高等学校试用教材（应用数学教学用书）

数学模型

姜启源　编

高等教育出版社

高等学校试用教材

（应用数学教学用书）

数 学 模 型

姜启源 编

高等教育出版社

本书是编者在清华大学萧树铁教授讲课记录的基础上根据自己的讲稿补充、整理而成的，经高等工业学校应用数学专业教材委员会1986年5月杭州会议审定作为教材．本书着重培养应用数学专业学生的洞察力和想象力，全书分“建立模型”、“初等模型”、“优化模型”、“离散模型”、“稳定性模型”、“人口模型”、“交通模型”及“其它模型”八章．

本书可供理工科院校应用数学专业的学生作为教材，也可供数学专业学生、应用数学工作者、高等院校有关教师及科技工作者参考．

高等学校试用教材

（应用数学教学用书）

数学模型

姜启源　编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京第二新华印刷厂印装

*

开本850×1168　1/32　印张8.625　字数208,000

1987年4月第1版　1987年4月第1次印刷

印数00 001—12 150

书号　13010·01382　　定价1.55元

序

近十年来，我国高等理工科学校所设置的应用数学专业(系)在数量上有较大的增长，然而直到现在，在如何培养这个专业学生的问题上，却还没有来得及进行认真的研究.

通过一些传统的数学基础课对应用数学专业的学生进行比较严格的数学训练仍然是重要的．但如果要把他们培养成为“会应用”的应用数学工作者，似乎还应该在另外一些方面使他们得到训练．例如，第一，面对一个不太复杂的现象，经过一番初步分析后，能较快地抓住问题的主要方面；可以名之为洞察力．第二，能从两个表面看上去没有多少联系的现象中找出共同点而加以类比；这是一种想象力．在传统的大学数学基础课里面，并非没有对这些方面的要求，然而似乎还没有哪一门课程把进行这类训练作为自己的主要任务，只是近年来国外出现的“数学模型”一课也许不在此列.

为了在这方面进行探索，1982年秋天我们(姜启源、谭泽光、葛玉安和我)组织了一个“数学模型”讨论班，围绕 **E. A. Bender** 的书：“***An Introduction to Mathematical Modeling***”，搜集资料，进行分析讨论．1983年春和暑假中，我分别为清华应用数学系三、四年级和大连的“数学模型讲习班”试讲了“数学模型”课．此后国内有些应用数学系也开设了这门课，其中姜启源同志在清华应用数学系讲了两次．他在讲授中又补充了一些新的材料，尤其是他花了很大的功夫把讲的这些材料以学生较易接受的形式编成讲义，成了这本书的基础.

要培养学生的洞察力和想象力，靠一本教科书当然是不够的，至少还需通过教师根据不同的背景和学生的实际情况来灵活运用

书中的内容. 因此，在多种不同风格的教材出现以前，一本教材的弹性是不可少的. 编者在这方面也作了不少的努力，其中包括选了一批有趣的习题. 它们除了可供学生动手练习(这是学习这门课必不可少的环节)以外，有一些也可以作为讲授或讨论的内容.

姜启源同志的这本书是一个很有益的尝试，希望通过它的出版，能促使更多这方面不同风格的教材出现.

萧树铁

1986年6月于清华园

前　言

最近几十年来，随着各门科学技术，特别是计算机科学的不断进步，数学的应用不仅在它的传统领域——所谓物理领域(力学、电学…等学科以及机电、土木、化工等工程技术)中取得了许多重要进展，而且迅速地进入了一些新的领域——所谓非物理领域(经济、交通、生态、医学、人口、社会……)．今天，数学在提高技术、发展生产、搞好经济管理，以及发展各门自然科学甚至某些社会科学中的重要性已经日益被人们所认识．

把数学方法应用到任何一个实际问题中去，都需要把这个问题的内在规律用数字、图表，或者公式、符号表示出来，经过数学的处理，得出供人们作分析、预报、决策或者控制的定量结果。这个过程就是通常所说的建立数学模型。本书主要讨论在非物理领域中的数学模型，这是由于一方面数学在一些非物理领域中的应用开始还不久，需要研究的问题很多，另一方面，数学在许多物理领域的应用已经日趋深入，进一步的研究常常需要涉及较为专门的知识，不可能也不便在这本入门书中讨论；而一些非物理领域的模型的实际背景往往更易于了解．

建立数学模型一般说来有机理分析、统计分析等方法．本书只讨论机理分析方法，即根据客观事物本身的性质，分析因果关系，在适当的简化假设下，利用合适的数学工具得到描述其特征的数学模型．至于其它方法，读者可以阅读诸如系统辨识、参数估计，或数理统计、计算机模拟(仿真)等方面的书籍．

应用数学工作者需要有熟练的数学技巧和丰富的想象力，传统的数学训练偏重于前者，本门课程特别注意培养后者．读者在学习本书列举的大量例题的同时，可以研究每章最后所附的习题，

尽可能参阅本书最后所列的参考书目或其它有关材料，并且不应忘记亲手做几个实际题目．

清华大学应用数学系自1983年起将“数学模型”列为本科大学生的必修课，萧树铁教授于1983年春季讲了第一遍，为课程的体系、内容和方法提供了基础．此后本书编者讲了两遍，这本教材是在萧教授讲课记录的基础上，将编者授课的讲稿补充整理而成的．

使用这本教材的学生应具有线性代数和常微分方程的知识．虽然本书在一些地方还出现了一点概率论和变分法的概念，但只要稍加说明，也是不难接受的．

这本教材可以用于40—60学时的“数学模型”课程．为了使它有一定的弹性，各章尽可能自成单元．讲授者可根据实际情况选择自己的重点．

由于这是一门新课，没有现成的经验可以借鉴，国内外也缺乏比较定型的教材，再加上受编者水平所限，因此本书必然存在着许多不足之处，诚恳希望广大读者提出意见，以便进一步修改．

编　者

1985年6月

三八一点藏书 张

目　录

数学
模型
88.4

第一章　建立数学模型

数学模型是今天科学技术工作者常常谈论的名词. 炼钢厂的工程师们希望有一个炼钢过程的数学模型，以实现计算机自动控制;气象工作者要根据关于气压、雨量、风速……的数学模型，来预报天气;从事城市规划工作的专家们更需要建立一个包括人口、交通、能源、污染……大系统的数学模型，为领导者作出城市发展规模的决策提供科学根据。模型是相对于我们生活的现实而言的. 数学模型与现实世界的关系如何,怎样建立数学模型,数学模型如何分类,这一章要通过两个例子回答这些问题.

§1　现实世界与数学模型

你喜欢参观展览会吗？让我们一起去看看丰富多彩的科技展览吧!

走过展览大厅,一件件精心制作的展品便映入眼帘:雄伟壮观的水电站模型,耸立在发射架上的人造卫星模型,……如果你想知道核电站如何运转，那么就请听手持原子结构模型的讲解员所做的有趣介绍吧,展厅四周的墙壁上挂满了照片和图表:日新月异的城市高层建筑的彩色巨照,石油工业迅猛发展的数字和图表,和整面墙壁一样大的地图上鲜明地标出了新建的铁路和新辟的航线，……如果你想深入了解现代化钢厂将如何实现全部计算机控制,那不妨去看一部科技幻灯片,那里有控制过程的框图，有炼钢过程的原料和时间的计算公式，甚至也有一段管理生产的计算机程序.

在两小时的参观中，我们从现实生活进入了另一个世界，仿佛一会儿乘坐卫星飞上太空，一会儿变作孙猴钻入原子内部，一会儿又跟随生产过程的框图、公式和程序去探索计算机控制的奥妙．从开阔眼界、丰富知识的角度看，这恐怕不是仅仅置身现实世界中两天、二十天所能做到的．这种奇妙的作用要归功于你看到的实物模型、照片、图表、地图、公式、程序……，它们统统称作"模型"．

实物模型、玩具、照片等把现实物体的尺寸加以改变，看起来逼真，称形象模型．地图、电路图等在一定假设下用形象鲜明、便于处理的一系列符号代表现实物体的特征，称模拟模型．而图表、公式、程序等则用字母、数字或其它数学符号，以及由它们组成的数学式子、图形等来描述客观事物的特征及其内在联系，这就是我们要研究的数学模型．模拟模型和数学模型都是现实世界的抽象．如果说，形象模型不过是现实世界的放大和缩小，在某种程度上只起着便于观察、研究作用的话，那么抽象模型，特别是数学模型，则是现实世界简化的、然而是本质的描述，在人类历史的长河中，它对生产力的发展起着无法估量的作用．今天，没有数学模型，许多基本的生产活动便无法进行，更不要说计算机的应用了．

数学模型是运用数学的语言和工具，对部分现实世界的信息(现象、数据……)加以翻译、归纳的产物，它源于现实，又高于现实．数学模型经过演绎、推断，给出数学上的分析、预报、决策或控制，再经过解释，回到现实世界．最后，这些分析、预报、决策或控制必须经受实际的检验，完成实践——理论——实践这一循环(如图 1-1 所示)．如果检验的结果是正确或基本正确的，就可以用来指导实际，否则，要重新考虑翻译、归纳的过程，修改数学模型．

本书的重点是讨论如何建立数学模型，但是，科学技术发展到今天，尚不能给出若干条普遍适用的建立数学模型的准则和技巧．有人说，建立数学模型目前与其说是一门技术，不如说是一种艺

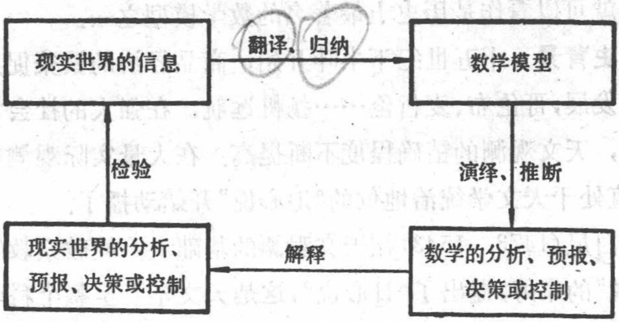

图 1-1　现实世界与数学模型的关系

术．艺术在某种意义下是无法归纳成几条准则或方法的．一名出色的演员需要大量的观摩和前辈的指点，更需要亲身的实践．类似地，掌握建立数学模型这种艺术，一要大量阅读、思考别人做过的模型，二要亲自动手，认真做几个实际题目．后者是更为重要的方面．本书就是试图通过大量例子，让大家看看别人是如何做的，以丰富自己的想象力．

在这一节的最后，也许应该给数学模型下一个定义，尽管许多作者并没有统一的意见．所谓数学模型，是指对于现实世界的某一特定对象，为了某个特定目的，做出一些必要的简化和假设，运用适当的数学工具得到的一个数学结构．它或者能解释特定现象的现实性态，或者能预测对象的未来状况，或者能提供处理对象的最优决策或控制．以下，数学模型就简称模型了．

§2　两个例子　万有引力定律和传染病数学模型

一、万有引力定律

万有引力定律的发现是牛顿(1642—1727)在力学上的重大贡献之一．牛顿在研究力学的过程中发明了微积分，又成功地在开普勒三定律的基础上运用微积分推导了万有引力定律．这一创造

性的成就可以看作是历史上最著名的数学模型之一.

历史背景 十五世纪下半叶开始，商品经济的繁荣促进了航海业的发展，哥伦布、麦哲伦……扬帆远航，在强大的社会需要的推动下，天文观测的精确程度不断提高. 在大量实际观测数据面前，一直处于天文学统治地位的“地心说”开始动摇了.

哥白尼(1473—1543)在天文观测的基础上，冲破宗教统治和“地心说”的束缚，提出了“日心说”，这是天文学乃至整个科学的一大革命. 但是由于历史条件和科学水平的限制，哥白尼的理论还有不少缺陷，譬如，他认为行星绕太阳的运行轨道是圆形的.

第谷·布拉赫(1546—1601)观测行星运动，积累了二十年的资料. 开普勒(1571—1630)作为他的助手，运用数学工具分析研究这些资料，发现火星的实际位置与按哥白尼理论计算的位置相差8弧分. 在深入分析的基础上，他于1609年归纳出所谓开普勒第一定律：各颗行星分别在不同的椭圆轨道上绕太阳运行，太阳位于这些椭圆的一个焦点上；及开普勒第二定律：单位时间内，太阳-行星向径扫过的面积是常数(对一颗行星而言). 为了寻求行星运动周期与轨道尺寸的关系，他将当时已发现的六大行星的运行周期和椭圆轨道的长半轴列成表格(如表1-1)，反复研究，终于总结

表 1-1 行星运行周期与椭圆轨道长半轴的关系
(以地球的周期和长半轴为度量单位)

行星	周期 T	长半轴 a	T^2	a^3
水星	0.241	0.387	0.058	0.058
金星	0.615	0.723	0.378	0.378
地球	1.000	1.000	1.000	1.000
火星	1.881	1.524	3.54	3.54
木星	11.862	5.203	140.7	140.85
土星	29.457	9.539	867.7	867.98

出第三定律：行星运行周期的平方与其椭圆轨道长半轴的三次方成正比.

牛顿认为一切运动都有其力学原因，开普勒三定律的背后必定有某个力学规律在起作用. 他要构造一个模型加以解释. 终于，他以微积分(当时称流数法)为工具，在开普勒三定律和牛顿力学第二定律的基础上，演绎出所谓万有引力定律. 这一定律成功地定量解释了许多自然现象，也为其后一系列的观测和实验数据所证实，成为物理学中的一个基本定律.

万有引力定律的建立①

以太阳为原点建立极坐标系 (r,θ)，向径 r 表示行星位置，如图 1-2 所示.

将开普勒三定律作为假设I、II、III，牛顿力学第二定律作为假设 IV，它们可以表示为：

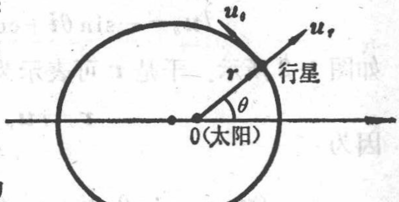

图 1-2 极坐标系中的行星运行轨道

I) 轨道方程为

$a^2=b^2+c^2$

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta} \tag{1}$$

其中
$$p=\frac{b^2}{a},\quad b^2=a^2(1-e^2) \tag{2}$$

a 为长半轴，b 为短半轴，e 为离心率.

证明过程呢？

II)
$$\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}=A \tag{3}$$

A 是单位时间内向径 r 扫过的面积，对某一颗行星而言，A 是常数. $\dot{\theta}$ 表示 θ 对时间 t 的导数.

III)
$$T^2=ka^3 \tag{4}$$

---

① 这个推导过程是在牛顿的方法的基础上改写的.

T 是行星运行周期，k 是绝对常数.

IV) $$f \propto \ddot{\boldsymbol{r}} \tag{5}$$

这表示太阳和行星间的作用力 $\boldsymbol{f}$ 与加速度 $\ddot{\boldsymbol{r}}$ 的方向一致，与 $\ddot{\boldsymbol{r}}$ 的大小成正比.

下面要从这四条假设出发，推导出万有引力定律：太阳与行星间作用力的方向是太阳和行星连线方向，指向太阳；大小与太阳-行星间距离的平方成反比. 比例系数是绝对常数.

首先，基向量选为

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}_r = \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{u}_\theta = -\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j}\end{cases} \tag{6}$$

如图 1-2 所示. 于是 $\boldsymbol{r}$ 可表示为

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{u}_r \tag{7}$$

因为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{u}}_r = -\sin\theta\cdot\dot{\theta}\boldsymbol{i} + \cos\theta\cdot\dot{\theta}\boldsymbol{j} = \dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta \\ \dot{\boldsymbol{u}}_\theta = -\cos\theta\cdot\dot{\theta}\boldsymbol{i} - \sin\theta\cdot\dot{\theta}\boldsymbol{j} = -\dot{\theta}\boldsymbol{u}_r\end{cases} \tag{8}$$

由(7)和(8)可以得到行星运动的速度和加速度：

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{u}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta \tag{9}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{u}_\theta \tag{10}$$

根据(3)式，

$$\dot{\theta} = \frac{2A}{r^2} \tag{11}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-4A\dot{r}}{r^3} \tag{12}$$

由(11)和(12)可知(10)右端第二项 $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$，于是(10)式为

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{u}_r \tag{13}$$

根据(1)和(11)两式，可以算出

$$\dot{r}=\frac{r^2}{p}e\sin\theta\cdot\dot{\theta}$$

$$=\frac{2A}{p}e\sin\theta \tag{14}$$

$$\ddot{r}=\frac{2A}{p}e\cos\theta\cdot\dot{\theta}$$

$$=\frac{4A^2}{r^3}\left(1-\frac{r}{p}\right) \tag{15}$$

将(11)和(15)代入(13)式可得

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=-\frac{4A^2}{pr^2}\boldsymbol{u}_r \tag{16}$$

将得到的(16)式与(5)、(7)相比较可知，太阳对行星的作用力 $\boldsymbol{f}$ 的方向与向径 $\boldsymbol{r}$ 方向正好相反，即 $\boldsymbol{f}$ 在太阳-行星的连线方向，指向太阳；$\boldsymbol{f}$ 的大小与太阳-行星间距离的平方成反比.

为了完成万有引力定律的推导，只需进一步证明(16)式中的比例系数 A^2/p 是绝对常数（A 和 p 都不是绝对常数，它们的数值取决于所讨论的是哪一颗行星）.

根据 A 和(2)式中 a、b 的定义，任一行星的运行周期 T 满足：

$$TA=\pi ab \tag{17}$$

由(2)、(4)和(17)式不难得到

$$\frac{A^2}{p}=\frac{\pi^2a^2b^2}{T^2p}=\frac{\pi^2a^2b^2}{ka^3}\cdot\frac{a}{b^2}$$

$$=\frac{\pi^2}{k} \tag{18}$$

π 和 k 皆为绝对常数，这就说明引力的比例系数对“万物”是同一个常数，从而得到了著名的万有引力定律.

通过万有引力定律的推导过程可以看出，在正确的假设的基础上，运用数学的演绎方法建立模型，对自然科学的发展能够发挥多么巨大的作用.

二、传染病模型

本世纪初，瘟疫还经常在世界的某些地区流行．被传染的人数与哪些因素有关？如何预报传染病高潮的到来？为什么同一地区一种传染病每次流行时，被传染的人数大致不变？科学家们试图建立一个模型描述传染病的蔓延过程，以便对这些问题做出回答．[1][2]①

这里不是从医学的角度探讨每一种瘟疫的传染机理，而是一般地讨论传染病的蔓延过程．这个问题与自然科学领域中一些已经有确定规律的问题不同．我们不可能立即对它做出恰当的假设，建立完善的模型．所以我们的方法是，先做出最简单的假设，看看会得到什么结果，然后针对其不合理或不完善处，逐步修改和增加假设，得到比较满意的模型．下面分三步讨论这个问题．

模型Ⅰ

假设：病人(带菌者)通过接触(空气、食物、……)将病菌传播给健康者．单位时间内一个病人能传染的人数是常数 k_0．

记时刻 t 的病人人数为 $i(t)$，由假设可知

$$i(t+\Delta t)-i(t)=k_0 i(t)\Delta t$$

即

$$\frac{di}{dt}=k_0\, i(t) \tag{19}$$

设开始时有 i_0 个病人

$$i\Big|_{t=0}=i_0 \tag{20}$$

方程(19)在初始条件(20)下的解为

$$i(t)=i_0 e^{k_0 t} \tag{21}$$

这个结果表明，病人人数将按指数规律无限增加，与实际情况明显地不相符合．事实上，一个地区的总人数大致可视为常数(不

① 见参考文献[1][2]，下同．