

金 塑造成形原理

高等学校试用教材

金属塑性成形原理

西安交通大学汪大年 主编



机械工业出版社

金属塑性成形原理

西安交通大学汪大年 主编

*

机械工业出版社出版(北京阜成门外百万庄南街一号)

(北京市书刊出版业营业许可证出字第117号)

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{16}$ · 印张 $16 \frac{3}{4}$ · 字数 406 千字
1982 年 6 月北京第一版 · 1983 年 6 月北京第二次印刷

印数 7,501-11,900 · 定价 1.75 元

*

统一书号: 15033 · 5126

前 言

《金属塑性成形原理》是根据1978年高等学校一机部对口专业座谈会确定的计划及1978年12月重庆锻压专业教材会议制订的大纲编写的大纲编写的。本书可作为锻造冲压工艺及设备专业的试用教材，也可供有关科技人员参考。

全书共十二章。前九章主要讨论金属塑性成形的力学问题，包括应力、应变分析等塑性力学基本内容和塑性成形问题的各种解题方法及其在基本锻压工序中的应用。第十、十一章则是阐述金属的微观结构、变形机理以及金属的塑性和抗力等问题。最后一章——十二章简单介绍金属塑性成形的实验研究方法，这是研究金属塑性成形的另一个重要方面，但不是本课程主要讨论的问题，因此可不必讲授。在有条件时，可结合实验课让学生熟悉这方面的内容。

本书由西安交通大学和上海交通大学七位同志分工编写而成。西安交大汪大年同志编写第一、六章和第九章（§ 9-1、§ 9-2、§ 9-3）；张子公同志编写第二、三、四、五章及附录；陈金德同志编写第七章和第十一章（§ 11-1~§ 11-6）；赵静远同志编写第十二章（§ 12-4、§ 12-5）。上海交大肖文斌同志编写第十章和第十一章（§ 11-7）；穆承席同志编写第八章；许昭仁同志编写第九章（§ 9-4、§ 9-5）和第十二章（§ 12-1~§ 12-3）。全书由汪大年同志主编。

本书由华中工学院肖景容同志主审，在审阅中对本书的编写提供了不少宝贵意见，各院校参加审稿会的同志在审稿中也提出了许多有益的建议，参加本书审稿会的有：清华大学王祖唐同志、山东工学院关廷栋同志、哈尔滨工业大学霍文絜同志、合肥工业大学程慈龄同志、华南工学院黄燊华同志、重庆大学苏长清同志、江西工学院林治平同志、吉林工业大学万胜狄同志。本书责任编辑张蔼玲同志在编辑过程中做了不少工作，对保证本书的出版作出了贡献。在此，谨对同志们的帮助表示深切的谢意。

