SPI 21世纪高等院校教材

工科类

工科数学分析

上册

丁晓庆 编

科学出版社

21 世纪高等院校教材(工科类)

工科数学分析

上 册

丁晓庆 编

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书讲述微积分学的基本理论.分上下两册.上册内容是:极限论、一元函数微分学、一元函数积分学;下册内容是:多元函数微分学、多元函数积分学、广义积分、级数理论、常微分方程.本书的主体部分接近理科数学专业对"数学分析"的要求,提出了新观点,得到了新结论;本书尽量从初学者和研究者的立场出发,用简洁朴素的语言,以螺旋式上升的方式,阐述数学理论的本质。

本书编写了较多典型例题,对一般理工科专业学习"高等数学"的学生,可作为进一步提高或做题方法方面的课外读物.本书偏重于理论,适合于对数学要求高的理工科专业.也可作为理科数学专业的教学参考书,供数学教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析.上册/丁晓庆编.—北京:科学出版社,2002.9

(21世纪高等院校教材(工科类))

ISBN 7-03-010757-8

Ⅰ.工… Ⅱ.丁… Ⅲ.数学分析-高等学校-教材 Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 063236 号

责任编辑:胡华强 陈玉琢/责任校对:朱光光

责任印制:安春生 /封面设计:黄华斌 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年9月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2002年9月第一次印刷 印张:22 3/4

印数:1-3 000 字数:418 000

定价:62.00元(上、下册)

(如有印装质量问题,我社负责调换〈路通〉)

前　言

数学的重要性是尽人皆知的．数学教育是整个科学教育的基本部分，在传播知识、启迪智慧方面有特殊的作用．

数学是自然科学和工程技术科学的基础．随着人类进入 21 世纪这个“知识经济时代”，数学的基础作用必将越来越明显．单纯从“投入-产出比”的角度来看，数学就具有特殊的经济价值．实际上，数学的研究和教学可以说“本钱”不多，通过一枝笔、几张纸、一副桌椅，或者通过一块黑板、几枝粉笔就可以实现，但是由此产生的社会和经济价值却是无法估计的．有一句古话用在这里恰到好处：运筹于帷幄之中，决胜于千里之外．

不过，任何价值都不可能无中生有．数学含有的价值，来自于学习、研究、应用数学时所付出心血的人的劳动．实际上，“数学所用的方法是逻辑推导，它有严格的定义和特定的符号，它的研究对象是抽象的数量关系和空间形式，没有相当的训练和基础知识是难以入门的”①．正因为如此，学习研究数学就必须花大力气．可以这样说，对于人类的文明和社会的发展，数学的研究和教育是“一本万利”的事业．

这本书主要介绍微积分理论．时间和实践都已经证明：学习这些理论是大学一年级新生的“童子功”．从整个数学发展的历史来看，微积分学是现代数学的基础；从理工科大学的所有课程来看，微积分课程是基础课（没有微积分知识，就无法学其他许多课程）．实际上，一个人从进小学开始到大学毕业为止，不论哪个专业，学习数学的时间至少都有 12 年至 14 年之久．在这十几年里，微积分的学习是最关键的，这不仅表现在微积分学是现代数学乃至于现代科学的基础，而且还表现在学习微积分时养成的“个人风格”对其他课程的学习都有一定的影响．

*　*　*　*　*　*

在这 21 世纪之初，应该说，我国数学的研究、教学和普及水平都是相当高的，当代学生对数学都有浓厚的学习兴趣和比较高的接受能力，时代呼唤有时代特色的教材．在这样的背景下，我国近一两年出版了多本“面向 21 世纪课程教材”．也正是在这样的背景下，本书的编者在西北工业大学教

---

① 《数学百科全书》(出版说明)，北京：科学出版社，1994

务处的大力支持和许多老教师的鼓励下，为“本硕博连读教改班”编写了这本试用教材.

在这本教材里，编者在以下几个方面做了努力：

1. 尽量从初学者和研究者的立场出发，提出问题、考察问题、探索问题、解决问题；力求运用简朴的语言描述问题；在论述时，尽量做一些注解(这些注解都是学生应注意的地方).

