弹性力学问题的有限单元法

华东水利学院

水利电力出版社

弹性力学問題的
有限单元法

华东水利学院

水利电力出版社

弹性力学问题的有限单元法
华东水利学院

*

水利电力出版社出版
（北京德胜門外六铺炕）
新华书店北京发行所发行·各地新华书店經售
中國建筑工业出版社印刷厂印刷

*

1974年10月北京第一版
1974年10月北京第一次印刷
印数 00001-11800册 每册0.92元
书号 15143·3101

毛主席語录

我们必须打破常规，尽量采用先进技术，在一个不太长的历史时期内，把我国建设成为一个社会主义的现代化的强国。

对于外国文化，排外主义的方针是错误的，应当尽量吸收进步的外国文化，以为发展中国新文化的借镜；盲目搬用的方针也是错误的，应当以中国人民的实际需要为基础，批判地吸收外国文化。

中国人民有志气，有能力，一定要在不远的将来，赶上和超过世界先进水平。

序

为了贯彻执行**“教育必须为无产阶级政治服务，必须同生产劳动相结合”**的方针，搞好教育革命，开门办学，在1972年5月到9月的期间，我们在湖南省水利电力勘测设计院结合生产实际，用有限单元法对混凝土坝的变温应力进行了分析和计算。在此期间，为了便于该院的同志们和我们一起学习讨论，曾向他们汇报了我们以前学习过的一部分内容，并编写了关于有限单元法的一份资料。后来，有不少水利工程设计单位的同志们，要求我们把那份资料重行印发，以适应他们工作上的需要。为此，我们对上述资料加以修改和补充，编出一本《弹性力学问题的有限单元法》，从1973年年初开始进行交流。

在此后的一年中间，我们又先后接受或参加了一些生产科研工作，从而有机会向工程设计单位、计算技术研究单位和兄弟院校学习，对有限单元法的计算方案和计算程序共同进行一些探索，实践和讨论。特别是，由于上海市计算技术研究所和我们协作，试编出几套通用程序，才比较有效地解决了生产上提出的一些计算问题。现在把这一期间所得的成果并入上述的那份交流资料，加以整理，编成这本书，供读者参考。

在弹性力学问题的有限单元法中，对于原理的阐述和公式的推导，虽然可以应用结构力学，但很多文献的作者应用了变分法。鉴于大多数读者对结构力学比较熟悉，我们就一律沿用或改用结构力学来说明。关于温度场和流场的问题，却不得不例外地用了变分原理，因为这两方面的问题不属于结构力学的范围。

在现有的文献中，不同的作者对于同一类型的问题，或者同一作者对于不同类型的问题，有时采用不同的单元标记或不同的坐标系统。在编写本书时，我们统一了单元的标记，并统一采用了右手坐标系。这样，不但使读者会感到方便一些，而且有利于日后编制一套各种单元都可以联合使用、各种结构物都可以通用的计算程序。

估计有些读者没有接触过弹性力学，或者没有接触过矩阵代数，所以在本书的第一章中简单介绍了弹性力学的有关内容，在第七章中附录了有关的矩阵代数知识，以便读者在阅读本书正文之前，先自学或复习一下这些内容。不足之处，请分别参阅这方面的参考书籍。

由于我们的理论水平不高，实践经验又少，书中必然会有不少的缺点和错误。恳切希望读者热情地帮助我们，对本书进行严格的审查，把发现的缺点和错误及时地通知我们，以便加以修改或更正。此外，还希望兄弟单位的同志们及早编写出质量较高的资料和书籍，供大家学习。让我们在批林批孔运动中，继续搞好教育革命，为使有限单元法这一工具更好地为我国的社会主义建设事业服务而共同努力。

1974年3月

目　录

第 一 章
弹性力学简介

用有限单元法求解弹性力学问题，并不需要掌握弹性力学中很多的理论，但须对其中的某些基本概念和基本方程有所了解。为此，本章中将简单介绍这些概念和方程，作为介绍有限单元法的导引。

