经济数学(概率论与数理统计初步)解题方法技巧归纳

毛 纲 源

华中理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学(概率论与数理统计初步)解题方法技巧归纳/毛纲源
武汉:华中理工大学出版社， 1999.7
ISBN 7-5609-1972-3

Ⅰ.经…
Ⅱ.毛…
Ⅲ.经济数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.O21

经济数学(概率论与数理统计初步)解题方法技巧归纳　　毛纲源

责任编辑:李立鹏　　封面设计:刘　卉
责任校对:童兆丹　　监　　印:熊庆瑜

出版发行:华中理工大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87542624

经销:新华书店湖北发行所

录排:武汉皇荣文化发展有限责任公司照排室
印刷:华中理工大学出版社印刷厂

开本:850×1168　1/32　印张:16.25　字数:392 000
版次:1999年7月第1版　印次:1999年11月第2次印刷　印数:6 001—12 000
ISBN 7-5609-1972-3/O·188　定价:18.80元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行科调换)

目　　录

第一章　随机事件与古典概率的直接计算

§1.1　用简单事件通过运算表示复合事件

在实际问题中随机事件多种多样，有的简单，有的复杂．一些比较复杂的事件往往可由简单事件通过运算表示，常称这些事件为复合事件．

现将用简单事件通过运算表示复合事件的常用方法叙述于下．

法一　将复合事件通过运算用其等价事件表示

这些事件常用“恰有”，“只有”，“至多”，“至少”，“都发生”，“都不发生”，“不都发生”等词语描述，要弄清这些概念的含义．

例 1　某工程队承包建造 3 幢楼房，设事件

$$A_i=\{第\ i\ 幢楼房经验收合格\}(i=1,2,3).$$

试用 A_1,A_2,A_3 表示下列事件：

(1)$B_1=\{$只有第 1 幢楼房合格$\}$；

(2)$B_2=\{$恰有一幢楼房合格$\}$；

(3)$B_3=\{$至多有 1 幢楼房合格$\}$.

解　易知事件 $\overline{A_i}=\{$第 i 幢楼房经验收不合格$\}(i=1,2,3)$.

(1)只有第 1 幢楼房合格，其含义是第 1 幢楼房合格，但第 2，3 幢楼房不合格，因此事件 B_1 与 $A_1\overline{A_2}\overline{A_3}$ 等价，故

$$B_1=A_1\overline{A_2}\overline{A_3}.$$

(2)恰有一幢楼合格，并没有指明究竟是哪一幢楼房合格，因此可能是第 1 幢，第 2 幢，第 3 幢楼房合格，而其余两幢都不合格，

所以

$$B_2=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3.$$

(3)B_3={至多有1幢楼房合格}与下列两个互不相容的事件的和等价:{恰有1幢楼房合格}与{3幢楼房全不合格},因此所求事件 B_3 可表示成

$$B_3=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3.$$

例2 设 A,B,C 为三个随机事件,试用 A,B,C 的运算关系表示事件 M={A,B,C 中至少有一个发生}.

解法一 M={三个事件至少有一发生}$=A+B+C$.

解法二 M={三个事件都发生}+{两个事件发生,另一个事件不发生}+{一事件发生,另外两个事件不发生}

$=ABC+(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC)+(A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C)$.

解法三 M 的对立事件为{A,B,C 三个事件都不发生}(参阅例10后面的注意),故 $M=\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}$. 显然有

$$\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}=\overline{\overline{A+B+C}}=A+B+C.$$

解法四 M 与事件{A,B,C 中至多有两个事件不发生}等价(参阅例10后面的注意),而这等价事件又可分解为解法二中三事件之和,于是从另一角度又得到解法二的表示式.

注意 (1)求一个事件的表示式时,由于思路不同,得到的表示式可能不同,但只要思路正确,得到的不同表示式必然相等(见§1.2例5).

(2)表示式 $M=A+B+C$ 虽然简单,但它是相容事件 A,B,C 之和,后面将看到相容事件之和的求概公式是复杂的.而表示式

$$M=ABC+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+\overline{A}\,\overline{B}\,C+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}.$$

虽然复杂,但它是互不相容事件之和,其求概公式是简单的,有时为了求相容事件之和的概率常先把它化成互不相容事件之和.

例 3[补 1]* 某工厂每天分三班生产，事件 A_i 表示第 i 班超额完成生产任务($i=1,2,3$)，则至少有两个班超额完成任务可以表示为( ).

(a) $A_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1\overline{A}_2A_3$ (b) $A_1A_2+A_1A_3+A_2A_3$

(c) $A_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2A_3$

(d) $\overline{\overline{A}_1\overline{A}_2+\overline{A}_1\overline{A}_3+\overline{A}_2\overline{A}_3}$

解 (a)表示恰有两个班超额完成任务，不能入选．

设 $M_1=$\{至少有两个班超额完成任务\}，则

$M_1=$\{至少有两个班超额完成任务\}+\{三班都超额完成任务\}

$=A_1A_2+A_2A_3+A_3A_1+A_1A_2A_3$

$=A_1A_2+A_2A_3+A_3A_1$(因 $A_1A_2A_3\subseteq A_1A_2$)，

$M_1=$\{恰(只)有两个班超额完成任务\}+\{三班都超额完成任务\}

$=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1A_2A_3$.

设 $M_2=$\{至少有两班未超额完成任务\}

$=\overline{A}_1\overline{A}_2+\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_3\overline{A}_1$，则

$M_1=\overline{M}_2=\overline{\overline{A}_1\overline{A}_2+\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_3\overline{A}_1}$，$\overline{M}_1=\overline{A}_1\overline{A}_2+\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_3\overline{A}_1$，

即\{至少有两班超额完成任务\}的对立(逆)事件是\{至少有两班未超额完成任务\}(参阅例 10 中注意)，(d)入选．综上所述(b)，(c)、(d)入选．

法二 利用差化积、对偶律及和对积的分配律等运算求之

这些复合事件常与差事件、对立事件有关．为求其表示式，除注意利用和事件，积事件，差事件，互不相容事件，对立事件的一些基本运算规律外，特别要注意和对积的分配律、差化积及对偶律(摩根律)的应用(它们常用于与逆事件有关的命题).

例 4[补 4] 关系( )成立，则事件 A 与 B 为对立事件．

---

* [补 1]表示该例(或该习题)是中国人民大学出版社出版的“概率论与数理统计”(修订本)补充习题第 1 题．下同．

(a)$AB=\varnothing$　　　　　　(b)$A+B=\Omega$

(c)$AB=\varnothing,A+B=\Omega$　　(d)$\overline{A}$与$\overline{B}$为对立事件

解　由对立事件的定义知，(c)入选．对(c)中两事件，求其逆事件，有

$$\begin{cases}A+B=\Omega;\\AB=\varnothing\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overline{A+B}=\overline{\Omega};\\\overline{AB}=\overline{\varnothing},\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overline{A}\cdot\overline{B}=\varnothing;\\\overline{A}+\overline{B}=\Omega,\end{cases}\Leftrightarrow\overline{A},\overline{B}\text{为对立事件,}$$

故(c),(d)入选．

注意　上例证明了如果A,B为对立事件，则其逆事件$\overline{A},\overline{B}$也是对立事件．反之，也成立．

例 5[补 2]　射击 3 次，事件A_i表示第i次命中目标($i=1,2,3$)，则事件(　　)表示至少命中一次．

(a)$A_1+A_2+A_3$　　　　(b)$A_1+(A_2-A_1)+[(A_3-A_2)-A_1]$

(c)$\Omega-\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$　　　　(d)$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

解　因(d)中事件的表示式仅表示恰有一次命中目标的事件，故(d)不能入选．又(a)显然入选．因

$$\begin{aligned}\Omega-\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}&=\Omega-\overline{A+B+C}=\Omega(\overline{\overline{A+B+C}})\\&=\Omega(A+B+C)=A+B+C,\end{aligned}$$

故(c)也入选．利用差化积及和对积的分配律[(1.2.1)式]得到

$$\begin{aligned}&A_1+(A_2-A_1)+[(A_3-A_2)-A_1]=A_1+A_2\overline{A}_1+(A_3\overline{A}_2)\overline{A}_1\\&=(A_1+A_2)(A_1+\overline{A}_1)+(A_3\overline{A}_2)\overline{A}_1=A_1+A_2+(A_3\overline{A}_2)\overline{A}_1\\&=A_2+[A_1+(A_3\overline{A}_2)\overline{A}_1]=A_2+(A_1+A_3\overline{A}_2)(\overline{A}_1+A_1)\\&=A_1+A_2+A_3\overline{A}_2=A_1+(A_2+A_3)(A_2+\overline{A}_2)\\&=A_1+A_2+A_3.\end{aligned}$$

上式也可用文氏图证之，故(b)也入选，因而(a),(b),(c)均入选．

例 6[1989 年 4]*[选择题]　以A表示事件“甲种产品畅销，

---

* 表示该例(或该习题)是 1989 年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试卷 4 的考题．下同．

乙种产品滞销”，则其对立事件$\overline{A}$为____.

(A)“甲种产品滞销，乙种产品畅销”

(B)“甲乙两种产品均畅销”

(C)“甲种产品滞销”

(D)“甲种产品滞销，或乙种产品畅销”

解 设甲，乙两种产品畅销的事件分别为B,C，则$A=B\,\overline{C}$，由摩根律易得到：

$$\overline{A}=\overline{B\,\overline{C}}=\overline{B}+\overline{\overline{C}}=\overline{B}+C,$$

故A的对立事件为甲种产品滞销，或乙种产品畅销，(D)入选.

例 7 设$\Omega=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，$A=\{x|1/2<x\leqslant 1\}$，$B=\{x|1/4\leqslant x<3/2\}$，具体写出下列各事件：

(1)$\overline{A}B$； (2)$\overline{A}+B$； (3)$\overline{\overline{A}\,\overline{B}}$； (4)$\overline{AB}$； (5)$\overline{A+B}$.

解(1)因$\overline{A}=\Omega-A=\{x|0\leqslant x\leqslant 1/2\}+\{x|1<x\leqslant 2\}$，故

$$\overline{A}B=\{x|1/4\leqslant x\leqslant 1/2\}+\{x|1<x<3/2\}.$$

(2)因$\overline{\overline{A}+B}=\overline{\overline{A}}\,\overline{B}=A\,\overline{B}$，而$A\subset B$，$B\cdot\overline{B}=\varnothing$，故$A\,\overline{B}=\varnothing$，从而$\overline{\overline{A}+B}=\varnothing$，故$\overline{A}+B=\overline{\varnothing}=\Omega=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$.

(3)$\overline{\overline{A}\,\overline{B}}=A+B=B$(因$A\subset B$)$=\{x|1/4\leqslant x<3/2\}$

(4)因$A\subset B$，$AB=A$，故$\overline{AB}=\overline{A}$.

(5)解法一因$A\subset B$，故$A+B=B$，所以$\overline{A+B}=\overline{B}$；

解法二$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$且因$A\subset B$，$\overline{B}\subset\overline{A}$，故

$$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}=\overline{B}=\{x|0\leqslant x<1/4\}+\{x|3/2\leqslant x\leqslant 2\}.$$

法三 用图示法求之

将有关事件用文氏图或其他的几何图形表示，借助这些图形求出所叙事件的表示式.

为了直观，一般用平面上某个方形(或矩形)区域表示必然事件Ω，该区域内的一个子区域就表示一个事件，这种表示事件及其运算关系的示意图称为文氏图.

例 8 设试验是让点随机地落在矩形区域内，事件A表示是

落在左边的圆内[图 1.1.1(a)],事件 B 表示落在右边的圆内[图 1.1.1(b)],试作图说明事件 $A+B$,AB,$\overline{A}$,$\overline{B}$,$A\overline{B}$,$\overline{A}B$ 及 $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$ 分别表示什么?

解 如图 1.1.1 所示:

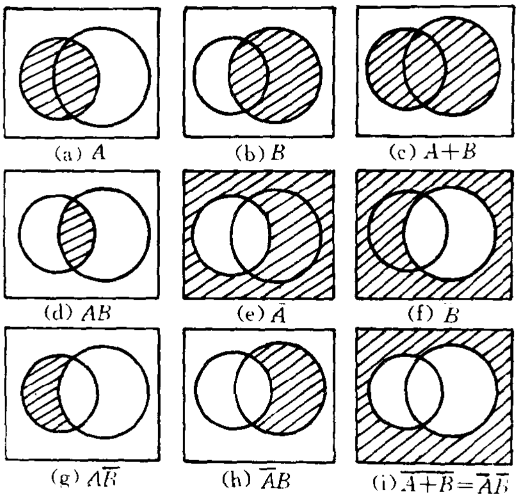

图 1.1.1

事件 $A+B$ 表示随机点落在任一圆内[图 1.1.1(c)];

事件 AB 表示随机点落在两圆的公共部分内[图 1.1.1(d)];

事件$\overline{A}$表示随机点落在左圆之外[图 1.1.1(e)];

事件$\overline{B}$表示随机点落在右圆之外[图 1.1.1(f)];

事件 $A\overline{B}$表示随机点落在左圆之内,但在右圆之外[图 1.1.1(g)];

事件$\overline{A}B$ 表示随机点落在右圆之内,但在左圆之外[图 1.1.1(h)];

事件$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$ 表示随机点落在两圆之外的区域[图 1.1.1(i)].

例 9 对飞机进行两次射击,每次射一弹,设事件

$A=\{$第一次射击击中飞机$\}$, $B=\{$第二次射击击中飞机$\}$.

试表示下列各事件：

$C=\{$两弹都击中飞机$\}$；　　$D=\{$两弹都没击中飞机$\}$；

$E=\{$恰有一弹击中飞机$\}$；　　$F=\{$至少有一弹击中飞机$\}$.

并指出(1)C,D,E,F 中哪些是互不相容的事件；(2)哪些是对立的事件？

解 由题意得到

$C=AB$，　$D=\overline{A}\,\overline{B}$，

$E=A\overline{B}+\overline{A}B$，　$F=A+B$.

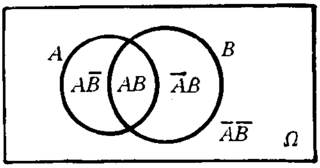

图 1.1.2

(1) 由图 1.1.2(参阅图 1.1.1)易看出，集合 AB，$A\overline{B}+\overline{A}B$，$\overline{AB}$ 两两不相交，因而事件 C，D，E 两两互不相容. 事实上易证 $CD=CE=DE=\varnothing$(自行补证).

(2)D 与 F 为对立事件，事实上

$$DF=\overline{A}\,\overline{B}(A+B)=\overline{A}\,\overline{B}A+\overline{A}\,\overline{B}B=(\overline{A}A)\overline{B}+\overline{A}(\overline{B}B)$$
$$=\varnothing\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot\varnothing=\varnothing+\varnothing=\varnothing,$$
$$D+F=\overline{A}\,\overline{B}+A+B=\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}B+A+B$$
$$(\overline{A}B\subseteq B,\text{故}\overline{A}B+B=B)$$
$$=\overline{A}(\overline{B}+B)+A+B=\overline{A}\Omega+A+B=\overline{A}+A+B$$
$$=\Omega+B=\Omega(B\subset\Omega),$$

故 D 与 F 为一完备事件组，即 D 与 F 为一对立事件.　　解毕

值得注意的是 C,D,E 三事件仅是两两互不相容. 它们中没有对立事件，这是因为两个互不相容事件在一次试验中仅仅是不能同时发生，并不能排除它们同时都不发生的可能性，而当 C,D,E 三事件中任一事件(例如 E)发生时，其余两事件(例如 C 和 D)都可以不发生.

而两个对立事件，它们在一次试验中不仅不能同时发生，而且也不可能同时不发生，即两个对立事件在一次试验中不但仅能发生其中之一，而且也必然发生其中之一. 因而 C,D,E 中任意两事件仅是两两互不相容事件，其中没有对立事件. D 与 F 却不同，

若 D 发生，则 F 就不可能发生，若 D 不发生，则 F 一定发生，因而 D 与 F 是对立事件，当然它们也必是互不相容的．

例 10 从一批含正品和次品的产品中，任意取出五个产品．根据下列所取得的正品数与次品数，试分别写出各自的“对立事件”：

(1) A_1 表示“至少有一个次品”的事件；

(2) A_2 表示“至少有两个次品”的事件；

(3) A_3 表示“至多有两个正品”的事件；

(4) A_4 表示“五个全是次品”的事件．

解 在次品数数轴和正品数数轴上（注意它们的正向相反）分别描出 6 个点，这些点组成一个全集 Ω. 然后在这两轴上分别标出有关事件，两轴上箭号方向相同的两事件为等价事件；一轴或两轴上方向相反的两事件为对立事件，因此可以按次品数{至多 x 个}与{至少 x 个}来写对立事件；也可按正品数{至多 x 个}与{至少 x 个}来写对立事件．

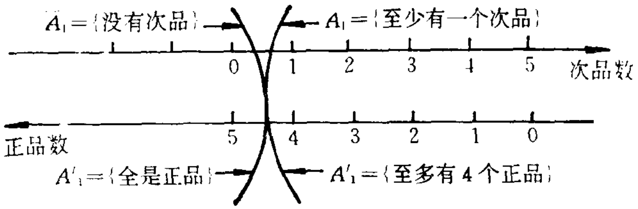

图 1.1.3

由图 1.1.3 易得到 A_1 与 A'_1 是等价事件，$\overline{A}_1$ 与 $\overline{A'}_1$ 也是等价事件，因而 $\overline{A}_1$ 与 $\overline{A'}_1$ 都是事件 A_1 的对立事件，即 A_1={5 个产品中至少有一个次品}的对立事件为 $\overline{A}_1$={5 个产品中没有次品}（按次品数写对立事件）或为 $\overline{A'}_1$={5 个产品中全是正品}（按正品数写对立事件）．

由图 1.1.3 还可看出{5 个产品中至多有 4 个正品}的对立事件也有上面两种表述方式即为{5 个产品中没有次品}，{5 个产品

中全是正品}.

由图 1.1.4 易看出 A_2 与 A'_2,$\overline{A}_2$ 与 $\overline{A}'_2$ 分别为两组等价事件,且 A_2 的对立事件为$\overline{A}_2$ 或为$\overline{A}'_2$,即 A_2={5 个产品中至少有两个次品}的对立事件为$\overline{A}_2$={5 个产品中至多有一个次品}(按次品数写对立事件),或为$\overline{A}'_2$={5 个产品中至少有 4 个正品}(按正品数写对立事件).

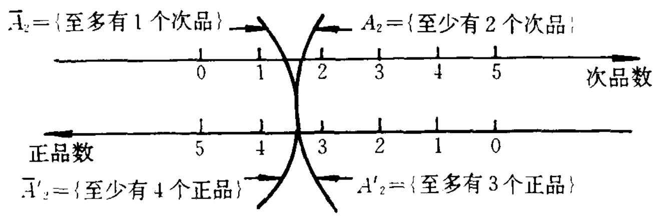

图 1.1.4

一般得到 A_i={5 个产品至少有 i 个次品}的对立事件为$\overline{A}_i$={5 个产品中至多有 $i-1$ 个次品},或为 $\overline{A}'_i$={5 个产品中至少有 $5-(i-1)$个正品}($i=1,2,3,4,5$),因而 A_3={5 个产品中至多有两个正品}={5 个产品中至少有 3 个次品}的对立事件为$\overline{A}_3$={5 个产品中至多有 $3-1=2$ 个次品},或为$\overline{A}'_3$={5 个产品中至少有 $5-(3-1)=3$ 个正品},A_4={5 个产品全是次品}={5 个产品中至少有 5 个次品}的对立事件为$\overline{A}_4$={5 个产品中至多有 4 个次品}或为 $\overline{A}'_4$={5 个产品中至少有 1 个正品}.

注意 由上例的方法不难得到下面的两个一般结论:

(1){n 个产品中至多有 $x(<n)$个正(次)品}的对立事件为{至少有 $x+1$ 个正(次)品},或为{至多有 $n-(x+1)$个次(正)品};{n 个产品中至少有 $y(<n)$个正(次)品}的对立事件为{至多有 $y-1$ 个正(次)品},或为{至少有 $n-(y-1)$个次(正)品}.

将正品与次品换为事件发生与不发生得到:

(2){n 个事件中至多有 $m(<n)$个事件(不)发生}的对立事件

是{至少有 $m+1$ 个事件(不)发生}或为{至多有 $n-(m+1)$个事件不发生(发生)};{n 个事件中至少有 $m(<n)$个事件(不)发生}的对立事件为{至多有 $m-1$ 个事件(不)发生}或为{至少有 $n-(m-1)$个事件不发生(发生)}.

习　　题　1.1

1. 设 A,B 为两个随机事件,通过 A,B 的运算关系在空白内分别写出下列事件及其对立事件:

(1)A,B 都发生____其对立事件为_________.

(2)A,B 至少有一个发生____,其对立事件为____.

(3)A,B 都发生或都不发生____,其对立事件为____.

2. 从一批含有正品与次品的产品中,任意取出五个产品,试写出 $A=${至少有 3 个次品}的对立事件.

3. 试判断事件 $M_1=\{A,B$ 至少发生一个$\}$与 $M_2=\{A,B$ 最多发生一个$\}$及 $M_3=\{A,B$ 都不发生$\}$中哪两个是对立事件?

4. 设 A,B,C 为三事件,用 A,B,C 的运算关系表示事件 $M_1=\{A,B,C$ 中不多于一个发生$\}$和 $M_2=\{A,B,C$ 中至少有两个发生$\}$.

5. 在区间$[0,2]$内任取一数,观察取得的数的情况,试写出样本空间.如令事件

$A=\{$在$[1/2,3/2]$内取得的数$\}$,　$B=\{$在$[1/4,1]$内取得的数$\}$

试用区间表示下列诸事件:A;B;$\overline{A+B}$;$A+\overline{B}$及 $A\,\overline{B}$.

6. 设 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$,$A=\{2,3,4\}$,$B=\{3,4,5\}$,$C=\{5,6,7\}$. 求(1)$\overline{\overline{A}\,\overline{B}}$;　(2)$\overline{A(\overline{A}\,\overline{C})}$.

§1.2　事件间的关系及其运算性质的简单应用

事件间的关系及其运算性质,教材中都有详细介绍,这里不再重复.下面举例介绍它们在证明和化简事件关系式方面的应用.

应用一　推出一些常用的事件关系式

利用事件关系及其运算性质可推出下列常用的事件关系式：

分配律(和对积的分配律)：

$$AB+C=(A+C)(B+C); \qquad (1.2.1)$$

摩根律(对偶律)：$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$；　(1.2.2)

(记忆方法：左端到右端，长线变短线，和变积；积变和．)

补元律：$A\overline{A}=\varnothing$　　$A+\overline{A}=\Omega$；　(1.2.3)

还原律：$\overline{\overline{A}}=A$；　(1.2.4)

吸收律：如 $A\subset B$，则 $AB=A$，且 $A+B=B$；　(1.2.5)

分解律：如 $A\subset B$，则 $B=A+\overline{A}B$；　(1.2.6)

蕴涵律：如 $AB=\varnothing$，则 $A\subset\overline{B}$，$B\subset\overline{A}$.　(1.2.7)

上述关系式是计算事件概率的重要关系式，宜熟练掌握．

因概率论中的事件与集合论中的集合以及它们之间的关系和运算是一致的，在同一个样本空间事件间的关系就是集合之间的关系．因此可把集合的运算规律，解题思路全部用来指导事件的运算，推出有关事件的关系式；另一方面，也要会用概率论语言，对事件关系式进行论证．

例 1　证明对偶律(摩根律)：

$$(1)\ \overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}; \qquad (2)\ \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}.$$

证　(1)**证明一**　事件 $A+B$ 表示两事件 A 与 B 中至少有一事件发生，其逆事件就是 A 与 B 都不发生，即 $\overline{A}\,\overline{B}$，故

$$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}.$$

证明二　由文氏图(图 1.1.2)易看出 $A+B$ 的对立事件为 $\overline{A}\,\overline{B}$，即 $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$.

(2)**证明一**　由文氏图(图 1.1.2)易看出 AB 的对立事件即 $\overline{AB}$ 为

$$\begin{aligned}\overline{A}B+A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B}&=\overline{A}B+\overline{A}\,\overline{B}+A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B}\\&=\overline{A}(B+\overline{B})+(A+\overline{A})\overline{B}=\overline{A}+\overline{B}.\end{aligned}$$

证明二　利用还原律 $\overline{\overline{A}}=A$ 及(1)中已证结果得到