2. 对一些概念、名词、定理给予形象的解释，以便于学生掌握和使用.

3. 对于数学领域中有重要作用的概念和问题，给予较多的关注，例如函数的凹凸性、开映射原理、隐函数整体存在定理、逆映射存在的充分条件、多元向量值函数微积分等. 这样做是为了提高“本硕博连读学生”认识数学、应用数学的能力.

4. 突出知识的结构，一簇一簇地把结论叙述出来，以便于学生从整体上去把握.

5. 力求基本理论和做题技巧并重，给“做题难问题”以较多的关注.

本书分上下两册，分两学期、192 学时使用. 本书分 8 个部分，有 23 章.

第一部分是极限理论. 与常见讲法有所不同的方面是：在实数理论里，采用了“分界点公理”；突出了“平均值不等式”的作用；比较系统地介绍了数列的极限理论，把函数的极限理论作为它的推广.

第二部分是一元函数微分学. 与常见讲法有所不同的方面是：先讲微分概念，后讲导数概念（为的是先入为主，突出“微分”概念的应有地位）；用几何的观点引出、证明微分中值定理（共 5 个).

第三部分是一元函数积分学. 与常见讲法有所不同的方面是：把不定积分的第二类换元法看成“用参数方程表示原函数的一种方法”；对分部积分法着重强调“分部”的意义；通过“分割、采样、求和、求极限”这四个步骤，引出了定积分概念；在上册末尾编写了“一元向量值函数微积分”，以便于学生学习普通物理课程，也为下册系统介绍向量值函数理论做准备.

第四部分是多元函数微分学. 与常见讲法有所不同的方面是：由浅入深、比较系统地介绍了点集拓扑的一些概念；给向量值函数及其相关概念以更多的关注；突出不动点原理在微积分学中的特殊地位；平等看待一元函数的微分中值定理和多元函数的微分中值定理；突出介绍了开映射定理；首次得到了“反函数存在的充分条件（对于凸开集上的多元向量值函数而言)”(参见定理 13.4.1)；首次得到了“整体隐函数定理”(参见定理 13.5.2)——假定在某个凸开集 D 上，二元函数 $F(x,y)$ 有连续的偏导函数，并且

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \neq 0, \forall (x,y) \in D.$$

如果数值 c 是函数 $F(x,y)$ 的值，那么由二元方程 $F(x,y)=c$ 可以惟一确定隐函数，这个函数可微，并且定义域是若干个互不相交的开区间的并集.

第五部分是多元函数积分学. 与常见讲法有所不同的方面是：通过“分割、采样、求和、求极限”这四个步骤，先后引出了曲线积分、二重积分、曲面积分、三重积分等概念；把第二型曲线或曲面积分作为第一型相应积分的特殊形式（这样更贴近物理观点，有利于体现整体思想，有利于课堂教学）；从测度论的观点给予“积分变换问题”更多的关注；探讨了“曲面面积问题”.

以上五部分是微积分学的精髓，也是本书的主体；在这些内容的处理上，本书是从纯粹数学的立场出发的，但力求叙述方式更贴近“日常生活”.

由于学时限制以及“工科限制”，在广义积分、级数理论、常微分方程这三个部分，本书是按“工科数学”观点处理的. 这里要说明的是：按照正交级数理论，对区间 $[0, 2\pi]$ 上定义的可积函数，可以直接研究它的 Fourier 级数；（“周期性”不是本质，这是因为在区间 $[0, 2\pi]$ 上定义的函数，通过延拓，就可以把它转变成周期函数.）

* * * * * *

对许多老师和同行的支持、对西北工业大学应用数学系的大力支持、对西北工业大学教务处领导和同志们的全力支持、对西北工业大学教务处的资助，编者表示衷心的感谢!

本书在编写过程中，得到了我的老师余家荣教授、罗学波教授、聂铁军教授的鼓励和支持.