§1-1 应 力 的 概 念

弹性体受力以后，其内部将发生应力。为了描述弹性体内某一点P的应力，在这一点从弹性体内割取一个微小的平行六面体$PABC$，它的六面垂直于坐标轴，如图1-1。将每一面上的应力分解为一个正应力和两个剪应力，分别与三个坐标轴平行。正应力用字母σ表示。为了表明这个正应力的作用面和作用方向，加上一个角码，例如，正应力σ_x是作用在垂直于x轴的面上同时也沿着x轴方向作用的。剪应力用字母τ表示，并加上两个角码，前一个角码表明作用面垂直于哪一个坐标轴，后一个角码表明作用方向沿着哪一个坐标轴。例如，剪应力τ_{xy}是作用在垂直于x轴的面上而沿着y轴方向作用的。

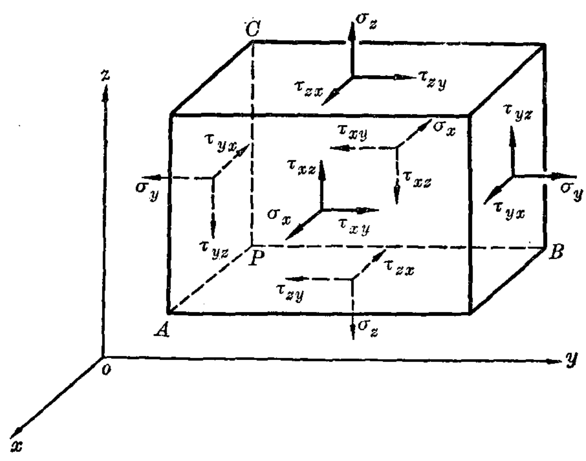

图 1-1

如果某一个面上的外法线是沿着坐标轴的正方向，这个面上的应力就以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。相反，如果某一个面上的外法线是沿着坐标轴的负方向，这个面上的应力就以沿坐标轴负方向为正，沿坐标轴正方向为负。图上所示的应力全都是正的。注意，虽然上述正负号规定，对于正应力说来，结果是和材料力学中的规定相同（拉应力为正而压应力为负），但是，对于剪应力说来，结果是和材料力学中的规定不完

全相同的。

六个剪应力并不是互不相关而是两两相等的。根据图中微小平行六面体的平衡条件，可以得到

$$\tau_{xy}=\tau_{yx},\ \ \tau_{yz}=\tau_{zy},\ \ \tau_{zx}=\tau_{xz}.$$

这就表示剪应力互等定律：作用在两个互相垂直的面上并且垂直于该两面交线的剪应力是互等的（大小相等，正负号也相同）。因此，剪应力记号的两个角码可以对调。通常用 τ_{xy} 统一地代表 τ_{xy} 和 τ_{yx}，用 τ_{yz} 统一地代表 τ_{yz} 和 τ_{zy}，用 τ_{zx} 统一地代表 τ_{zx} 和 τ_{xz} 。

可以证明，如果 σ_x，σ_y，σ_z，τ_{xy}，τ_{yz}，τ_{zx} 这六个量在 P 点是已知的，就可以求得经过该点的任何面上的应力，以及该点的最大与最小的正应力和剪应力。因此，这六个量可以完全确定该点的应力状态，它们就称为在该点的应力分量。

一般说来，弹性体内各点的应力状态都不相同，因此，描述弹性体内应力状态的上述六个应力分量并不是常量，而是坐标 x，y，z 的函数。

六个应力分量的总体，可以用一个列阵 $\{\sigma\}$ 来表示：

$$\{\sigma\}=\left\{\begin{matrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{matrix}\right\}=[\sigma_x\quad \sigma_y\quad \sigma_z\quad \tau_{xy}\quad \tau_{yz}\quad \tau_{zx}]^T. \tag{1-1}$$

§1-2 位移及形变．几何方程

弹性体在受力以后，还将发生位移和形变，也就是位置的移动和形状的改变。

弹性体内任一点的位移，用它在坐标轴 x，y，z 上的投影 u，v，w 来表明，以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。这三个投影称为该点的位移分量。当然，一般说来，位移分量也是坐标 x，y，z 的函数。

