

实用误差理论与数据处理

沙定国 编著

GJB



ISO

GB

北京理工大学出版社

实用误差理论与数据处理

沙定国 编著

北京理工大学出版社

(京)新登字 149 号

内 容 简 介

本书介绍静态测量的误差理论与数据处理方法,内容包括:测量与测量误差概述、偶然误差、粗大误差、系统误差、不等精度测量、误差传播、误差合成、最小二乘法与组合测量、回归分析与经验公式拟合、应用微机处理实验数据。每章末配有思考与练习题,书末有几个附录和常用数表,与本书配合有供微机用实验数据处理软盘,已由北京理工大学出版社出版。

本书叙述准确精巧,名词术语与符号规范,实用性强,便于教学和自学。

本书可作为高等院校检测技术与仪器专业和其有关专业的本科生教材,也可供研究生,科研和生产部门计量测试人员及工程技术技术人员参考。

实用误差理论与数据处理
沙定国 编著

北京理工大学出版社出版发行
各地新华书店经售
国防科工委印刷厂印刷

787×1092 毫米 32 开本 8.75 印张 197 千字

1993 年 5 月第一版 1993 年 5 月第一次印刷

ISBN 7-81013-695-X/TB·15

印数:1-6000 册 定价:4.20 元

前 言

本书介绍实用的误差理论和实验数据处理技术,这是从事工程测量和科学实验研究的人员普遍采用的。正确分析和估计测量误差、设法提高测量准确度、优化实验设计,是计量科学研究的一个重要分支。随着科学技术的发展,特别是电子计算机技术应用的普及,误差理论与数据处理在理论上和实用上都有了很大的发展,一些名词术语和计算方法也在逐步规范化和标准化。近年来,国内外都十分注意对在职计量检测人员进行误差理论与数据处理方法的技术培训和考核,许多高校也相继为本科生和研究生增设这方面的课程。本书的编写与出版正是为了适应这个需求。

1987年起本书作者为大学本科生相继开设选修课和必修课,也曾为计量检定人员培训班讲授误差理论的知识。本书是在原教材的基础上整理编写而成。书中所选内容适用于目前大学本科生的基础和课程学时数的限制,书中涉及的一些计量名词术语和方法力求与国际计量委员会、国家技术监督局、中国计量科学研究所颁布的文件相符,书中也融进了作者与同事们从事精密测量研究课题的一些实践经验。

考虑到目前大学生已具备概率论与数理统计初步、矩阵代数和算法语言的数学知识,并受过微型电子计算机应用技术的初步训练,故本书内容的安排起点适当高一些,方法新一些,试图围绕几种常见的实验数据处理问题,兼顾学科自身的系统性安排章节。初学者可以选学第一、二、三、四、六、七章的

内容,略去其中的§4-3、§6-3、§7-2的内容。为使学生在限定学时数内达到本课程的基本教学要求,在教学上宜采用“精讲、自学、多练”的原则。在每章末配有思考与练习题,其中一些较深入的理论与实际应用题是供学有余力的学生选用。作者鼓励学生自选应用性课题,学以致用。

本书增设了应用微机处理实验数据一章,有选择地归纳了五种常用的实验数据处理方法,附有程序设计的结构图和Quick BASIC语言编制的程序,以帮助读者较好地掌握应用微机处理实验数据的技能。本书还配有一个实验数据处理的实用软件和辅助教学软件,可提供学生在计算机房练习用,由北京理工大学出版社出版,感兴趣的读者请与出版社联系。

在编写本书的过程中曾得到校教材建设委员会同志的帮助;苏大图教授审阅了部分章节;西安工业学院孙桂林同志曾提出过宝贵的意见;国际不确定度表示工作组成员刘智敏研究员仔细地审校了全书的内容,在编写中曾多次得到他的指点帮助。在此一并向他们表示衷心的感谢。