本书初稿完成后，曾请十多位前辈和同行审阅. 他们是：西北大学熊必璠教授，西安电子科技大学王金金教授，陕西师范大学曹怀信教授，西安理工大学李全灿教授，西北工业大学罗学波教授、田铮教授、肖亚兰教授、钮鹏程教授、封建湖副教授、李承家副教授、赵选民教授、王红教授.

* * * * * *

西北工业大学 2000、2001 级教改班全体学生和编者一起投身改革、积极参与，指出了初稿的多处疏忽. 对他们一并表示谢意.

在本书的编写过程中，参阅了许多教材和专著，恕不一一列出. 这里特别列出两本：

[1] 数学百科全书. 北京：科学出版社，1994～2000.

[2] Б. П. 吉米多维奇. 数学分析习题集（李荣冰译）. 北京：人民教

育出版社，1978.

本人水平有限，本书的错误和缺陷在所难免．恳请前辈、同行、学生提出宝贵意见．

丁晓庆

2002 年 1 月于西北工业大学

目　录

第一部分　极　限　论

第二部分　一元函数微分学

第三部分　一元函数积分学

第一部分　极　限　论

第一章　预备知识

§1.1　集　　合

§1.1.1　集合的概念

我们在千变万化的自然界中生存,在错综复杂的人类社会中生活,总要面对这样那样的问题.为了解决一个问题,就要把有关的事物作为一个整体来考虑.这些事物就组成一个**集合**,每个事物都叫**元素**.

在这门课程里,最常见的集合是**实数集 R**.(我们在中学已经对实数的概念和性质有一定的了解,这些知识是今后学习的基础.)

我们经常要使用下面的记号:(这些记号在中学都有介绍,现在只罗列如下.)

$a\in A$:a 是集合 A 的元素.

$a\notin A$:a 不是集合 A 的元素.

$A\subseteq B$:集合 A 是 B 的**子集**.

$A\cup B$:集合 A,B 的**并集**——$\{x:x\in A$ 或 $x\in B\}$.

$A\cap B$:集合 A,B 的**交集**——$\{x:x\in A$ 且 $x\in B\}$.

$A-B$:集合 A,B 的**差集**——$\{x:x\in A$ 但 $x\notin B\}$.

(a,b):以 a,b 为端点的开区间——$\{x:a<x<b\}$.

$[a,b]$:以 a,b 为端点的闭区间——$\{x:a\leqslant x\leqslant b\}$.

$(a,b]$:以 a,b 为端点的左开右闭区间——$\{x:a<x\leqslant b\}$.

$[a,b)$:以 a,b 为端点左闭右开区间——$\{x:a\leqslant x<b\}$.

以上区间都叫**有限区间**,下面给出**无限区间**:

$(a,+\infty)$——$\{x:x>a\}$.

类似的无限区间还有$[a,+\infty)$,$(-\infty,b)$,$(-\infty,b]$等.

§1.1.2　邻域的概念

我们经常要在一个点的“邻近”讨论函数的某个性质,为此引进“邻域”概

念.

(1) 设 x_0 是数轴上的一点,以 x_0 为中心的开区间叫**点 x_0 的邻域**,记做 $U(x_0)$.在这个邻域中,把中心 x_0 去掉,就得到**去心邻域**,记做

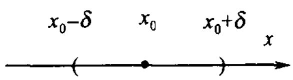
$$\mathring{U}(x_0) = \{x : x \in U(x_0) \text{ 但 } x \neq x_0\}.$$

(2) 对于某个正数 δ,开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 就是点 x_0 的一个邻域,叫做"以 x_0 为中心、以 δ 为半径的邻域",记做

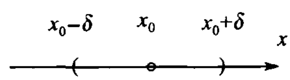
$$U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

在这个邻域中,把中心 x_0 去掉,就得到**去心邻域**,记做

$$\begin{aligned}\mathring{U}(x_0, \delta) &= \{x : x \in U(x_0, \delta) \text{ 且 } x \neq x_0\} \\ &= (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta).\end{aligned}$$



点 x_0 的邻域 $U(x_0,\delta)$.



点 x_0 的去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$.