本课程是一门正在发展中的学科，体系和内容尚未定型。目前本书对内容的选取和章节的安排是否最为恰当，谨请读者批评指正。

目 录

第一章 绪论	1	§ 5-3 塑性变形的增量理论 (流动理论)	55
§ 1-1 金属塑性成形技术在国民经济中的作用	1	§ 5-4 塑性变形的全量理论 (形变理论)	59
§ 1-2 金属塑性成形方法的分类	1	§ 5-5 塑性应力应变关系的实验验证	60
§ 1-3 金属塑性成形原理课程的目的和任务	4	§ 5-6 最大散逸功原理	61
§ 1-4 金属塑性成形理论的发展概述	4	第六章 真实应力-应变曲线	64
第二章 应力分析	6	§ 6-1 拉伸试验曲线	64
§ 2-1 外力和应力	6	§ 6-2 压缩试验曲线	71
§ 2-2 直角坐标系中一点的应力状态	7	§ 6-3 不同变形温度、速度条件下的真实应力-应变曲线	74
§ 2-3 应力平衡微分方程	18	第七章 塑性成形问题的解法	76
§ 2-4 平面应力状态和轴对称应力状态	19	§ 7-1 平衡微分方程和塑性条件联立求解的数学解析法	76
第三章 应变分析	24	§ 7-2 主应力法 (又称切块法 slab method)	79
§ 3-1 有关变形的一些基本概念	24	§ 7-3 变形功法	83
§ 3-2 小变形分析	25	§ 7-4 滑移线法	90
§ 3-3 无限小应变张量和有限应变张量的概念	36	§ 7-5 上限法	106
§ 3-4 应变增量和应变速率张量	37	第八章 金属塑性成形时的摩擦与润滑	117
§ 3-5 平面变形和轴对称问题	40	§ 8-1 金属塑性成形时摩擦的特点	117
第四章 屈服准则	42	§ 8-2 金属塑性成形时摩擦的分类	117
§ 4-1 有关材料性质的一些基本概念	42	§ 8-3 摩擦机理	119
§ 4-2 屈雷斯加屈服准则 (最大剪应力不变条件)	43	§ 8-4 影响外摩擦系数的主要因素	120
§ 4-3 密席斯屈服准则 (弹性形变能不变条件)	44	§ 8-5 测定摩擦系数的方法	122
§ 4-4 屈服准则的几何表达——屈服轨迹和屈服表面	45	§ 8-6 金属塑性成形时的润滑剂	124
§ 4-5 中间主应力的影响	47	§ 8-7 润滑方法的改进	126
§ 4-6 平面问题和轴对称问题中屈服准则的简化	48	第九章 锻压基本工序分析	128
§ 4-7 屈服准则的实验验证	49	§ 9-1 镦粗	128
§ 4-8 应变硬化材料的屈服准则	50	§ 9-2 受内压厚壁筒进入塑性状态时的极限应力	145
第五章 应力应变关系	52	§ 9-3 模锻	146
§ 5-1 弹性应力应变关系	52	§ 9-4 冲孔	155
§ 5-2 塑性变形时应力应变关系的特点	54	§ 9-5 挤压	158

第十章 金属的结构和塑性变形	171	影响	213
§ 10-1 金属的晶体结构	171	§ 11-5 其它因素对塑性和变形抗力的影响	218
§ 10-2 单晶体的塑性变形	176	§ 11-6 提高金属塑性和降低变形抗力的常用工艺措施	221
§ 10-3 位错理论的基本概念	181	§ 11-7 超塑性	223
§ 10-4 多晶体的塑性变形	189	第十二章 金属塑性成形实验研究方法简介	231
§ 10-5 加工硬化	190	§ 12-1 相似理论	231
§ 10-6 回复和再结晶	192	§ 12-2 座标网格法	232
§ 10-7 冷变形、热变形和温变形	197	§ 12-3 视塑性法	235
第十一章 金属的塑性和变形抗力	198	§ 12-4 光塑性	243
§ 11-1 塑性和变形抗力的概念	198	§ 12-5 密栅云纹实验	249
§ 11-2 金属的化学成分和组织对塑性和变形抗力的影响	200	附录 I 角标符号及求和约定	254
§ 11-3 变形温度、变形速度对塑性和变形抗力的影响	205	附录 II 张量简介	255
§ 11-4 应力状态对塑性和变形抗力的影响			

第一章 绪 论

§ 1-1 金属塑性成形技术在国民经济中的作用

金属塑性成形技术是金属加工方法之一。它是利用金属的塑性——金属产生塑性变形的能力，使金属在外力作用下成形的一种加工方法。因而也称为金属塑性加工或金属压力加工。

工业中常见的金属加工方法，如轧制、挤压、拉拔、锻造、冲压等，都是利用金属的塑性而得以实现的。通常，轧制、拉拔、挤压是生产型材、板材、管材和线材等金属材料的加工方法，属于冶金工业领域；而锻造、冲压则是利用这些金属材料来制造机器零件的加工方法，故属机器制造工业领域。但是这种区分方法也不是绝对的，例如有的冶金工厂中也利用锻造来生产棒材，有的机器制造厂也利用轧和挤的变形方式来生产机器零件。

金属塑性成形方法由于在技术上和经济上有它的独特之处，因而是国民经济中不可缺少的重要加工手段。它的主要优点有：

1. 金属材料经过相应的塑性加工后，其组织、性能都能得到改善和提高，特别是对于铸造组织的改善，效果更为显著。例如，铸锭要通过锻造或者轧制，或者挤压，才能使结构致密，组织改善，性能提高，成为合用的材料。因此，一般说来，凡是受交变载荷、服役条件比较繁重的零件，用塑性成形方法制造的比较可靠。

