in C^k[0, \pi]$ 的范数为

$$\| v \|_k = \max_{0 \leqslant j \leqslant k} \sup_{s \in [0, \pi]} |v^{(j)}(s)|. \tag{1.3}$$

取 $\mathscr{X} = \{v \in C^2([0, \pi]) \mid v'(0) = v'(\pi) = 0\}$，$\mathscr{Y} = C[0, \pi]$，并设 $F: \mathscr{X} \times \mathbb{R} \to \mathscr{Y}$ 由下式给出

$$F(u, \lambda) = \frac{d^2 u}{ds^2} + \lambda \sin u, \tag{1.4}$$

则本问题归结为确定方程 $F(u, \lambda) = 0$ 的分岔解.

定义 1.1.2 设 $(x, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. 考虑两个分岔问题 $f, g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f 与 g 在原点附近强等价是指在 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 的原点附近存在形如

$$(x, \lambda) \mapsto (X(x, \lambda), \lambda)$$

的 C^∞ 变换及 C^∞ 函数 $S(x, \lambda)$，使

$$S(x, \lambda) g(X(x, \lambda), \lambda) = f(x, \lambda), \tag{1.5}$$

其中 $X(0,0) = 0$，$\dfrac{\partial}{\partial x} X(0,0) > 0$ 且 $S(0,0) > 0$.

可以验证(参见注 2.1.1)，强等价保持分岔特性不变，即对于原点附近的同一个 λ，f 与 g 的零点数相同.

下面我们引进一个将在第二章给出证明的命题，根据它，我们将会在例 1.3.4 中看到，例 1.1.2 中的 F 在 $\lambda = 1$ 处与例 1.1.1 的树枝分岔有着类似的定性特性.

命题 1.1.3 设 $g:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在原点附近为 C^∞ 函数. 则 g 与树枝分岔 $f(x,\lambda)=\lambda x-x^3$ 强等价的充要条件是，在 $(x,\lambda)=(0,0)$ 处 g 满足

$$g=g_x=g_{xx}=g_\lambda=0,\ g_{x\lambda}>0,\ g_{xxx}<0. \tag{1.6}$$

证明 参见例 2.1.2(a). □

需要说明的是，上面我们定义的只是静态分岔概念. 如果把分岔问题 $F(x,\lambda)$ 同微分方程

$$\frac{dx}{dt}=F(x,\lambda) \tag{1.7}$$

的解的定性结构变化联系起来，则可得到动态分岔的概念. 对于这类分岔问题下面我们还要结合 Hopf 分岔作进一步讨论.

1.1.2 对称性

对称性的概念可通过变换群来描述. 为简单起见，我们先省略参数. 考虑映射

$$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n. \tag{1.8}$$

定义 1.1.3 设 γ 为可逆 $n\times n$ 矩阵. 称 γ 为(1.8)的对称，若它与 f 交换，即

$$f(\gamma x)=\gamma f(x),\quad \forall\ x\in\mathbb{R}^n. \tag{1.9}$$

容易看出，若 γ_1 和 γ_2 为(1.8)的对称，则 $\gamma_1\gamma_2$ 和 γ_1^{-1} 也是(1.8)的对称，即(1.8)的对称组成一个群，称为(1.8)的对称群.

一般说来，设 Γ 是一个群，$\mathbf{GL}(V)$ 是Banach 间 V 到自身的可逆线性变换集.

定义 1.1.4 Γ 在空间 V 上的一个作用是指 Γ 到 $\mathbf{GL}(V)$ 中的一个同态 ρ，即对每个 $\gamma\in\Gamma$ 对应有 $\rho(\gamma)\in\mathbf{GL}(V)$ 满足

$$\rho(\gamma_1)\rho(\gamma_2)=\rho(\gamma_1\gamma_2),\quad \forall\ \gamma_1,\gamma_2\in\Gamma. \tag{1.10}$$

有时把作用简单记为 $(\gamma,x)\mapsto\gamma x:\ \Gamma\times V\to V$.

设群 Γ 同时作用于空间 V 和 W. 映射 $F:\ V\to W$ 的对称性就体现为与群 Γ 交换，或 Γ 等变，即

$$F(\gamma x)=\gamma F(x),\quad \forall\ x\in V,\quad \forall\ \gamma\in\Gamma. \tag{1.11}$$

称 $\mathbf{GL}(n) \equiv \mathbf{GL}(\mathbb{R}^n)$ 为一般线性群，其子群

$$\mathbf{O}(n) = \{\gamma \in \mathbf{GL}(n) \mid \gamma^T\gamma = I_n\}$$

为正交群，这里 γ^T 是矩阵 γ 的转置，I_n 是 $n\times n$ 单位矩阵. 我们常把对称群 Γ 看作 $\mathbf{O}(n)$ 中的一个闭子群，亦称紧 Lie 群，此时，Γ 作为 $n\times n$ 矩阵群对空间 $\mathbb{R}^n$ 有标准作用 $(\gamma, x) \mapsto \gamma x$: $\Gamma\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. 在第三章将会看到，这样的作法是有普遍意义的.