习题 1.1

1. 对集合 $A=[0,2]$, $B=(1,2]$,求差集 $A-B$, $B-A$.
2. 用区间表示下面的邻域:

$$U(0,1); U\left(1,\frac{1}{2}\right); \mathring{U}(0,1); \mathring{U}\left(0,\frac{1}{2}\right).$$

3. 通过求区间的中心和半长,用邻域的记号表示下面的区间:

$$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right), (0.9,1.1), (9.99,10.01).$$

§1.2 映 射

§1.2.1 映射的概念

假设 A, B 是非空集合.如果按照某种对应法则 f,对集合 A 的每个元素,集合 B 都有惟一的元素和它对应,这样的对应叫做**从集合 A 到集合 B 的映射**,记做

$$f: A \to B.$$

如果映射 f 把集合 A 的元素 a 映射为集合 B 的元素 b,那么元素 b 叫元

素 a 的像，记做 $b=f(a)$.

另外，从集合 A 到集合 B 的映射还有下面的记号：

$$f(a):A\to B.$$

在映射 f 下，集合 A 的元素的像也组成一个集合，叫**集合 A 的像**，记做

$$f(A)=\{f(a):a\in A\}.$$

例　用$[x]$表示“不超过实数 x 的最大整数”，这样就形成从实数集 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射：

$$[x]=\text{不超过 } x \text{ 的最大整数}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}.$$

例如

$$[-1.5]=-2,[1.5]=1,[2]=2.$$

在这个映射下，实数集 $\mathbf{R}$ 的像就是全体整数的集合.

§1.2.2　映射的常见类型

假设 f 是从集合 A 到集合 B 的映射：

$$f:A\to B.$$

(1) 如果集合 A 的不同元素有不同的像，那么称 f 是**一对一的映射**.

(2) 如果集合 B 的每个元素都是集合 A 的元素的像，也就是说，集合 A 的像 $f(A)=B$，那么称 f 是**满映射**.

(3) 如果 f 既是一对一的映射，又是满映射，那么称 f 是**一一对应的映射**. 在这种情况下，通过映射 f，集合 A 的元素和集合 B 的元素是相互惟一决定的.

§1.2.3　映射的两个运算——映射的逆与映射的复合

1. 映射的逆

考虑映射 $f:A\to B$. 如果 f 是一一对应的映射，那么通过映射 f，集合 A 的元素和集合 B 的元素是相互惟一决定的. 因此，对集合 B 的任意一个元素 b，集合 A 都有惟一的元素 a 和它对应；这两个元素的关系是：

$$b=f(a).$$

这时元素 a 叫**元素 b 的逆像**，记做 $f^{-1}(b)$，即

$$a=f^{-1}(b).$$

这样的对应关系，确定了从集合 B 到集合 A 的映射，叫**映射 f 的逆映射**，记号是

$$f^{-1}:B\to A \quad 或 \quad f^{-1}(b):B\to A.$$

例　考虑映射

$$y=\sin x:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1].$$

这是一个一一对应的映射,它的逆映射是

$$x=\arcsin y:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

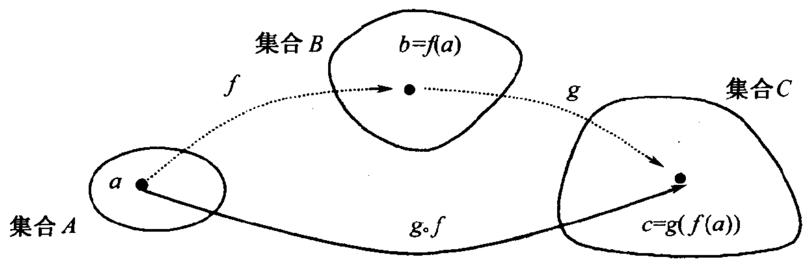
2. 映射的复合

考虑两个映射,

$$f:A\to B,\qquad g:B\to C.$$

在这种情况下,对集合 A 的任意一个元素 a,集合 B 都有惟一的元素 $f(a)$ 和它对应;接下来,既然 $f(a)$ 是集合 B 的元素,那么通过映射 g,集合 C 就有惟一的元素 c 和 $f(a)$ 对应;元素 c 可以表示为:

$$c=g(f(a)).$$



根据这样的对应关系,可以确定 从集合 A 到集合 C 的映射,叫做**映射 f、g 的复合映射**,记号为

$$g\circ f:A\to C\quad 或\quad g(f(a)):A\to C.$$

例　考虑两个映射

$$f(x)=\ln x:(0,+\infty)\to(-\infty,+\infty),$$
$$g(y)=\sin y:(-\infty,+\infty)\to[-1,1].$$

它们的复合映射是

$$g(f(x))=\sin\ln x:(0,+\infty)\to[-1,1].$$

习题　1.2

1. 设映射 $f(x)=\ln x:[1,+\infty)\to\mathbf{R}$,求集合 $[1,+\infty)$ 的像 $f([1,+\infty))$.

2. 设映射 $f(x)=\tan x:A=\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\to\mathbf{R}$,求集合 A 的像 $f(A)$.

3. 用 $[x]$ 表示"不超过 x 的最大整数",求下列数值:

$$[-2.1],[-0.5],[0],[1.1],[9.99].$$

4. (1) 对映射 $f(x)=\sin x:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, 证明:它不是一对一的映射.
   (2) 考虑映射 $f(x)=\sin x:\mathbf{R}\to[-1,1]$. 证明:这个映射是满映射.
   (3) 考虑映射 $f(x)=\sin x:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. 证明:这个映射不是满映射.
5. 考虑映射 $y=\cos x:[0,\pi]\to[-1,1]$. (这是一一对应的映射.)求它的逆映射.
6. 考虑映射 $y=\tan x:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbf{R}$. (这是一一对应的映射.)求它的逆映射.
7. 对两个映射

$$f(x)=\ln x:(0,+\infty)\to(-\infty,+\infty),$$
$$g(y)=\cos y:(-\infty,+\infty)\to[-1,1].$$

求复合映射 $g\circ f:(0,+\infty)\to[-1,1]$.

§1.3 实数的性质 分界点公理

关于实数,我们在中学已经知道了它的概念和许多性质.这一节的内容是:在回顾这些性质的基础上,介绍一个新的性质,叫**分界点公理**.

§1.3.1 四则运算性质

(i) 对任意实数 x,y,z,下面的运算规律成立:

交换律 $x+y=y+x, xy=yx$.

结合律 $x+(y+z)=(x+y)+z, x(yz)=(xy)z$.

分配律 $x(y+z)=xy+xz$.

(ii) 对任意的实数 x,都有

$$x+0=x,\qquad 1\cdot x=x.$$

(iii) 任何实数 x 都有相反数 $-x$,任何非零实数 x 都有倒数 x^{-1},并且

$$x+(-x)=0,\qquad xx^{-1}=1(x\neq 0).$$

§1.3.2 实数的基本性质

(i) *有序性* 对每一对实数 x 和 y,下列关系式有且只有一个成立:

$$x<y,\ x=y,\ x>y.$$

(ii) *传递性* 如果 $x<y$,并且 $y<z$,那么 $x<z$.

(iii) 如果 $x<y$,那么对任意实数 z,总有 $x+z<y+z$.

(iv) 如果 $z>0$,并且 $x<y$,那么 $xz<yz$.

§1.3.3 分界点公理

1. *从具体例子说起*

考虑一对数集 $A=(0,1]$ 和 $B=[1,2)$，可以看出：

- “数集 A 的任何数”$\leqslant$“数集 B 的任何数”；
- 数 1 把数集 A,B“左右隔开”，这就是说，

$$\text{“数集 } A \text{ 的任何数”} \leqslant 1 \leqslant \text{“数集 } B \text{ 的任何数”}.$$

由于这个原因，就把点 1 直观地叫做“点集 $(0,1]$ 和 $[1,2)$ 的分界点”.