为了描述弹性体内任一点 P 的形变，在这一点沿着坐标轴的正方向取三个微小线段 $PA=\Delta x$，$PB=\Delta y$，$PC=\Delta z$，如图1-1。弹性体变形以后，这三个线段的长度以及它们之间的直角都将有所改变。线段的每单位长度的伸缩称为正应变，线段之间的直角的改变称为剪应变。正应变用字母 ε 表示：ε_x 表示 x 方向的线段（即 PA）的正应变，其余类推。正应变以伸长时为正，缩短时为负，与正应力的正负号规定相对应。剪应变用字母 γ 表示：γ_{xy} 表示 x 与 y 两方向的线段（PA 与 PB）之间的直角的改变，其余类推。剪应变以直角变小时为正，变大时为负，与剪应力的正负号规定相对应（正的 τ_{xy} 引起正的 γ_{xy}，等等）。

可以证明，如果 ε_x，ε_y，ε_z，γ_{xy}，γ_{yz}，γ_{zx} 这六个量在 P 点是已知的，就可以求得经过该点的任一微小线段的正应变，以及经过该点的任意两个微小线段之间的夹角的改变，并且可以求得该点的最大与最小的正应变。因此，这六个量可以完全确定该点的形变

状态，它们就称为在该点的形变分量。当然，一般说来，形变分量也是坐标 x，y，z 的函数。

六个形变分量的总体，可以用一个列阵$\{\varepsilon\}$来表示：

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{Bmatrix}=[\varepsilon_x\quad \varepsilon_y\quad \varepsilon_z\quad \gamma_{xy}\quad \gamma_{yz}\quad \gamma_{zx}]^T. \tag{1-2}$$

形变分量与位移分量之间有一定的几何关系。如果我们只考虑微小的形变和位移，不计它们的二次幂和更高次幂，则此种关系可以表示成为

$$\begin{aligned}&\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}, &&\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}, &&\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},\\ &\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}, &&\gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}, &&\gamma_{zx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}.\end{aligned} \tag{1-3}$$

这就是所谓几何方程，它们的推导可以在任一本弹性力学教程中找到。

通过表达式（1-2），六个几何方程的总体可以用一个矩阵方程来表示：

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial w}{\partial z}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\\ \dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\end{Bmatrix}=\left[\frac{\partial u}{\partial x}\quad \frac{\partial v}{\partial y}\quad \frac{\partial w}{\partial z}\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\quad \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\quad \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right]^T. \tag{1-4}$$

由几何方程（1-3）可见，当弹性体的位移分量完全确定时，形变分量是完全确定的。反过来，当形变分量完全确定时，位移分量却不完全确定，这是因为，具有确定形状的物体，可能发生不同的刚体位移。为了说明这一点，试在式（1-3）中命

$$\varepsilon_x=\varepsilon_y=\varepsilon_z=\gamma_{xy}=\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0,$$

从而有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}=0, &&\frac{\partial v}{\partial y}=0, &&\frac{\partial w}{\partial z}=0,\\ &\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0, &&\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=0, &&\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}=0.\end{aligned}$$

积分以后，得

$$
\begin{aligned}
u&=u_0+\omega_y z-\omega_z y,\\
v&=v_0+\omega_z x-\omega_x z,\\
w&=w_0+\omega_x y-\omega_y x.
\end{aligned}
\tag{1-5}
$$

式中的 u_0，v_0，w_0，ω_x，ω_y，ω_z 是积分常数。由几何关系不难证明：u_0，v_0，w_0 代表弹性体沿坐标轴的刚体移动，ω_x，ω_y，ω_z 代表弹性体绕坐标轴的刚体转动。