例 1.1.4 常用的紧 Lie 群 Γ 除 $\mathbf{O}(n)$ 外，还有其子群:

(a) 特殊正交群

$$\mathbf{SO}(n) = \{\gamma \in \mathbf{O}(n) \mid \det\gamma > 0\}.$$

特别，$\mathbf{SO}(2)$ 中元可表成平面旋转

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

的形式. 故通过对应 $R_\theta \mapsto \theta$, $\mathbf{SO}(2)$ 可同构于圆周群 $\mathbf{S}^1$. 记

$$\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1.13}$$

称为平面翻转(flip). 则 $\mathbf{O}(2)$ 可由 $\mathbf{SO}(2)$ 及 κ 生成.

(b) m 阶循环群 $\mathbf{Z}_m$，它同构于 $\mathbf{SO}(2)$ 的子群(仍记)

$$\mathbf{Z}_m = \{R_{2k\pi/m} \mid k = 0, 1, \cdots, m-1\}. \tag{1.14}$$

(回忆有限群 Γ 的阶，记作 $|\Gamma|$，是指它所含的元素的个数.)

(c) $2m$ 阶两面体群 $\mathbf{D}_m$，它由形如(1.14)的 $\mathbf{Z}_m$ 及翻转 κ 生成.

例 1.1.5 我们来看 $\mathbf{O}(2)$ 及其子群对空间 $\mathbb{R}^2$ 的作用. 把 $\mathbb{R}^2$ 等同于复平面 $\mathbb{C}$. 对整数 k，由

$$\theta \cdot z = e^{ik\theta} z \tag{1.15}$$

给出圆周群 $\Gamma = \mathbf{S}^1$ 在 $\mathbb{C}$ 上的作用. 易见，当 $k=1$ 时这种作用与 $\mathbf{SO}(2) \cong \mathbf{S}^1$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上的标准作用是等同的. 通过翻转

$$\kappa \cdot z = \bar{z} \tag{1.16}$$

可以把这种作用扩张为 $\mathbf{O}(2)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的作用. 特别，例 1.1.4(b)和(c)中的 $\mathbf{Z}_m$ 和 $\mathbf{D}_m$ 标准作用在 $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ 上时，可分别看作由角度 $2\pi/m$ 的旋转生成的旋转群和保持正 m 边形不变的对称群.

需要指出的是，同一个群也可以作用于不同空间. 比如，例 1.1.5中的群 $\mathbf{Z}_2$ 又记成 $\{1,-1\}$，它可以乘法作用于空间 $\mathbb{R}$.

现在我们对上述系统引进参数，考虑由于参数变化而引起的分岔现象.

设 V，W 和 Λ 均为 Banach 空间，且有紧 Lie 群 Γ 同时作用于 V 和 W 上，$(x,\lambda)\in \mathrm{V}\times\Lambda$. 与上面类似，称分岔问题 F: $\mathrm{V}\times\Lambda\to\mathrm{W}$ 为 Γ 等变的，若

$$F(\gamma x,\lambda)=\gamma F(x,\lambda),\quad \forall\ (x,\lambda)\in \mathrm{V}\times\Lambda,\gamma\in\Gamma. \tag{1.17}$$

在描述某个分岔问题的对称性时，相应的群 Γ 可根据映射的自身性质，方程所刻划的模型的特点，或方程解的特性来寻求. 比如，例 1.1.1 中 $f(-x,\lambda)=-f(x,\lambda)$，例 1.1.2 中，$F(-u,\lambda)=-F(u,\lambda)$，它们都为 $\mathbf{Z}_2$ 等变.

例 1.1.6 设 f: $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ 光滑. 考虑方程

$$\dot{x}\equiv\frac{dx}{dt}=f(x,\lambda)$$

的 2π 周期解. 记 $\mathscr{Y}=\mathrm{C}_{2\pi}$ 为 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}^n$ 中的连续的 2π 周期函数空间，$\mathscr{X}=\mathrm{C}^1_{2\pi}$ 为 $\mathscr{Y}$ 中的可微函数子空间. 定义 F: $\mathscr{X}\times\mathbb{R}\to\mathscr{Y}$ 为

$$F(x,\lambda)=-\frac{dx}{dt}+f(x,\lambda). \tag{1.18}$$

取 Γ 为圆周群 $\mathbf{S}^1$，作用在空间 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 上为移相

$$(\theta\cdot y)(t)=y(t+\theta),\quad \forall\ y\in\mathscr{Y},\quad \theta\in\mathbf{S}^1. \tag{1.19}$$

则 F 为 $\mathbf{S}^1$ 等变.

例 1.1.7 无对称的分岔问题 $F(x,\lambda)$ 可看成 Γ 等变分岔问题的特例，只要取 $\Gamma=\mathbb{1}$ 为由恒等元组成的平凡群.

1.1.3 稳定性和对称性的变化

我们指出，如果把 f 在分岔点 (x_0,λ_0) 附近的零点看成微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(x,\lambda) \tag{1.20}$$

的平衡解，则分岔现象常同方程(1.20)的稳定性质密切相关，这