高等数学 第Ⅰ卷

基础与代数

萧树铁 居余马 主编

清华大学出版社

高 等 数 学

第 I 卷

基础与代数

萧树铁 居余马 主编

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 提 要

该书用现代数学的观点对传统的工科微积分和线性代数的内容体系进行了更新. 全书以近代数学的基础知识(集合、关系、运算、映射)及群、环、域的基本概念开篇,突出数学的整体性和结构性;然后从线性空间的结构与线性映射的性质入手,阐述线性代数的内容,在讲述微积分和微分方程时充分利用线性代数知识;并增添了微分几何初步. 全书知识结构新、基础厚、容量大,使用现代数学的语言和符号. 全书分 3 卷,第 I 卷为基础与代数,第 II 卷为一元微积分与微分方程,第 III 卷为多元微积分与微分几何初步.

本书是第 I 卷,内容包括:集合、关系、运算与映射;群、环、域的基本概念;线性空间与内积空间;线性映射;矩阵代数;行列式;线性方程组;特征值与特征向量,矩阵的标准形;二次型;空间解析几何.

本书可作为工科高等数学教材,亦可供有关人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 第 I 卷: 基础与代数/萧树铁,居余马主编. —北京:清华大学出版社,1995

ISBN 7-302-01803-0

I. 高… II. ①萧… ②居… III. ①高等数学②代数 IV. ①013②015

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 02860 号

出 版 者:清华大学出版社(北京清华大学校内,邮编 100084)
印 刷 者:北京市海淀区清华园印刷厂
发 行 者:新华书店总店科技发行所
开 本:850×1168 1/32 印张:13.75 字数:357 千字
版 次:1995 年 8 月第 1 版 1995 年 8 月第 1 次印刷
书 号:ISBN7-302-01803-0 / O.164
印 数:0001—4000
定 价:11.50 元

前　　言

本教材是根据我们在清华大学土木系、计算机系和电机系的教学实践经验，按同名讲义修改而成.

目前国内流行的高等数学教材颇多，多年来在广大教师的努力下，用它们培养了不少人才.然而从培养21世纪人才的角度来看，在各门学科加速相互渗透，以及随着计算机和信息技术的迅速发展而引起的各门科学和技术定量化趋势的背景下，需要进一步拓宽大学生的知识面和增强灵活反应的能力，作为大学重要基础课程的高等数学课，有必要把教学的重点从仅仅"为专业课程提供数学工具"扩展到"提高大学生的数学素质"上来，为此教学体系和内容也应作相应的调整和更新.本教材就是在这种思想指导下进行的一种尝试.

对于"数学素质"，人们有不同的理解，但有几条是比较一致的，即：(1)对事物某一方面结构的归纳和抽象的思维能力，从具体到一般的联想能力，表现之一是能建立实际问题的数学模型；(2)正确的演绎推理习惯和动手动算的能力；(3)了解基本的数学语言，具有一定的自学能力，能通过自学了解某些新的数学工具和思想.当然，提高"数学素质"不能只靠"高等数学"一门课，也不能只靠若干门数学课，而需要通过整个大学期间各种课内外的数学实践.

这本教材虽然对现行的工科微积分和线性代数的数学内容和体系作了较大的调整和更新，增加了近代数学的一些基础知识，增添了微分几何初步，并尽量使用现代数学的语言，但是，基于数学科学继承性很强的特点，加之我们的试验还是初步的，所以全书的

内容仍是以古典数学(主要是微积分、常微分方程和线性代数)为主. 关于内容的处理和体系的安排,我们强调了以下两点:

一、内容的整体性和结构性:分析、代数、几何仍是高等数学的基础,长期来一直把它们分门设课、孤立讲授(几何部分已基本取消),现在由于各门学科的发展以及现代数学对非线性和非局部问题研究的深入,它们之间的界线越来越模糊,因此有必要强调高等数学的整体性与结构性. 我们认为工科学生适当地学一些近代数学的基础知识,不仅可以使他们对于经典数学的内容有更深刻的理解,也可以开阔思路、提高他们抽象思维的能力和运用数学工具分析解决实际问题的能力;同时也有助于他们阅读使用数学较多的现代科技文献,并为他们继续学习和使用现代数学奠定必要的基础. 从数学的整体结构看,代数结构是基本的. 线性代数主要是研究有限维线性空间的结构和线性映射的性质;微积分则是研究 $R^1\to R^1$ 和 $R^n\to R^1$ 的连续函数(更一般地是 $R^n\to R^m$ 的连续映射)的各种性质,极限方法和局部线性化是它的基本方法. 因此,掌握了线性代数的知识将有助于更深入、更简明地阐述微积分、微分方程和微分几何方面的很多内容. 基于这种考虑,我们把代数安排在微积分之前讲授,这样,学生更能领会数学的整体性和结构性,也便于增加一些新的内容. 例如,用线性映射定义微分,容易得到 $R^n\to R^m$ 的可微映射 f 的微分对应于 f 的雅可比矩阵以及可微复合映射的链法则,以及微分方程和微分几何的某些内容.

二、在内容的安排上处理好一般和具体的关系:学生“数学素质”的培养有个思维习惯的建立过程(尤其在抽象能力的培养方面),教师做好这一点并不容易. 人们常常以“学生不容易接受”为理由,回避了培养学生抽象思维能力所遇到的一些矛盾,在教学过程中过份强调“从具体到一般”. 其实教学是传授人类长期积累的知识,这与本身通过实践去获取知识有所不同. 正确的教学原则应该是:“宏观上从一般到具体”(指总的内容安排),“微观上从特殊

到一般”(指具体内容的讲授).这样先见森林,再见树木,使学生扩大视野,又摆出问题,不回避矛盾,充分调动学生学习的积极性;而对每个重要的抽象概念,则必须注重介绍其实际背景,循序渐进.

鉴于以上原则,首先要考虑如何引导学生进入高等数学的领域,即把教学的起点放在何处.我们从近代数学的基础知识——集合、关系、运算和映射以及基本代数结构——群、环、域的基本概念开篇,目的是使学生在中学数学的基础上,对数学的整体认识上一个台阶,了解高等数学与中学数学的重大差别,从而激发起学生探索新事物的积极性与学习大学数学的浓厚兴趣.在此基础上,按下列次序安排教学内容和体系.

第Ⅰ卷内容包括:集合、关系、运算;基本代数结构——群、环、域的基本概念;线性空间与内积空间;映射与线性映射;矩阵;行列式;线性方程组;特征值与特征向量以及矩阵的标准形(相似标准形与二次型矩阵的合同标准形);空间解析几何.这里,我们对传统的“线性代数”的教学体系作了大的调整,突出了线性空间的结构和线性映射两大核心内容的地位和训练,并用它们来统率矩阵的计算、方程组的解的结构、矩阵的标准形和二次型的标准形.这里我们以具体的三维几何空间和 R^n 为背景,抽象出一般线性空间的公理化定义;以一组几何向量在线性运算下有没有一个向量可用其余向量线性表示为背景,抽象出线性相关性的定义;用类比物质世界中万物与100多个化学元素间的关系,讲线性空间的“基”的概念;讲线性映射时,从一元线性函数提出,以CAD(计算机辅助设计)中常用的投影、比例、错切、旋转和镜象变换为例,使学生理解 R^2,R^3 中的线性变换均把直线变为直线,而非线性变换则将直线变为曲线.这种从具体到一般的微观安排,使学生通过具体模型来理解抽象的线性空间和线性映射的概念,它有助于培养学生从实际问题中抽象出数学问题的归纳和抽象思维能力以及应用理论分析解决具体问题的能力.

第Ⅱ卷内容包括：实数理论；数值函数、极限与连续；导数与微分；微分学基本定理及其应用；定积分与不定积分及定积分的应用；函数的有限展开；广义积分；无穷级数（数项级数、幂级数与傅里叶级数）；常微分方程与线性微分方程组.

第Ⅲ卷内容包括：点集（开集、闭集、连通性）；多元函数与向量函数（$R^n \to R^m$ 的映射）的概念，极限与连续性；多元微分学（包括 $R^n \to R^m$ 的可微映射的 Jacobi 矩阵及可微复合映射的链法则）；微分几何初步——空间曲线与空间曲面的基本知识（曲线的切线和法平面，主法线，副法线，弗雷耐标架，弧长，曲率，挠率；曲面的表示，切平面，曲面的第一、第二基本形式，法曲率、主曲率、高斯曲率）；重积分及其应用；第一类曲线积分与曲面积分；第二类曲线积分与曲面积分；常义和广义含参量积分.

在第Ⅱ，Ⅲ卷中，我们从极限运算的完备性需要出发，阐述了微积分的基础——实数理论，首先用较直观的无穷小数来引入实数，然后用柯西有理序列的等价类加以严格定义，证明了实数的稠密性和完备性；对于定积分，从较直观的阶梯函数入手，通过极限过程，证明了阶梯函数在有有限个第一类间断点情况下的黎曼可积性；讨论了 R^n 到 R^m 的映射的连续性、可微性问题；增添了微分几何的初步知识. 此外，还充分利用线性代数的工具，深化了很多内容（如线性微分方程的理论、线性微分方程组的解法等）的研究.

总之，本教材与传统的工科微积分和线性代数教材相比较，在体系上注重数学的整体性，使分析、代数与几何互相渗透、互相促进；在内容方面，知识结构比较新，基础比较厚，知识面比较宽，并尽量使用现代数学语言.

教材的内容一般应比课堂讲授的内容更丰富一些. 本教材中加注“ * ”或“ * * ”的部分，一般都可不在课堂上讲授，因而也不作为教学的基本要求. 对习题的安排也遵循同样的原则，为使读者更好地掌握书中内容，我们选编了大量的训练题，这些题目分成三个

档次：一是不加注“*”的题(这是教学的基本要求)；二是加注“*”的题；三是补充题. 后两类题比较难，一般都是证明题或是与正文中加注“*”内容相对应的题. 这些题是否作为教学的要求，教师可根据学生的水平而定.

使用本教材还要考虑与物理课相配合的问题. 我校物理课安排在一年级第二学期，为使学生具有必要的微积分知识以适应物理课的要求，我们在第一学期大约用 20 个课内学时，讲授极限、导数、微分、定积分的基本概念；微分法与基本的积分法；以及定积分的物理应用. 其中有关的理论问题到第二学期系统讲授微积分时再加以讨论. 相应地，我们把第 I 卷的第 8 章安排在第 II 卷的常微分方程之前讲授，把第 I 卷的第 9 章安排在多元微积分之前讲授.

本教材适用学时(课内)为 248—272，分三学期安排，周学时分别为 6，6，3.5 或 5，每学期 16 周.

参加本教材编写工作的有：萧树铁、居余马、葛严麟、胡金德、林翠琴、杜建博和吕志等同志. 使用本教材的前身(校内讲义)进行教学的还有郑建华、宋斌恒、罗贵明、黄鸿选、项阳、李正茂，他们对本教材的编写都提过很多宝贵意见，学校教材委员会的白光义、杨积康及清华大学出版社的潘真微同志对本教材的出版给予了热情的支持，在此，我们一并表示衷心的感谢.

更新工科微积分和线性代数的教学内容和体系是一个迫切而又艰难的课题，应该从各种不同的角度探索“更新”的路子，我们的探索和尝试只是初步的，希望能起到抛砖引玉的作用. 我们盼望“更新”能呈现百花齐放的局面. 由于受我们的水平和经验所限，本教材不妥之处在所难免，恳请同行专家及热心的读者批评指教.

编　者

1994 年 9 月于清华园

目　　录

第1章　集合·关系·运算

中学数学主要是讨论数的运算、几何图形的性质以及相应的各种数量关系和图形关系，而现代数学的领域非常广阔，客观世界众多的实际问题可以抽象为各类数学问题，并采用各种不同的数学方法加以解决. 所以就整个数学而言，它是研究各种各样可以表述为数学概念的事物所组成的各类集合，研究同一集合或不同集合中元素间的各种数学关系(运算或变换)和相应的数学结构. 因此，我们将在本章介绍大学数学的一些基础知识，首先简要地叙述“集合”的一些基本概念，然后给出“二元关系”和“运算”的一般定义. 由于中学数学已讨论过“集合”的一些概念，所以本章的重点是“关系”(主要是“等价关系”)和“运算”，特别是我们将通过列举很多例子，让读者了解运算的对象非常广泛，它不只是局限于“数”. 读者在这里不仅要掌握“命题运算”、“几何向量的运算”以及“高斯消元法中的 n 元向量或矩阵运算”的一些具体内容，更重要的是要从中得到启发，十分重视如何根据实际问题的需要抽象出数学问题(或“数学模型”)，把某些“操作”定义为运算，并在以后的学习中自觉培养这方面的能力.

1-1　集合·子集·幂集·直积

集合是数学的一个最基本的概念，不能用比它更简单的概念来定义，而只能对它作些解释. 所谓**集合**(或简称**集**)，是指由一些确定的对象(或事物)汇集在一起而成的整体，组成这个整体的每个对象叫做集合的**元素**(或简称**元**). 通常，用大写字母 A,B,X,Y

等表示集合,用小写字母 a,b,x,y 等表示集合的元素. 如果元素 a 在集合 A 中,就说"a 属于 A",记作"$a\in A$";如果元素 a 不在集合 B 中,就说"a 不属于 B",记作"$a\overline{\in} B$".

全体整数、有理数、实数、复数分别所组成的集合,记作 Z,Q,R,C;全体自然数 $1,2,3,\cdots,n,\cdots$组成的集合记作 N;平面的所有直线组成一个集合,记作 L;平面上的全体三角形组成的集合记作 T;某个电路的全部节点和所有支路,某个班的全体学生也都分别组成集合.

表述一个集合,通常有两种方式:一种是穷举法,即列举出集合中的全部元素;一种是描述法,即用集合中全部元素所具有的特性来表述集合.

例如:

$$A=\{\sqrt{2},-\sqrt{2}\}=\{x|x^2-2=0,x\in R\},$$

其中前者是穷举法,后者是描述法.

$$N_2=\{x|x=2n,n\in N\},$$

$$M=\{(x,y)|x-2y=1,x,y,\in R\},$$

也分别是用描述法表述了全体正偶数和平面上坐标(x,y)适合方程 $x-2y=1$ 的所有点组成的集合.

含有有限个元素的集合叫做**有限集**,含有无穷多个元素的集合叫做**无限集**,不含任何元素的集合叫做**空集**,记作$\varnothing$,例如,

$$\{x|x^2+1=0,x\in R\}$$

是一个空集. 把空集也看作集合,在数学上是有益的,正如我们把 0 也看作是数一样.

定义 1.1 设 A,B 是两个集合,如果 A,B 含有完全相同的元素,就说 A,B **相等**,记作 $A=B$;如果 A 的每一个元素也是 B 的元素(即对于任意的 $a\in A$,均有 $a\in B$),则称 A 是 B 的**子集**(也可说,A 含于 B 或 B 包含 A),记作 $A\subset B$.

对任意集合 A,均有$\varnothing\subset A,A\subset A$.

显然,两个集合 A,B 相等,当且仅当 $A\subset B$ 与 $B\subset A$ 同时成立.

定义 1.2 非空集合 A 的所有子集组成的集合称为 A 的**幂集**,记作: $P(A)$或 2^A.

若集合 A 含有 n 个不同的元素,则其幂集 $P(A)$含有 2^n 个不同的元素.例如集合 $A=\{a,b,c\}$的幂集

$$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},A\}.$$

对于任意两个非空集合 A,B,我们把有次序的一对元素 x,y(其中 $x\in A,y\in B$)叫做有序二元组(或称序偶),记作(x,y),并称 x 为第一元素,y 为第二元素.序偶中的两个元素也可以属于同一个集合(即 $A=B$).两个序偶(x_1,y_1),(x_2,y_2)相等,当且仅当 $x_1=x_2,y_1=y_2$.由集合 A,B 中所有元素作成的序偶而组成的集合,叫做集合 A 和 B 的笛卡尔乘积(或称直积),即

定义 1.3 设 A,B 是两个非空集合,我们把集合$\{(a,b)|a\in A,b\in B\}$叫作 A 和 B 的**笛卡尔乘积**(或称**直积**),记作 $A\times B$.

特别,当 $B=A$ 时,$A\times A$(也常记作 A^2)是 A 中一切元素所作成的序偶集合.对于实数集 R,如果用任两个实数作成的序偶(x,y)表示平面直角坐标系中点的坐标,则 $R\times R$ 就是坐标平面上全部点的坐标的集合.

定义 1.4 设 A,B 是两个集合,我们把集合:

$$A\cap B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\in B\},$$
$$A\cup B=\{x|x\in A \text{ 或 } x\in B\},$$
$$A\backslash B=\{x|x\in A \text{ 但 } x\bar{\in} B\},$$

分别叫做 A 和 B 的**交集**,A 和 B 的**并集**,B 在 A 中的**余集**.

$A\backslash B$ 也可记作 $A-B$,称为 A 与 B 的**差集**.

如果 $B\in P(X)$,即 $B\subset X$,则 B 在 X 中的余集 $X\backslash B$ 常记作 $\bar{B}$ 或 C_xB.

交集、并集、余集、可用图 1-1 示意.

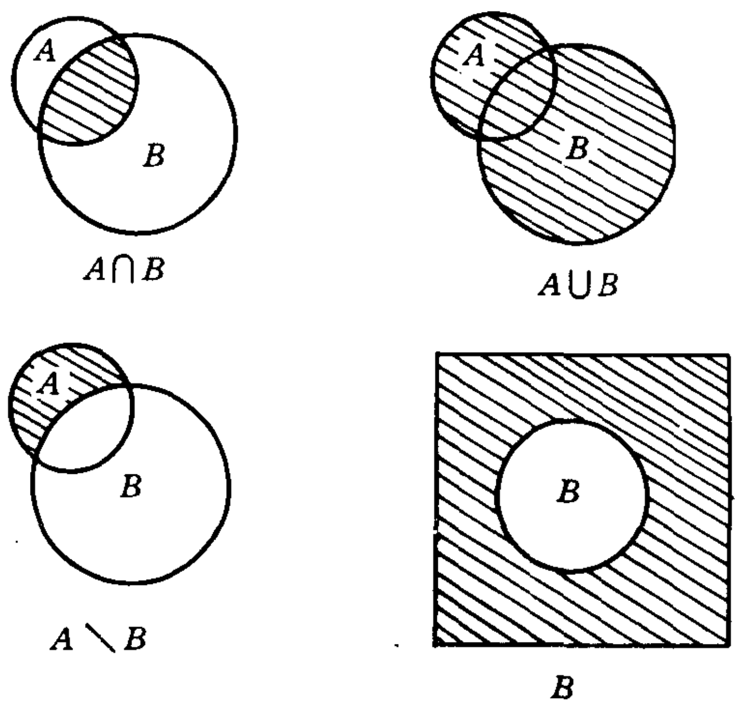

图 1-1

1-2 二元关系及其性质

对于集合中的元素，我们常要研究它们相互之间所具有的各种关系. 例如：在实数集中比较两个数的大小，有“$<$”，“$\leqslant$”，“$=$”等关系；在平面直线集中，直线间有平行、相交、垂直等关系；在三角形集中，相似、全等是三角形之间的两种关系；在人口集中，人们之间有性别、国籍、肤色相同或不相同的关系；在一个电路的节点集和支路集中，节点与支路有“关联”和“不关联”的关系. 从这些例子可见，一个集合或不同集合中，两个元素之间的“关系”是由某种特性或某种规则来描述的.

定义 1.5 设 X 是一个集合，R 是涉及两个对象的一个规则.

如果对于 X 中的任两个元素 a,b,均可确定它们是适合 R(记作 aRb)或不适合 R(记作 $a\overline{R}b$),就称 R 是集 X 中的一个**二元关系**.

定义 1.6 设 R 是集 X 中的一个二元关系,如果

(1) 对任意的 $a\in X$,均有 aRa,则 R 叫做**自反的**;

(2) 对任意的 $a,b\in X$,有 aRb,就有 bRa,则 R 叫做**对称的**;

(3) 对任意的 $a,b\in X$,由 aRb 和 bRa,可推出 $a=b$,则 R 叫做**反对称的**;

(4) 对任意的 $a,b,c\in X$,有 aRb 和 bRc,就有 aRc,则 R 叫做**传递的**.

关系 R 叫做自反的、对称的、反对称的和传递的,也常说成 R 具有自反性、对称性、反对称性和传递性.

例 在实数集中,如果 aRb 表示"$a<b$",则 R 具有传递性;如果 aRb 表示"$a\leqslant b$",则 R 具有自反性、反对称性和传递性.

在自然数集 N 中,如果 aRb 表示"$a\mid b$"(即:a 整除 b,$\frac{b}{a}\in N$),则 R 具有自反性、反对称性和传递性.

在三角形集中,三角形的相似关系 R 具有自反性、对称性和传递性. 在平面直线集中,直线的平行关系 R 也有自反性、对称性和传递性;而直线的垂直关系 R 只有对称性. 在平面的点集中,点在某固定直线上投影相同的关系 R 具有自反性、对称性和传递性.

在集 X 的幂集 $P(X)$ 中,如果 R 为两个集合的包含关系"$\supset$",则 R 是自反的、反对称的和传递的.

在由世界各国组成的集合中,规定 aRb 为 a,b 两国有共同的边界,则 R 是自反和对称的.

在人口集合中,父子关系显然没有自反性、对称性和传递性.

1-3 等价关系·等价类·商集

集合中的等价关系是把集合中元素分类的一种二元关系.要把集合中元素分类,自然会提出一个问题——什么叫做两个元素"相同"(或"相等"、"一样")呢?事实上天下没有完全不能区别的两个事物,因此,所谓两元素"相同"通常只是指它们具有某种共性,或者说在某种意义下它们是"相同"的.例如:在动物世界里从动物的性质来看,"人类"中的每个人都是"相同"的;如果在人类中只考虑人的肤色,则所有黄种人都是"相同"的;如果只考虑人的性别,则男人都是"相同"的;如果对自然数只考虑能否被 2 整除,则偶数都是"相同"的;如果对平面上由直线围成的封闭图形只考虑图形的顶点数,则所有的三角形都是"相同"的;如此等等.这样,我们就可以把两个元素"相同"也看成一种"关系",这种"关系"当然有别于其它二元关系.下面的定义就刻划了表示两个元素"相同"这一关系的特点.

定义 1.7(等价关系) 集 X 中的一个二元关系 R 叫做等价关系,如果 R 是自反的、对称的和传递的.

例如: 数的相等关系,直线的平行关系,三角形的相似关系,多边形的顶点数相等的关系,人口集合中肤色相同或性别相同的关系,平面点集的点在固定直线上投影相同的关系都是等价关系.再看一个例子:

设 $a,b\in \mathrm{Z}$,规定 aRb 为"a,b 模 n 同余"(记作:$a\equiv b(\mathrm{mod}\ n)$),即 a,b 分别被固定的正整数 n 相除后,其余数为相同的非负整数 $r(0\leqslant r<n)$.整数集 Z 的这个二元关系 R 是 Z 的一个等价关系.这是因为:若 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ n)$,即 $a=pn+r,b=qn+r\quad(p,q\in z)$,则 $a-b=(p-q)n$,即 $n|a-b$(读作 n 整除 $a-b$);反之,若 $n|a-b$,即 $a-b=kn\quad(k\in z)$,则由 $a=pn+r$ 可得 $b=(p-k)n+r$,