§1-3　物理方程．弹性矩阵

假定所论弹性体是连续的，均匀的，完全弹性的，而且是各向同性的。这样，应力分量与形变分量之间的关系式就极为简单，已在材料力学中推导出来，抄写如下：

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x&=\frac{\sigma_x}{E}-\mu\frac{\sigma_y}{E}-\mu\frac{\sigma_z}{E},\\
\varepsilon_y&=\frac{\sigma_y}{E}-\mu\frac{\sigma_z}{E}-\mu\frac{\sigma_x}{E},\\
\varepsilon_z&=\frac{\sigma_z}{E}-\mu\frac{\sigma_x}{E}-\mu\frac{\sigma_y}{E},
\end{aligned}
\tag{1-6}
$$

$$
\gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G},\qquad \gamma_{yz}=\frac{\tau_{yz}}{G},\qquad \gamma_{zx}=\frac{\tau_{zx}}{G}.
\tag{1-7}
$$

式中的E是拉压弹性模量（或简称为弹性模量），G是剪切弹性模量，μ是泊松系数，而三者之间有如下的关系：

$$
G=\frac{E}{2(1+\mu)}.
\tag{1-8}
$$

这些弹性常数都不随应力的大小而变，不随位置坐标而变，也不随方向而变。式（1-6）及（1-7）是物理方程的第一种形式。

由式（1-6）求解σ_x，σ_y，σ_z，由式（1-7）求解 τ_{xy}，τ_{yz}，τ_{zx}，并将式（1-8）代入，得出物理方程的第二种形式如下：

$$
\begin{aligned}
\sigma_x&=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left(\varepsilon_x+\frac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_y+\frac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_z\right),\\
\sigma_y&=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left(\frac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_x+\varepsilon_y+\frac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_z\right),\\
\sigma_z&=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left(\frac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_x+\frac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_y+\varepsilon_z\right),
\end{aligned}
\tag{1-9}
$$

$$
\tau_{xy}=\frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy},\quad \tau_{yz}=\frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{yz},\quad \tau_{zx}=\frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{zx}.
\tag{1-10}
$$

这些方程可以合并起来，用矩阵方程表示为

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{Bmatrix}=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix}1 & & & \text{对} & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & \text{称}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{Bmatrix}.$$

这个矩阵方程又可以简写成为

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}, \tag{1-11}$$

其中的

$$[D]=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix}1 & & & \text{对} & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & \text{称}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\end{bmatrix} \tag{1-12}$$

称为弹性矩阵，因为它完全决定于弹性常数E和μ。

§1-4 虚功及虚功方程

设有受外力作用的弹性体，如图1-2，它在i点所受的外力沿坐标轴分解为分量U_i，V_i，W_i，在j点所受的外力沿坐标轴分解为分量U_j，V_j，W_j等等，总起来用列阵$\{F\}$表示，而这些外力引起的应力用列阵$\{\sigma\}$表示：

$$\{F\}=\begin{Bmatrix}U_i\\ V_i\\ W_i\\ U_j\\ V_j\\ W_j\\ \vdots\end{Bmatrix}, \qquad \{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{Bmatrix}.$$

现在，假设弹性体发生了某种虚位移，与各个外力分量相应的虚位移分量为u_i^*，v_i^*，w_i^*，u_j^*，v_j^*，w_j^*，等等，总起来用列阵$\{\delta^*\}$表示，而引起的虚应变用列阵$\{\varepsilon^*\}$表示：

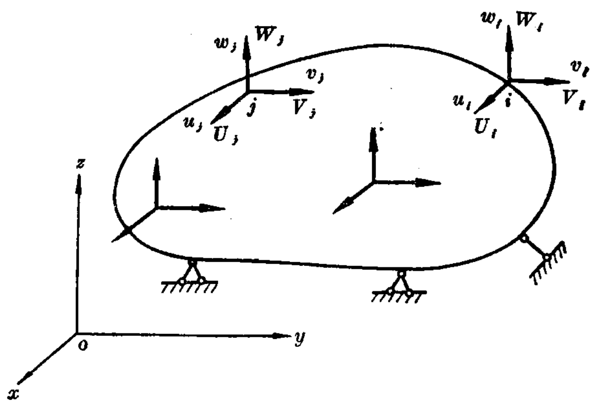

图 1-2

$$\{\delta^*\}=\begin{Bmatrix} u_i^* \\ v_i^* \\ w_i^* \\ u_j^* \\ v_j^* \\ w_j^* \\ \vdots \end{Bmatrix}, \qquad \{\varepsilon^*\}=\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^* \\ \varepsilon_y^* \\ \varepsilon_z^* \\ \gamma_{xy}^* \\ \gamma_{yz}^* \\ \gamma_{zx}^* \end{Bmatrix}.$$

这个虚位移和虚应变一般并不是上述实际外力引起的，而是另外的外力或其他 原 因 引 起的，或者是我们为了分析问题而假想在弹性体中发生的。

把虚位移原理应用于连续弹性体，可以导出这样的推理：如果在虚位移发生之前，弹性体是处于平衡状态，那末，在虚位移发生时，外力在虚位移上的虚功就等于（整个弹性体内）应力在虚应变上的虚功。

在虚位移发生时，外力在虚位移上的虚功是

$$U_i u_i^* + V_i v_i^* + W_i w_i^* + U_j u_j^* + V_j v_j^* + W_j w_j^* + \cdots = \{\delta^*\}^T\{F\}.$$

在弹性体的单位体积内，应力在虚应变上的虚功是

$$\sigma_x \varepsilon_x^* + \sigma_y \varepsilon_y^* + \sigma_z \varepsilon_z^* + \tau_{xy}\gamma_{xy}^* + \tau_{yz}\gamma_{yz}^* + \tau_{zx}\gamma_{zx}^* = \{\varepsilon^*\}^T\{\sigma\},$$

因此，在整个弹性体内，应力在虚应变上的虚功是

$$\iiint \{\varepsilon^*\}^T\{\sigma\}dx\,dy\,dz.$$

于是由上述推理得到

$$\{\delta^*\}^T\{F\} = \iiint \{\varepsilon^*\}^T\{\sigma\}dx\,dy\,dz. \qquad (1\text{-}13)$$

这就是弹性体的虚功方程。

应当指出：在虚位移发生时，约束力（支座反力）是不做功的，因为约束力在其所约束的方向是没有位移的。但是，如果我们解除了某一个约束，而代之以相应的约束力，那末，在虚位移发生时，这个约束力就要在相应的虚位移上做虚功，而这个约束力的分量及其相应的虚位移分量就应当作为列阵$\{F\}$及$\{\delta^*\}$中的元素进入虚功方程（1-13）。

§1-5 两种平面问题

任何一个弹性体都是空间物体，一般的外力都是空间力系，因此，严格地说，任何实际问题都是空间问题，都必须考虑所有的位移分量，形变分量和应力分量。但是，如果所考虑的弹性体具有特殊的形状，并且承受的是特殊外力，就有可能把空间问题简化为近似的平面问题，不考虑某些位移分量，形变分量或应力分量。这样处理，分析和计算的工作量将大大地减少（当然，精确度将不免有所降低）。

1.平面应力问题

设有很薄的均匀薄板，图1-3，只在板边上受有平行于板面并且不沿厚度变化的面力，同时，体力也平行于板面并且不沿厚度变化。例如平板坝的平板支墩，以及图中所示的深梁，都属于此类。

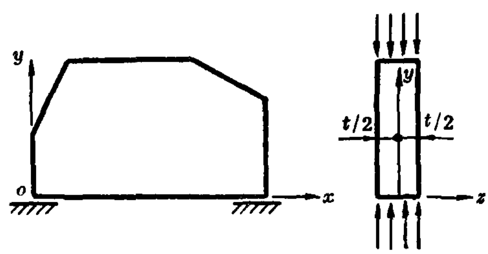

图 1-3

设薄板的厚度为 t 。以薄板的中面为xy面，以垂直于中面的任一直线为 z 轴。由于板面上不受力，所以有

$$(\sigma_z)_{z=\pm\frac{t}{2}}=0, \qquad (\tau_{zx})_{z=\pm\frac{t}{2}}=0, \qquad (\tau_{zy})_{z=\pm\frac{t}{2}}=0.$$

又因为板很薄，外力又不沿厚度变化，所以，可以认为在整个薄板的所有各点都有（注意到剪应力互等定律）：

$$\sigma_z=0, \qquad \tau_{zx}=\tau_{xz}=0, \qquad \tau_{zy}=\tau_{yz}=0.$$

这样就只剩下平行于 xy 面的三个应力分量，即 σ_x，σ_y，τ_{xy}，所以这种问题就称为平面应力问题，而应力的矩阵表示简化成为

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}. \tag{1-14}$$

由物理方程（1-7）中的后二式可见，这时的剪应变

$$\gamma_{yz}=0, \qquad \gamma_{zx}=0.$$

由物理方程（1-6）中的第三式可见

$$\varepsilon_z=-\frac{\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y),$$

它一般并不等于零，但可由 σ_x及 σ_y 求得，在分析问题时不必考虑。于是只需要考虑三个

形变分量 ε_x，ε_y，γ_{xy}，而物理方程简化为

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E},\\
\varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \mu\frac{\sigma_x}{E},\\
\gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}.
\end{aligned}
\tag{1-15}
$$

将应力分量用形变分量表示，上式成为

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y),\\
\sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}(\mu\varepsilon_x+\varepsilon_y),\\
\tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy} = \frac{E}{1-\mu^2}\cdot\frac{1-\mu}{2}\gamma_{xy},
\end{aligned}
\tag{1-16}
$$

或者合并起来用矩阵方程表示为

$$
\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & 对 & \\ \mu & 1 & 称 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \tag{1-17}
$$

它仍然可以简写成为

$$
\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \tag{1-18}
$$

但这时的弹性矩阵简化为

$$
[D] = \frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & 对 & \\ \mu & 1 & 称 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}. \tag{1-19}
$$

因为只有三个形变分量 ε_x，ε_y，γ_{xy}需要考虑，所以几何方程（1-4）简化为

$$
\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}. \tag{1-20}
$$

由于 z 方向没有外力，所以 $W_i = W_j = \cdots = 0$，而外力的虚功简化为

$$
U_i u_i^* + V_i v_i^* + U_j u_j^* + V_j v_j^* + \cdots.
$$

仍然把它写成 $\{\delta^*\}^T\{F\}$，则

$$
\{F\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ \vdots \end{Bmatrix}, \qquad \{\delta^*\} = \begin{Bmatrix} u_i^* \\ v_i^* \\ u_j^* \\ v_j^* \\ \vdots \end{Bmatrix}. \tag{1-21}
$$

因为 $\sigma_z=0$，$\tau_{yz}=0$，$\tau_{zx}=0$，所以在弹性体的每单位体积内，应力在虚应变上的虚功简化为

$$\{\varepsilon^*\}^T\{\sigma\}=\sigma_x\varepsilon_x^*+\sigma_y\varepsilon_y^*+\tau_{xy}\gamma_{xy}^*. \tag{1-22}$$

在整个弹性体内，应力的虚功仍然是

$$\iiint\{\varepsilon^*\}^T\{\sigma\}dx\,dy\,dz,$$

但由于板很薄，应力和形变沿厚度的变化可以不计，所以上式中的被积函数只是 x 和 y 的函数而上式简化为

$$\iint\{\varepsilon^*\}^T\{\sigma\}dx\,dy\,t.$$

于是弹性体的虚功方程简化为

$$\{\delta^*\}^T\{F\}=\iint\{\varepsilon^*\}^T\{\sigma\}dx\,dy\,t. \tag{1-23}$$

2.平面形变问题

设有无限长的柱形体，它的横截面如图 1-4 所示，在柱面上受有平行于横截面而且不沿长度变化的面力，同时，体力也平行于横截面而且不沿长度变化（弹性体的内在因素和外来作用都不沿长度变化）。

以任一横截面为xy面，任一纵线为 z 轴，则所有一切应力分量，形变分量和位移分量都不沿 z 方向变化，它们都只是 x 和 y 的函数。此外，在这一情况下，由于对称（任一横截面都可以看做对称面），所有各点都只会有 x 和 y 方向的位移而不会有 z 方向的位移，即

$$w=0\ .$$

因此，这种问题称为平面位移问题，但在习惯上常常称为平面形变问题。

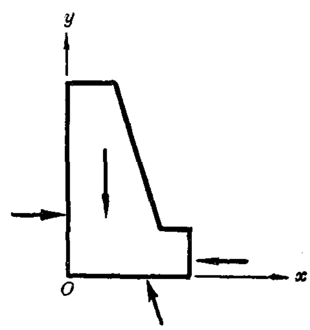

图 1-4

既然 $w=0$，而且 u 及 v 又只是 x 和 y 的函数，由几何方程（1-3）可见 $\varepsilon_z=\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0$。于是只剩下三个形变分量 ε_x，ε_y，γ_{xy}，而几何方程仍然简化为方程（1-20）。

由物理方程（1-7）中的后二式可见 $\tau_{yz}=0$，$\tau_{zx}=0$（因为 $\gamma_{yz}=0$，$\gamma_{zx}=0$）。又由物理方程（1-6）中的第三式可见

$$\sigma_z=\mu(\sigma_x+\sigma_y),$$

（因为 $\varepsilon_z=0$）。虽然 σ_z 一般并不等于零，但它可以由 σ_x 及 σ_y 求得，在分析问题时不必考虑。于是也就只有三个应力分量 σ_x，σ_y，τ_{xy} 需要考虑。这样，物理方程（1-9）及（1-10）就简化为

$$\sigma_x=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left(\varepsilon_x+\frac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_y\right),$$

$$\sigma_y=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left(\frac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_x+\varepsilon_y\right),$$

$$\tau_{xy}=\frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\cdot\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\gamma_{xy},$$

或者合并起来用矩阵方程表示为

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{array}\right\}=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix}1 & 对 & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 称\\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\end{bmatrix}\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{array}\right\}, \tag{1-24}$$

它仍然可以简写为方程（1-11），但这时的弹性矩阵成为

$$[D]=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix}1 & 对 & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 称\\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\end{bmatrix}. \tag{1-25}$$

和平面应力问题一样，由于 z 方向也没有外力，所以表达式（1-21）仍然适用。由于 $\varepsilon_z=0$，$\gamma_{yz}=0$，$\gamma_{zx}=0$，所以在每单位体积内，应力在虚应变上的虚功仍然如（1-22）所示。由于应力和形变也不沿 z 方向变化，所以虚功方程（1-23）仍然适用，其中的 t 可以取为任意数值，但$\{F\}$必须是这个 t 范围内的外力。

实际的重力坝和挡土墙等等的问题，很接近于平面形变问题，但由于它们不是无限长的，而且在靠近两端之处，横截面也往往是变化的，所以并不符合无限长柱形体的条件。不过，实践证明，对于离开两端较远之处，按平面形变问题进行分析计算，得出的结果却是与实际情况很接近，而这样就可以用较小的工作量得出工程上可用的成果。

总结起来，对于两种平面问题，几何方程都是（1-20）；虚功方程都是（1-23）；物理方程都是

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\},$$

但是，对于平面应力情况下的弹性矩阵$[D]$，应当采用公式（1-19），而对于平面形变情况下的弹性矩阵$[D]$，则应当采用公式（1-25）。还可以注意：在公式（1-19）中，把E改换为$\frac{E}{1-\mu^2}$，把μ改换为$\frac{\mu}{1-\mu}$，就得出公式（1-25）。

读者试证：在两种平面问题中，如果命 $\varepsilon_x=\varepsilon_y=\gamma_{xy}=0$，则由几何方程的积分得

$$u=u_0-\omega_z y, \qquad v=v_0+\omega_z x, \tag{1-26}$$

其中 u_0及v_0分别代表弹性体沿 x 及 y 方向的刚体移动，而 ω_z 代表弹性体绕 z 轴的刚体转动。

§1-6 轴 对 称 问 题

如果弹性体的几何形状，约束情况，以及所受的外力，都是对称于某一轴（通过这个轴的任一平面都是对称面），则所有的应力、形变和位移也就对称于这一轴。这种问题称为轴对称问题。

在描述轴对称问题中的应力及形变时，用圆柱坐标 r，θ，z 比用直角坐标 x，y，z