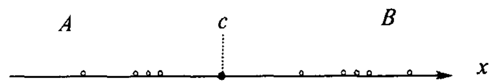
一般说来，对于一对数集 A,B，如果

$$\text{“数集 } A \text{ 的任何数”} \leqslant \text{“数集 } B \text{ 的任何数”},$$

那么从数轴上来看，应该存在着点 c，把两个点集 A,B“左右隔开”，这就是说，

$$\text{“数集 } A \text{ 的任何数”} \leqslant c \leqslant \text{“数集 } B \text{ 的任何数”}.$$

这时，点 c 叫点集 A,B 的分界点.



点 c 把点集 A,B“左右隔开”，它是这两个点集的“分界点”.

根据这样的观察，我们总结出实数的一个基本性质，叫**分界点公理**.

2. *分界点公理*

设 A,B 是一对非空数集（实数集 $\mathbf{R}$ 的子集）. 如果

$$\text{“数集 } A \text{ 的任何数”} \leqslant \text{“数集 } B \text{ 的任何数”},$$

那么一定存在数 c，使得

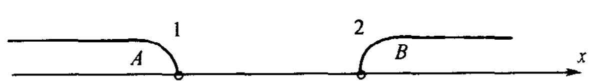
$$\text{“数集 } A \text{ 的任何数”} \leqslant c \leqslant \text{“数集 } B \text{ 的任何数”}.$$

这样的点 c 叫**数集 A,B 的分界点**.

由于实数集 $\mathbf{R}$ 有这样的性质，我们就说实数集 $\mathbf{R}$ 是完备的.

例 1 数集 $(0,1]$ 和 $[1,2)$ 的分界点是点 1.

例 2 对点集 $A=(0,1)$，$B=(2,+\infty)$，区间 $[1,2]$ 上的每个点都是分界点.（从这个例子看出，分界点可以不止一个.）



例3 在有理数范围内,"分界点公理"这样的结论不成立.(由于这个原因,我们就说有理数集是不完备的.)反例如下.设

$$A=\{r:r\text{ 为正有理数},r^2<2\},B=\{r:r\text{ 为正有理数},r^2>2\}.$$

可以看出:

"数集 A 的任何数"≤"数集 B 的任何数",

现在只有$\sqrt{2}$这么一个分界点.但$\sqrt{2}$不是有理数,所以在有理数的范围内,没有哪一个数能够作为集合 A,B 的分界点.这就是说:在有理数范围内,"分界点公理"这样的结论不成立.

习题 1.3

1. 设 $A=(0,1],B=[1,2)$,求点集 A,B 的全部分界点.
2. 设 $A=(0,1],B=(3,4)$,求点集 A,B 的全部分界点.
3. 设 $A=\{1,2\},B=\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots\right\}$,求点集 A,B 的全部分界点.
4. 对半径为 R 的圆,可以做无穷个"内接多边形"和无穷个"外接多边形".用 A 表示"内接多边形的面积组成的数集",用 B 表示"外接多边形的面积组成的数集".试求数集 A,B 的分界点.

5*. 根据分界点公理证明:如果把实数集 $\mathbf{R}$ 分成两个非空的数集 A,A',使得

(1) $A\cup A'=\mathbf{R},A\cap A'=\varnothing$(空集);

(2) "数集 A 的任何数"≤"数集 A'的任何数";

那么,要么数集 A 有最大的数,要么数集 A'有最小的数.

6. 举两个例子说明:在有理数范围内,"分界点公理"这样的结论不成立.

§1.4 最大数和最小数 上确界和下确界

§1.4.1 数集的最大数和最小数

在一个数集的所有数中,如果有最大的数,就叫这个数集的**最大数**;类似有**最小数**的概念.

最大数的确切定义如下.

定义 设 A 是一个非空的数集.如果存在着实数 b,使得

(i) $b\geqslant$"数集 A 的任何数",

(ii) $b\in A$,

那么数 b 叫数集A 的**最大数**,记做 $\max A$.

类似有最小数的定义.数集 A 的**最小数**记做 $\min A$.

这里要注意一个问题:并不是任何非空数集都有最大数或最小数,例如: