泽夫·司曲斯 著

随机微分方程理论及其应用

上海科学技术文献出版社

随机微分方程理论及其应用

泽夫·司曲斯　著
刘永才
毛士忠
钮晓鸣　译
王寿仁　校

上海科学技术文献出版社

一九八七年六月出售 1

Theory and Applications of
Stochastic Differential Equations
ZEEV SCHUSS
John Wiley & Sons
New York. Chichester. Brisbane. Toronto

随机微分方程理论及其应用

泽夫·司曲斯 著
刘永才
毛士忠
钮晓鸣 译
王寿仁 校

上海科学技术文献出版社出版
(上海市武康路2号)
新华书店上海发行所发行
上海商务印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 10.5 字数 254,000
1986年9月第1版 1986年9月第1次印刷
印数: 1—4,000

书号: 13192·91 定价: 2.15元

《科技新书目》122-224

内 容 简 介

本书介绍了伊藤型随机微分方程的起源、基本理论和应用。全书分两大部分。第一部分是基本理论篇，包括前七章。其中第一、二章叙述概率论基础知识、布朗运动。第三、四、五章叙述伊藤型随机微积分、随机微分方程，建立了随机过程与扩散过程、随机微分方程与偏微分方程之间的联系，此外还叙述了随机微分方程的解的稳定性。第六、七章叙述随机微分方程的渐近分析、离出问题与奇异摄动方法。第二部分是应用篇，包括后三章。其中第八章阐述了随机微分方程在化学反应中的扩散过程、晶体中的原子迁移等方面的应用。第九章讨论了滤波理论及其在通信系统中的应用。第十章介绍了经典力学与偏微分方程中的有关课题。

本书可作为大专院校应用数学、控制论、现代通信、生物物理等专业的高年级学生、研究生的选修课教材，也可供有关领域中的研究人员、科技工作者、大专院校教师自学参考。

译　序

随机微分方程是一门新兴边缘学科．自伊藤于1961年首次发表"论随机微分方程"[注]一文以来，得到了广大理论科学工作者和实际应用科技人员的重视，特别近十年来已发展成为概率论中一个重要分支．由于其理论严谨，基础深厚，使得人们在学习、掌握、推广和应用这门学科时受到了一定的限制．当前，由于随机微分方程已飞速、广泛地渗透于自然科学、工程技术的很多领域中，例如分子物理学、原子物理学、化学动力学、固态扩散、结构稳定性和群体遗传学等多个方面，故而近年来，已有多种专业书籍相继问世．该书采用奇异摄动方法来研究首次通过问题，阐述伊藤公式的应用、随机微分方程的渐近分析以及在许多领域中的应用．由于该书内容深入浅出，推导精练，故而更易被广大科技工作者、高等院校师生较快地掌握和运用．我们翻译这本书的目的在于向国内对这一领域有兴趣的读者介绍随机微分方程的主要内容．对于通晓这一领域的专业工作者，该书也可以作为应用的参考书．书末附有索引和96篇参考文献，可供查阅．穿插在不同章节中的213个习题在阅读时应予以重视，因为有些习题的推导方法和结论贯串于全书内容中，有些习题的结果则是有关文献的成果．

本书第一、二、三、四章由上海科学技术大学刘永才翻译，第五、六、七章由盐城师范专科学校毛士忠翻译，前言、第八、九、十

[注] On stochastic differential equations, Memoirs Amer. Math. Soc. No. 4 (1961) ——译者注

章及附录由上海651所钮晓鸣翻译，其中第八、九章的翻译得到了钮旋的帮助．译者都相互校阅了译稿，最后由刘永才统稿．全书由中国科学院应用数学研究所王寿仁同志校对．对原书中的明显错误，我们已作了纠正．由于时间仓促，译者学术水平有限，尚有不完善之处，望广大读者提出宝贵意见．

译　者

1984.6于上海

前　　言

本书的目的是为了阐明伊藤(Itô)型随机微分方程的起源、理论及其应用．所谓伊藤型随机微分方程就是指带有白噪声的微分方程，本书给出了它的基本理论以及广阔的应用范围．本书的主题是用现代奇异摄动方法来研究首次通过问题，以及它在科学的各个领域中的作用．因此，本书对于那些精通于经典分析而在现代概率论和测度论方面感到欠缺的应用数学工作者、物理学家、化学家和工程师们来说是非常适用的．本书的预备知识是高等微积分、常微分方程和偏微分方程的基本理论，当然也应具备初等概率论的基础知识．从事概率论研究的专家将会发现，本书中关于计算首次通过时间、转移概率和离出概率以及其他一些有趣的量方面有一些新的分析方法．本书特别强调在许多科学领域内的现象用随机微分方程去建立模型．例如化学动力学、固态扩散、遗传学、噪声中信号的滤波等现象的模型．

自从爱因斯坦建立了布朗运动和分子扩散的数学理论以来，在各种不同的领域内，如分子物理学、原子物理学、化学动力学、固态理论、结构稳定性、群体遗传学、通信以及自然科学、社会科学和工程的许多其他分支中开展了应用这一理论的科学研究．在随机微分方程理论研究的早期阶段，爱因斯坦、斯莫路苏斯基(Smoluchowski)、朗之万(Langevin)、奥伦斯坦(Ornstein)、乌伦贝克(Uhlenbeck)和克拉美(Kramers)等人做了许多卓有成效的工作，这些工作综合在查德锐赛卡(Chandrasekhar)

1943 年的主要论文中．近二十五年来，随机微分方程的数学理论大大地发展了，一些非常严谨的教科书相继问世，数学研究人员在这一领域中发现了一些极其重要的结果，尤其突出的是导出了关于首次通过时间和离出分布的方程．随着伊藤和斯特拉脱诺维奇 (Stratonovich) 微积分概念的引入，随机微分方程的理论更向纵深发展．不幸的是，由于数学理论与问题的起源之间的鸿沟日益加深，从而使得物理学家、化学家和工程师们对于现代的数学技巧显得生疏了，而数学家们对于理论的起源和应用显得生疏了．由于这一理论的复杂性和数学的严密性以致无法对非专业人员编写这类数学教科书，本书的目的就是试图填补这一鸿沟．

第一章和第二章是概率论的有关知识和布朗运动的结构，第三章的一部分是伊藤、斯特拉脱诺维奇积分学和微分学的理论[注]．对于数学上有进一步严密性要求的内容已分别置于标有星号的各章节中，在第一次阅读本书时这些章节可以跳过．第三章的另一部分及第四、五章是随机微分方程的基本理论．对于书中的习题也应予以重视，因为它们包括了许多随机微分方程理论的经典应用，特别在习题中包括了爱因斯坦和斯莫路苏斯基扩散理论及其应用．第四章一方面建立了马尔可夫 (Markov) 过程与扩散过程之间的联系，另一方面还建立了马尔可夫过程与随机微分方程解之间的联系，第五章说明了随机微分方程和偏微分方程之间的关系．推导出了福克尔 (Fokker)–普朗克 (Planck)、柯尔莫哥洛夫 (Kolmogorov)、邓肯 (Dynkin)、费恩曼 (Feynman) 和卡西 (Kac) 的基本方程并对其边界状态进行了讨论．通过伊藤微积分，提出了运用偏微分

[注] 原书把这部分内容归纳在第二章中，而这些内容是在第三章——译者注

方程处理首次通过问题的方法．本书的主要贡献是第六章到第九章．第六章是随机微分方程的渐近理论以及它在统计力学、输运理论和数学遗传学中的应用．第七章中运用了新的方法来处理由斯莫路苏斯基-克拉美理论提出的奇异摄动问题，这个新方法是由马特库斯基(Matkowsky)和我本人提出的．第八章是随机微分方程理论的物理应用，给出了化学反应、扩散和离子晶体中传导性的数学模型．第九章主要讲了状态空间中滤波理论的要点，阐明了首次通过时间的作用．最后，第十章包括了气体分子运动论的斯莫路苏斯基理论，同时对经典力学以及偏微分方程理论中的一些基本概念作了简短的回顾．用统一的数学处理，许多问题化为通过解偏微分方程的奇异摄动边值问题来确定首次离出时间的期望．本书中所提出的奇异摄动方法可以导出有意义的概率量和由此得出物理量的明显表达，如阿尔海纳斯(Arrhenius)定律中的位阻因素、多级化学反应中的反应速率、晶体中原子迁移的扩散张量、离子晶体中的导电性、调频滤波器中的“卡搭”噪声等．我希望本书能提供给科学工作者一种新颖的数学工具，并且使得数学工作者对于随机微分方程理论在科学中所起的作用有更深入的了解，从而能使随机微分方程的数学理论与自然科学之间的差距得以弥补．

（谢辞略．）

泽夫·司曲斯

1980 年

目　　录

第一章　概率论复习

1.1　事件和样本空间

考虑一枚均匀硬币抛掷三次的试验．该试验的可能结果是 HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH 和 TTT, 其中 H 表示正面, T 表示背面．试验的每一可能结果称为**基本事件**．这样, 在一枚硬币抛掷三次的试验中有八个基本事件．更复杂的事件可以表示为基本事件的集合．这样, 在硬币抛掷的试验中, 事件"两次或更多次正面朝上", 它由基本事件 HHH, HHT, HTH, THH 组成, 我们用 D 表示, 即

$$D=\{\mathrm{HHH},\ \mathrm{HHT},\ \mathrm{HTH},\ \mathrm{THH}\}.$$

一个试验的所有基本事件组成的集合 Ω 称为**样本空间**, 每一基本事件用 ω 表示, 称为 Ω 中的一个点．对上面考虑的特定例子, 有

$$\Omega=\{\mathrm{HHH},\ \mathrm{HHT},\ \mathrm{HTH},\ \mathrm{THH},\ \mathrm{TTH},\ \mathrm{THT},\ \mathrm{HTT},\ \mathrm{TTT}\}.$$

记号 $\omega\in\Omega$, 读为"ω 是 Ω 中的一个点(或 Ω 的一个元素)"．由基本事件组成的任一事件 A 是 Ω 的一个子集．特别, 不可能事件 $\emptyset$, 即不包含基本事件的事件称为空集．令 A 和 B 是 Ω 中的事件, 如果 A 的每一元素也是 B 的元素, 称 A 是 B 的子集, 记为 $A\subset B$．显然 $A\subset\Omega$, $\emptyset\subset A$ 和 $A\subset A$．例如, 在硬币抛掷试验中, 集合 D 是"至少有一次正面朝上"的集合(事件) E 的子集．明确地说,

$$\{\mathrm{HHH},\ \mathrm{HHT},\ \mathrm{HTH},\ \mathrm{THH}\}=D\subset E$$
$$=\{\mathrm{HHH},\ \mathrm{THH},\ \mathrm{HTH},\ \mathrm{HHT},\ \mathrm{TTH},\ \mathrm{THT},\ \mathrm{HTT}\}.$$

称 Ω 的两个子集 A 和 B **相等**，即表示它们由相同元素组成，亦即如果 $A\subset B$ 和 $B\subset A$，则 $A=B$. 称 Ω 的两个子集（两个事件）A 和 B **互不相交**，表示它们没有公共元素. 这样，在硬币抛掷试验中，“至少两次背面朝上”的集合 F 和集合 D 是互不相交集. 但是，集合 E 和 F 却不是互不相交的.

通常，样本空间包含无限多个点(基本事件). 例如，考虑热平衡中由几个质量为 m 的分子组成的单原子气体的分子速度的抽样试验. 令 $\mathbf{v}_i=(v_i^1,\ v_i^2,\ v_i^3)^T(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 是进行试验瞬间的分子速度向量. 假设气体是理想的，那么可忽略分子间引力势能. 用 E 表示气体的总能量，有

$$\sum_{i=1}^{n}|\mathbf{v}_i|^2=\frac{2E}{m},$$

其中 $|\mathbf{v}_i|^2=\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_i=\sum_{j=1}^{3}v_i^jv_i^j$. 由于假设 E 为常数，因此试验的任意结果是半径为 $(2E/m)^{1/2}$ 的 $3n$ 维球面 S 上的一点. 我们可以认为该试验的样本空间就是球面 S 上的所有点的集合. 例如把“$\mathbf{v}_i$ 的第一分量满足不等式 $a<v_i^1<b$”这一事件记为 G，则集合 G 是 S 上的球带.

给定样本空间 Ω 的两个子集 A 和 B，$A\cup B$ 表示 Ω 的一个子集，它的元素或属于 A 或属于 B. 集合 $A\cup B$ 称为 A 和 B **的并**. 一般，给定 Ω 的子集的有限或无限序列 $\{A_j\}$，$j=1,\ 2,\ \cdots$，用

$$A=A_1\cup A_2\cup\cdots\equiv\bigcup_j A_j$$

表示其元素至少属于集合 A_j 中一个的集合. 所以，如果至少有一个事件 $A_j(j=1,\ 2,\ \cdots)$ 发生，事件 $\bigcup_j A_j$ 发生. 集合 $A=\bigcup_j A_j$

称为集合 A_j 的并．显而易见，$A\cup A=A$，$A\cup\Omega=\Omega$ 和 $A\cup\emptyset=A$．如果 $A\subset\Omega$，$B\subset\Omega$，那么集合 $A-B$ 是由 A 中那些不在 B 中的元素组成．集合 $A-B$ 称为 A 和 B 的差．这样，在硬币抛掷例子中有

$$E-D=\{\mathrm{HTT},\ \mathrm{THT},\ \mathrm{TTH}\},$$

即 $E-D$ 是事件"恰有一次正面朝上"，所以如果 E 发生而 D 不发生，则 $E-D$ 发生．同样有 $D-E=\emptyset$．显然，$A-\emptyset=A$，$A-A=\emptyset$ 和 $A-\Omega=\emptyset$．如果 A 和 B 是互不相交事件，那么 $A-B=A$．给定 Ω 的子集的有限或无限序列 $\{A_j\}$，$j=1,\ 2,\ \cdots$，用

$$A=A_1\cap A_2\cap\cdots\equiv\bigcap_j A_j$$

表示其元素属于所有集合 A_j，$j=1,\ 2,\ \cdots$，的集合．集合 $A=\bigcap_j A_j$ 称为集合 A_j 的交．如果所有事件 A_j，$j=1,\ 2,\ \cdots$ 发生，则事件 $\bigcap_j A_j$ 发生．显然，$A\cap A=A=A\cap\Omega$，$A\cap\emptyset=\emptyset$；如果 $A\subset B$，那么 $A\cap B=A$．这样，在硬币抛掷例子中，$E\cap D=D$．显然，两个集合 A 和 B 互不相交当且仅当 $A\cap B=\emptyset$．如果 $A\subset\Omega$，用 A^c 表示差 $\Omega-A$．集合 A^c 称为 A 在 Ω 中的补．它包含 Ω 中那些不属于 A 的所有元素．这样，在硬币抛掷例子中，集合 D^c 是事件"在硬币抛掷三次中至多一次正面朝上"，我们有

$$D^c=\{\mathrm{TTT},\ \mathrm{TTH},\ \mathrm{THT},\ \mathrm{HTT}\}.$$

在单原子气体的例子中，集合 G^c 是由 S 上球带 G 外的所有点组成．

习题 1.1.1

（i） 构造对应于抛掷一颗骰子的试验的样本空间 Ω．

(ii) Ω 中有多少个基本事件?
(iii) Ω 中由两个基本事件组成的事件有多少?

习题 1.1.2

令样本空间由 n 个基本事件组成.
(i) 恰由 Ω 中 k 个基本事件组成的事件的数目是多少?
(ii) Ω 中所有事件的数目是多少?

习题 1.1.3

在家庭调查的随机抽样中，如果被抽样的家庭只有一个孩子，则说事件 A 发生,如果家庭中至少有一个孩子,则说事件 B 发生. 已知没有一个家庭的孩子多于 n 个. 问基本事件是什么? 将事件 A 和 B 用基本事件表示并描述事件 $A\cup B$, A^c, B^c, $B-A$ 和 $A-B$.

习题 1.1.4

在单原子气体模型中，令事件 A 和 B 给定为 $A=\{a<v_i^2<b\}$, $B=\{c<v_i^2<d\}$. 用几何图形描述事件 $A\cup B$, $A\cap B$ 和 $(A-B)\cup(B-A)$.

习题 1.1.5

证明德·摩根 (de Morgan) 定律: $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$, $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

1.2 概率测度

在一枚均匀硬币抛掷三次的试验中，对于八个可能结果中的每一个直观地赋予概率 $\frac{1}{8}$, 因为它们机会均等. 对于事件 D, 赋予概率 $\frac{1}{2}$, 因为它包含 Ω 中所有可能事件的一半. 显然,

对于不可能事件 $\emptyset$ 赋予概率 0，对于必然事件 Ω 赋予概率 1. 为了给出直观的概率概念的精确数学定义，我们引进公理系统，它能刻划我们希望概率所具备的基本性质. 首先描述由随机事件构成的集合 $\mathscr{B}$，而概率测度则定义在 $\mathscr{B}$ 上. $\mathscr{B}$ 的元素是 Ω 的子集，$\mathscr{B}$ 有下列性质：

(i) $\Omega\in\mathscr{B}$.

(ii) 如果 $A\in\mathscr{B}$, $B\in\mathscr{B}$，那么 $A-B\in\mathscr{B}$.

(iii) 如果 $A_j\in\mathscr{B}$, $j=1, 2, \cdots$, 是 $\mathscr{B}$ 的一个元素序列，那么 $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}A_j\in\mathscr{B}$.

特别，随机事件的补和交是随机事件. **概率测度** $P(\cdot)$是定义在随机事件构成的集合 $\mathscr{B}$ 上的函数，它满足下列公理：

公理 1 对于 $\mathscr{B}$ 的每一元素 A 对应一个数 $P(A)$，它满足不等式

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1.$$

公理 2 $P(\Omega)=1$.

公理 3 如果 $A_j\in\mathscr{B}$, $j=1, 2, \cdots$，是互不相交事件的有限或无限序列，即如果 $i\neq j$, $A_i\cap A_j=\emptyset$，那么

$$P(\bigcup_j A_j)=\sum_j P(A_j).$$

为了说明这些公理，再次考虑一枚均匀硬币抛掷三次的试验. 样本空间由八个基本事件组成，$\mathscr{B}$ 由 Ω 的所有子集组成. 容易看出性质(i)～(iii)都满足. 对于 $\mathscr{B}$ 中每一随机事件，赋予概率如下：

$$P(A)=\frac{A\text{ 中元素数目}}{8}.$$

容易验证，在这种情况下，公理 1～3 都满足. 在单原子气体运动的例子中，基本事件与半径为$(2E/m)^{1/2}$ 的球面 S 上的点相