限于作者的水平,书中错误和不当之处在所难免,恳请读者批评指正。

编著者

1992年3月

目 录

第一章 测量与测量误差概述	1
§ 1-1 测量	1
§ 1-2 测量误差	4
§ 1-3 精度	12
§ 1-4 误差与测量结果的表达	14
思考与练习题	17
第二章 偶然误差	19
§ 2-1 偶然误差的统计特性	19
§ 2-2 总体期望的最佳估计	26
§ 2-3 总体标准差的估计	28
§ 2-4 置信水平和极限误差	36
思考与练习题	51
第三章 粗大误差	55
§ 3-1 3σ 准则	56
§ 3-2 格拉布斯准则	56
§ 3-3 狄克逊准则	59
思考与练习题	62
第四章 系统误差	65
§ 4-1 系统误差的分类和特点	66
§ 4-2 系统误差的发现	68
§ 4-3 系统误差的减小和消除	82
思考与练习题	91
第五章 不等精度测量	94
§ 5-1 权与加权算术平均值	94

§ 5-2 加权算术平均值的标准差	97
思考与练习题	101
第六章 误差传播	103
§ 6-1 误差传播公式	103
§ 6-2 误差传播公式的应用	105
§ 6-3 计算机随机模拟法	109
思考与练习题	114
第七章 误差合成	117
§ 7-1 两类不确定度及其合成	118
§ 7-2 总不确定度与准确度	122
§ 7-3 微小误差的舍弃	128
§ 7-4 误差与不确定度问题综述	129
思考与练习题	130
第八章 最小二乘法与组合测量	134
§ 8-1 最小二乘法原理	134
§ 8-2 线性参数的最小二乘法	136
§ 8-3 非线性参数的最小二乘法	143
§ 8-4 组合测量问题	146
思考与练习题	150
第九章 回归分析与经验公式拟合	153
§ 9-1 一元线性回归分析	154
§ 9-2 二元线性回归分析	163
§ 9-3 多元线性逐步回归分析	167
§ 9-4 非线性回归分析	170
思考与练习题	186
第十章 应用微机处理实验数据	188
§ 10-1 直接等权测量	190
§ 10-2 不确定度合成	199
§ 10-3 线性组合测量	211
§ 10-4 一元线性回归分析	216

§ 10-5 正交多项式回归分析	221
思考与练习题	228
附录 A 算术平均值是总体期望的最佳估计	229
附录 B 几种常用分布的基本性质	231
附录 C 国际计量局建议书 INC-1(1980)	240
附录 D 测量不确定度的表示方法	
--- 1992 年国际不确定度会议概述	241
附录 E 矩阵最小二乘法	249
附表 1 正态分布积分值 $\Phi(Z)$	257
附表 2 t 分布临界值 $t_p(v)$	258
附表 3 F 分布临界值 $F_\alpha(v_1, v_2)$	259
附表 4 χ^2 分布临界值	262
部分思考与练习题答案	263
参考文献	270

第一章 测量与测量误差概述

本章简述测量、测量误差和精度的一些基本概念,以及误差与测量结果的表达方式。学习本章的内容,可以使读者对有关测量误差与数据处理的问题有一个大概的了解,为进一步学习后面章节的内容打个基础。在本章学习中应注意准确理解有关测量、测量误差和精度的一些名词术语。

§ 1-1 测 量

一、测量

测量是通过实验手段获得被测对象的量值的一个操作过程。譬如,在做化学实验时,用分析滤纸观察溶液的化学反应,以确定溶液的酸碱性等化学性能。这通常称为化学实验,而不叫化学测量。在实验室对诸如机械工件、光学材料以及电子器件等从事各种物理量值的测量,在工厂车间对产品性能的定量检验,以及在计量部门对量具和仪器的检定等等,凡此种种能够做到准确定量的实验,都属测量的范畴。本课程中讨论的实验数据处理,都是指这些能定量的实验。

二、测量的分类

各个实际的测量部门,为满足不同被测对象的要求,所用的测量方法也是多种多样的。常见的分类方法有以下几种。

1. 工程测量与精密测量

根据对测量结果的精度要求不同,可把测量分为工程测量与精密测量。工程测量是指对结果不需要考虑测量误差的测量。用于这种测量的设备和仪器,其灵敏度和精度都较低,对测量的环境也没有什么特殊要求,给出的测得值比较稳定。因此,对测量结果只需给出测得值就能满足测量的要求。还有一种工程测量是指不需要精细考虑测量误差的测量。用于这种测量的设备和仪器,在产品检定书或铭牌上标注有测量误差的极限值。因此,往往把标注的测量误差极限值作为单次测量结果的误差。在一般生产现场和一般科学实验中所进行的测量,多为工程测量。

精密测量是指要求精细估计测量误差的测量。用于这种测量的设备和仪器应具有一定的精度和灵敏度,需要一个重复多次的测量过程,每次测量能反映出测量误差的变化和存在。对测量取得的数据,要按照误差理论进行处理,算出最佳测量结果,并精细地估计测量误差的大小。进行精密测量的条件(环境)也比工程测量的要求严格,多是在符合一定测量条件的实验室内进行,所以又叫实验室测量。

本书讨论的是需要考虑误差的测量,而且以精密测量为主。

2. 直接测量与间接测量

根据取得测量结果的方法不同,可把测量分为直接测量和间接测量。

直接测量是将被测量与标准量比较,而直接获得被测量的大小。如:用游标卡尺测小尺寸轴工件直径是直接测量的一个简单例子。本书前五章讨论的内容都是直接测量的问题。

间接测量是指被测量不是直接测得的,而是通过被测量

与直接测得量之间的函数关系间接获得。如：用游标卡尺测大尺寸轴工件的直径，因量程不够，采用测弦长与矢高的方法得知轴工件直径。这是间接测量问题的一个简单例子。本书第六章将专门讨论间接测量的误差传播问题。

还有一类组合测量的问题，实际上也属于间接测量的问题。它所直接测得的量是被测量的各种组合量，可以用测量联立方程组的形式建立它们之间的数量关系。一般地，直接测得量的个数多于被测量的个数，要用最小二乘法进行数据处理。本书第八章专门讨论组合测量问题。

3. 等精度测量与不等精度测量

根据测量条件的不同，可把测量分为不等精度测量与不等精度测量。

对某一被测量进行重复测量，所取得的测量数据，认为是在相同测量精度的条件下得到的，这种测量称为等精度测量。对等精度测量所得的每个数据，它们的信赖程度是相同的，应按同等原则对待。本书除第五章之外，讨论的多是等精度测量问题。

对某一被测量进行测量得到的数据，如果信赖程度不一，这种测量称为不等精度测量。造成这种精度不等的原因，可能是由于条件的变化、测量设备的不同或更换，也可能是操作人员的熟练程度不一，等等。对不等精度的数据应当有特殊的处理方法，这将在第五章专门讨论。

4. 静态测量与动态测量

根据被测对象在测量过程中所处的状态，可把测量分为静态测量与动态测量。

静态测量是指被测量在测量过程中可以认为是固定不变的测量。静态测量不需要考虑时间因素对测量的影响，视被测

量或测量误差为随机变量来研究。

动态测量是指被测量在测量过程中发生的变化是不可忽略的,动态测量需要考虑时间因素对测量的影响,应视被测量或测量误差为随机过程来研究。

本书只讨论静态测量的问题,动态测量问题的处理可以查阅有关书籍。

三、测量的要素

一个比较完整的测量过程应包括五个要素:①测量对象;②测量手段(包括测量仪器和测量方法);③测量结果;④测量单位;⑤测量条件。本书最关心的问题之一是,如何准确地表示测量的结果。举一个简单的例子,为测某个圆形工件的直径,在恒温防震的实验室内用立式测长仪对其重复测量五次,获得五个数据,取其平均值 $L=90.001\text{mm}$ 。为表征该值的可靠程度,经过对仪器的计量检定,用概率统计的方法确定了测量五次的极限误差为 $\pm 0.002\text{mm}$ 。故测得的结果应准确地表示为 $L=90.001\pm 0.002\text{mm}$ 。由此可见,一个测量结果往往存在一个不确定度的问题。其原因就是,测量误差客观存在。在计量检定工作中,还关心不同实验室间的测量差异,这与测量条件和测量手段也密切相关。

§ 1-2 测量误差

一、误差与研究误差的目的

1. 绝对误差与相对误差

在测量中,人们总是力求得到被测量的真实值(真值)。但是,只有极少数简单的情况下,测量才能做到准确无误。例如,对一个小组的人数或对几个电脉冲计数等。然而,几乎在任何情况下,由于测量方法和仪器设备不尽完善,以及各种环境因素和人为因素的不良影响,测量和实验所得的数值与真值之间总会存在一定的差异。测量误差就是指实际测得值 x 与被测量的(约定)真值 x_0 之差。记为

$$z = x - x_0 \quad (1-1)$$

必须指出,真值是指研究某量时在所处条件下完善地确定的量值。这个量的真值是一个理想的概念,一般不可能准确知道。工厂、学校和科研机构,通常从高一级的计量机构获得向下传递的量值,把传递得到的量值替代真值,称为约定真值。一般地,约定真值是非常接近真值的,对于给定目的而言,其误差可以忽略不计。

(1-1)式中的 z 值是指绝对误差。在测 1m 长的工件与测 10mm 长的工件时,即使两者的绝对误差同是 $1\mu\text{m}$,也不能以为两者的测量精度是一样的。因此,在比较两个数量级的测量精度时,还需要用到相对误差的概念。它是指绝对误差与真值之比,或近似用绝对误差与实际测量值之比代替。记为

$$\frac{z}{x_0} \approx 1 - \frac{x_0}{x} \quad (1-2)$$

前面提到的长度为 1m 与 10mm 的工件,绝对误差同是 $1\mu\text{m}$,而它们的相对误差分别是 10^{-6} 与 10^{-4} 。显然,前者的测量,其相对精度更高。

2. 示值误差与引用误差

对于多档和用示值表示被测量大小的仪表,常用示值误差表示仪表的绝对误差。示值误差是指仪表(器)的示值减去

被测量的约定真值,记为

$$z_{\text{示}} = x_{\text{示}} - x_0 \quad (1-3)$$

由于仪表各档次、各刻度位置上的示值误差都不一样,不宜使用 $z_{\text{示}}$,而按式(1-2)计算相对误差也十分不便。为了便于评定仪表的精度等级,规定了引用误差,其定义如下:

$$\text{引用误差} = \frac{\text{示值误差}}{\text{全量程值}} \times 100\% \quad (1-4)$$

电工类仪表分为 0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 1.5, 2.5 和 5.0 七级。如果仪表为 s 级,说明合格仪表最大引用误差的绝对值不超过 $s\%$ 。设仪表的量程为 $0-x_n$,测量点为 x ,则该仪表在 x 点邻近处的示值误差应为:

$$\begin{aligned} |\text{绝对误差}| &\leq x_n \cdot s\% \\ |\text{相对误差}| &\leq \frac{x_n}{x} \cdot s\% \end{aligned} \quad (1-5)$$

一般 $x \leq x_n$,故当 x 越接近 x_n ,其精度越高; x 越远离 x_n ,其精度越低,这就是为什么人们利用这类仪表测量时,尽可能在仪表的上限值邻近或 $2/3$ 量程以上测量的原因所在。

3. 研究误差的目的

随着科学技术的发展和人类认识水平的提高,测量误差可控制得越来越小,但不可能完全消除。由于误差存在的必然性和普遍性,人们必须深入研究测量过程中产生的误差,以便提高测量的技术水平。尤其对于精密计量而言,不知误差的测量结果几乎是毫无价值的。归纳起来,研究误差的目的如下:

- (1) 正确掌握测量误差来源,分析误差的性质,以减少或消除误差;
- (2) 正确处理测量数据,合理评价测量结果;
- (3) 优化实验设计,合理选用仪器及其测量方法,提高测

量技术水平。

二、误差的来源

测量误差的来源是多方面的,在测量过程中,几乎所有因素都将引起测量误差。在分析和计算测量误差时,不可能、也没有必要将所有因素及其引起的测量误差逐一计算,因此,要着重分析引起测量误差的主要因素。同时,在分析和计算中还应避免重复和遗漏,否则将使估算的误差偏大或偏小。

图 1-1 的第一部分列出了一些误差的来源。

1. 测量方法误差

测量方法误差是指选用不同的测量方法所造成的,其中也包括在测量原理上采用近似的计算公式。

如采用直接测量时,其测量误差主要取决于基准误差和装置误差等,可不计方法误差。譬如用千分尺直接测量轴的直径,其误差主要来自千分尺的极限误差。而采用间接测量时,譬如在轴的固定弦长 L 上测量矢高 H ,按式

$$D = H + \frac{L^2}{4H}$$

计算出直径 D 。这时,直径的间接测量误差不仅与固定弦长 L 的定位误差和矢高 H 的直接测量误差有关,还取决于其间的函数关系,而不同的间接测量方法其函数关系各异。可见,间接测量中应考虑到方法误差,并且用方法误差作为评价间接测量方案好坏的一个重要标志。

有时,从需要简化问题出发,取近似的数学模型。近似的计算方法不同,造成的测量误差也各异。例如常见的几种线性近似,

$$\sin x \approx x, \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$$

还有以抛物线近似圆弧等等。

要注意的是,因数学模型近似造成的测量方法误差并不

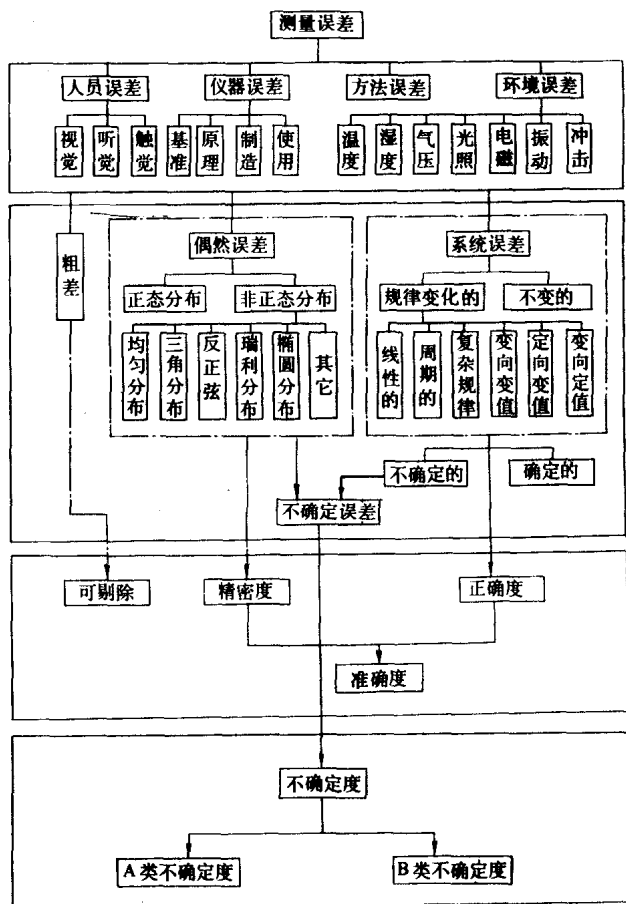


图 1-1 测量误差来源、分类、精度说明及不确定度评定

包含在测得的数据中。因此无法从处理这些实验数据中获得

测量方法的误差。

2. 测量设备误差

它包括基准器件的误差和装置的误差。

任何测量均需要供比较用的基准已知量,而作为基准的器件也不可避免地存在误差。如刻线尺有刻线误差、量块有中心长度误差等。这些误差将直接反映到测量结果中,造成测量误差。为减少这方面的误差,在选用基准器件时,应尽量使其误差小些。一般要求基准器件的误差占总测量误差的 $1/3 \sim 1/10$ 。

测量装置是在测量过程中实现被测的未知量与已知的单位量进行比较的组成部分。测量装置的误差,主要反映在其示值误差和示值稳定性上。测量装置设计的工作原理误差、制造误差以及安装、调整运转中的误差,都是测量装置误差的组成部分,并将影响测量误差。

工作原理误差——在设计测量装置时,常采用近似原理的机构,如以等分刻度的刻线尺去近似替代理论上要求不等分的刻线尺。对这类误差,应采取适当措施将其减小到允许的范围內。否则,这种测量装置的设计原理就不宜采用。

制造与安装误差——测量装置是由许多零部件组成,它们在制造和安装中均不可避免地存在误差,如读数机构中分度盘的刻线误差及安装偏心误差,测微螺杆的螺距误差,导轨的直线度以及光学系统的放大倍率,电器系统的放大比与变换系数等各种特性参数的误差,等等。产生这类误差的因素极多,影响复杂。一般择其影响大者加以分析和估算。

此外,除上述误差外,属于测量设备误差的,还有测量力引起的误差、附件误差等。

3. 测量环境误差