2. 金属塑性成形是金属在固体状态下体积的转移过程。因此在成形过程中，不象切削加工那样产生切屑（有时有少量的工艺废料），所以是一种无屑成形方法，因而可以获得合理的流线分布和较高的材料利用率。

3. 用塑性成形方法得到的工件，可以达到较高的精度，近年来，应用先进的技术和设备，不少零件已达到少、无切削的要求。例如，精密锻造的伞齿轮，其齿形部分的精度可达8级，光洁度达 $\nabla 6 \sim \nabla 7$ ，可以不经切削加工直接使用等等。

4. 塑性成形方法有很高的生产率。这一点对于金属材料的轧制、拉丝、挤压等工艺来说是非常明显的。对于机器零件的生产，由于锻压生产的机械化和自动化的发展，趋势也是如此。例如，在一万二千吨机械锻压机上锻造汽车用的六拐曲轴仅需40秒；用自动冷锻机生产M12螺栓，每分钟生产210件，冷锻M12螺母，每分钟生产150件等等。

由此可见，利用金属塑性成形方法不但能获得强度高、性能好的工件，而且具有生产率高、材料消耗少等优点，因而在国民经济中得到广泛的应用。特别像汽车、拖拉机、宇航、船舶、军工、电器等工业部门，塑性成形乃是非常主要的加工方法。

§ 1-2 金属塑性成形方法的分类

作为生产金属材料的塑性成形方法，有轧制、拉拔和挤压三大方面。每个方面又包括多

种加工方法，形成各自的工艺领域。

轧制是使金属锭料或坯料通过两个旋转轧辊间的特定空间(平的或成型的)，以获得一定截面形状的材料塑性成形方法(见表1-1a)。这是由大截面材料变为小截面材料的加工过程。利用轧制方法可生产出型材、板材和管材。

拉拔是将大截面坯料拉过有一定形状的模孔，以获得小截面坯料的塑性成形方法(表1-1b)。利用拉拔方法可以获得棒材、管材和线材。

挤压是将大截面坯料或锭料一端加压，使金属从模孔中挤出，以获得符合模孔截面形状的小截面坯料的塑性成形过程(表1-1c、d)。因为挤压是在三向受较大的压应力状态下的成形过程，所以更适于生产低塑性材料的型材和管材。

以上几种金属材料的塑性成形方法，一般在加热状态下进行，但有时也可在室温下进行，视具体条件下金属的塑性而定。这些方法通常都用于连续生产等截面金属材料，因而有很高的生产率。

机器制造中的塑性成形方法也称锻压加工，包括锻造和冲压两大方面。

锻造属体积成形，就是通过金属体积的大量转移来获得机器零件(毛坯)的塑性成形方法。为使金属易于成形和有较好的塑性，锻造多在热态下进行，所以锻造也常称为热锻。

锻造通常分自由锻和模锻两大类。自由锻一般是在锤或水压机上，利用简单的工具将金属锭料或坯料锻成特定形状和尺寸的塑性成形方法。表1-1中的e——平砧下锻粗即为一例。进行自由锻时不使用专用模具，因而锻件的尺寸精度低，生产率也不高，所以自由锻主要用于单件、小批生产或大锻件的生产。

模锻是适于大批量生产的锻造方法，锻件的成形要用适合于每个锻件的模具来进行，表1-1f、g是两种模锻形式。由于模锻时金属的成形由模具控制，因此模锻件就有相当精确的外形和尺寸，同时生产率也相当高，这些是自由锻无法比拟的。

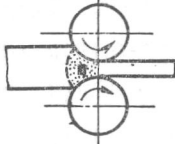
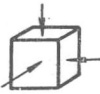
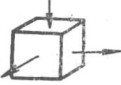
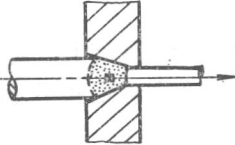
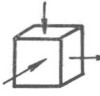
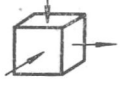
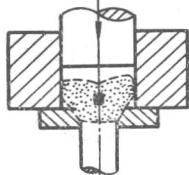
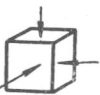
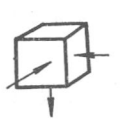
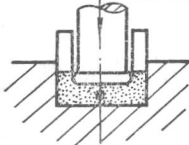
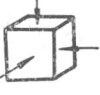
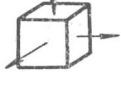
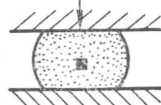
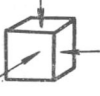
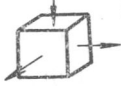
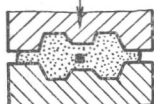
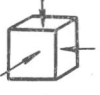
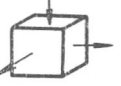
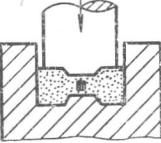


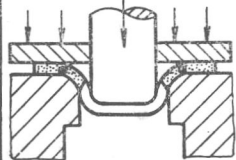
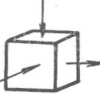

由于生产技术的发展，锻造中也引入了挤、轧等变形方式来生产锻件，例如用辊锻方法生产连杆；用三辊横轧方法生产长轴锻件，用挤压方法生产汽阀、转向节等等。这样就扩充了锻造工艺的范围，也使生产率得到进一步的提高。

近年来，随着技术的发展以及锻压设备刚度的提高、新模具材料的应用，对于某些中、小型锻件采用了不加温或少加温的锻造方法，即所谓冷锻、冷轧、冷挤或温锻、温挤等工艺。这样，一方面节约了能源，另一方面减少或免除了加热所带来的不良后果，如氧化、脱碳等缺陷，这就为提高锻件的精度创造了条件，是实现少无切削的重要途径。

冲压和上述各种体积成形方法不同，它属于板料成形，是利用专门的模具对板料进行塑性加工的方法，故也称板料冲压。同时，由于一般都在室温下进行，故也常称为冷冲压。板料冲压的基本成形方式有冲裁、拉深、弯曲、成形等多种工序，表1-1h是拉深工序的示意图。

各种塑性成形方法，除上述生产上的特点而外，在变形区的应力状态、变形状态和金属流动性质等方面也各有特点，如表1-1所示。表中的应力、应变状态只是从总体的角度上表示了变形区域中主应力、应变的正或负，没有表示出大小，因而是近似的分析方法。成形过程中变形区域不变的属稳定塑(性)流(动)，变形区域随变形过程而变化的属非稳定塑(性)流(动)。仔细观察可以发现，机器零件的塑性加工多数属于非稳定塑流过程。当然非稳定塑流过程比稳定塑流要复杂得多。

表1-1 塑性成形方法的分类

序号	成形方法名称	工序简图	变形区域(阴影区)	变形区主应力图	变形区主变形图	变形区塑性流动性质
a	轧制 (纵轧)		轧辊间			变形区不变 稳定流动
b	拉拔		模子锥形腔			变形区不变 稳定流动
c	正挤压		接近凹模口			变形区不变 稳定流动
d	反挤压		冲头下部分			变形区变化 非稳定流动
e	镦粗		全部体积			变形区变化 非稳定流动
f	开式模锻		全部体积			变形区变化 非稳定流动
g	闭式模锻		全部体积			变形区变化 非稳定流动
h	拉深		压边圈下板料			变形区变化 非稳定流动

§ 1-3 金属塑性成形原理课程的目的和任务

塑性成形方法种类繁多，有着各自的成形特点，但他们在塑性变形的物理方面和力学方面有着共同的基础。例如，塑性成形都以金属具有塑性为前提；都需要作用外力；成形时都不可避免地存在外摩擦的影响；都遵循着共同的金属学基础和塑性力学基础等等。金属塑性成形原理的任务就在于研究塑性成形中个别的和共同的规律性问题，以便在生产中利用这些规律性，选择设备、设计工艺，科学地、高效率地指导生产，促进生产。

具体说来，金属塑性成形原理研究以下几方面问题。

(1) 在讲述应力、应变理论及屈服准则等塑性理论的基础上，研究塑性成形中有关力学问题的各种解法，以便分析变形体内的应力、应变分布和确定变形力和变形功，为选择设备吨位、计算模具强度提供依据。

(2) 在讲述金属塑性变形金属学的基础上，研究温度、速度等加工条件对金属塑性和抗力的影响以及提高金属塑性和降低抗力的措施，以便获得最高的变形效率和性能良好的工件。

(3) 讲述金属在塑性成形中的流动规律和变形特点，以便求得合理的毛坯尺寸，使工件顺利成形。

§ 1-4 金属塑性成形理论的发展概述

金属塑性成形原理是随着金属塑性成形技术的发展而产生的一门新的应用学科。它是在塑性变形的物理、物理化学以及塑性力学基础上形成的一门学科，作为独立的一门课程还是本世纪四十年代的事。但作为它的基础的上述三个方面，则已有较长的发展历史。

塑性力学的发展历史可追溯到1864年，当年法国工程师屈雷斯加 (H. Tresca) 提出了最大剪应力屈服准则，即屈雷斯加屈服准则。1870年圣维南 (B. Saint-Venant) 第一次利用屈雷斯加屈服准则，求解了管子受弹塑性扭转或弯曲时的应力，随后又研究了平面应变方程式。圣维南被认为是塑性力学的奠基人。同年，列维 (M. Levy) 遵循圣维南的观点，提出了三向问题的方程式和平面问题方程式的线性化方法。这些都是对塑性力学最早的贡献。但后来一段时间内，塑性力学发展缓慢。直到本世纪初，塑性力学才又有所进展。德国学者在这方面有很大贡献。1913年密席斯 (Von Mises) 从纯数学角度提出了另一新的屈服准则——密席斯屈服准则。1923年汉基 (H. Hencky) 和普朗特 (L. Prandtl) 论述了平面塑性应变中滑移线的几何性质。1930年，劳斯 (A. Reuss) 依照普朗特 1924 年的观点提出了考虑弹性应变增量的应力应变关系式。到四十年代以后，塑性理论则在很多国家中相继得到发展。

较早将塑性理论用于金属加工的是德国的卡尔曼 (Von Karman)，他在 1925 年用初等方法分析了轧制时的应力分布，其后不久，萨克斯 (G. Sachs) 和齐别尔 (E. Siebel) 在研究拉丝过程中提出了相似的求解方法——切块法 (slab method)，即后来所称的主应力法。五十年代中，苏联学者翁克索夫 (Унксов) 提出了一个实质上与主应力法相似的方法——近似平衡方程和近似塑性条件的联解法，并对镦粗时接触表面上的摩擦力分布提出了新见解。

近二十年来，应用滑移线理论来解金属塑性成形问题的数量逐渐增多。现在，滑移线方

法除应用于解各向同性无硬化材料的塑性平面应变问题外，人们也力图应用于求解平面应力问题、轴对称问题，及各向异性材料方面的问题。英国学者希尔 (R. Hill) 1950 年所著的“数学塑性理论”反映了这方面的成就。

五十年代，英国学者约翰逊 (W. Johnson) 和日本学者库岛 (H. Kudo) 等人，根据极值原理提出了一个较滑移线法为简单的求极限载荷的上限方法。利用这个方法计算出的塑性成形时的载荷，一般总比真实载荷为高，因此这方法就称上限法。由于这个方法比较简单，同时上限解在工程上说来比较安全，所以近年来研究的比较多。

五十年代，美国学者汤姆生 (E. G. Thomsen) 等提出了一个由实验结果和理论分析相结合的方法——视塑性法 (visioplasticity)。利用这个方法，可以根据实验求得的速度场来确定变形体内的应力场和应变场。这个方法由于有实验数据作基础，因此求得的结果可以更符合实际。

求变形体内各点的应力、应变、位移、速度等是一项繁重的计算工作，近年来已将计算机技术应用到金属塑性成形问题的解题中去，这样就使一些问题的求解，例如作滑移线场等大为简单。依靠计算机技术，近年来已开始用有限元方法来分析金属塑性成形方面的问题。

金属塑性变形的物理和物理化学方面所研究的内容，主要属于金属学和金属物理范畴。金属塑性成形原理从中吸取了有关金属塑性变形的理论，并按本学科的要求加以应用和发展。因此，在这方面说来，金属学及金属物理的发展水平对金属塑性理论的发展有很大的影响。

金属塑性变形物理方面的突出成就是本世纪三十年代位错理论的提出。位错是晶体中存在的一种线缺陷，它在剪应力作用下容易滑动，并由此引起塑性变形。位错理论可以用来解释金属塑性变形中的各种现象，如滑移、孪晶、硬化、断裂、回复、再结晶等，使人们对金属塑性变形的机理获得了科学的认识。此外，在塑性成形理论中，物理方面的主要内容是从宏观角度研究金属的塑性和变形抗力，以确定最好的加工条件。近十年来，人们发现了提高塑性降低抗力的另一途径，这就是利用金属的超塑性来进行塑性成形加工。金属在超塑性状态下，有超出常规状态下百十倍的塑性。现在已成功地用来制造一些形状特别复杂的零件，如喷气发动机的涡轮盘、叶片等。

塑性变形的物理化学方向是研究金属组成、相态与塑性变形之间的关系。研究变形金属与模具的表面状态、接触面之间的摩擦和摩擦机理以及对塑性变形过程的影响等问题。

苏联学者古勃金 (С. И. Губкин) 所著“金属塑性变形” (1960年出版) 一书对金属塑性成形的物理和物理化学方面的行为作了较详细的探讨。

上述三个方面奠定了塑性成形理论的基础，所以这三个方面对塑性成形理论来说都是不可缺少的重要方面。

本章参考文献：〔8〕〔35〕〔36〕〔58〕

第二章 应力分析

通过材料力学的学习，我们已经熟悉了应力的概念。在材料力学中，为了求得物体内的应力，常常采用切面法，即假想把物体切开，在一定的假设条件下，直接利用内力和外力的平衡条件求得切面上的应力分布。本书中则采用另一种方法，就是假想把物体切成无数个极其微小的六面体(在物体边界上也可以是四面体或五面体)，叫做单元体或微元体。一个单元体可代表物体的一个质点。根据单元体的平衡条件写出平衡微分方程，然后考虑其他必要的条件设法求解。这种方法也是一般连续体力学的通用方法。

为了上述目的，首先需要研究两个问题：第一，上述方法是以物体的质点(单元体)为隔离体的，质点在各个方向上都受到应力的作用，这时显然不能仅仅以某一方向的应力来说明质点的受力情况，于是就需要引入一个能够完整地表示出质点受力情况的物理量，这就是“点应力状态”，它是一个要用九个分量表示的张量(参看附录)，叫做应力张量。本章的重点之一就是研究点应力状态，即应力张量的各种性质。第二，就是要推导出质点的平衡微分方程，这是本章的另一重点。

§ 2-1 外力和应力

物体所承受的外力可以分成两类，一类是作用在物体表面上的力，叫做面力或接触力，它可以是集中力，但更一般的是分布力；第二类是作用在物体每个质点上的力，例如重力、磁力以及惯性力等等，叫做体力。塑性成形时，除了高速锻造、爆炸成形、磁力成形等少数情况外，体力相对面力而言是很小的，可以忽略不计。因此，一般都假定面力是静力平衡力系。

在外力作用下，物体各质点之间就会产生相互作用的力，叫做内力。单位面积上的内力叫做应力。图 2-1 表示一物体受外力系 P_1, P_2, \dots 的作用而处于平衡状态。设物体内有任意一点 Q ，过 Q 作一法线为 N 的平面 A ，将物体切开而移去上半部。这时 A 面即可看成是下半部的外表面， A 面上作用的内力应该与下半部其余的外力保持平衡。这样，内力的问题就可以当成外力来处理。

在 A 面上围绕 Q 点取一很小的面积 ΔF ，设该面积上内力的合力为 ΔP ，则定义

$$S = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F} = \frac{dP}{dF}$$

为 A 面上 Q 点的全应力。全应力 S 可以分解成两个分量，一个垂直于 A 面，叫做正应力，一般用 σ 表示；另一个平行于 A 面，叫做剪应力，用 τ 表示。这时，面积 dF 可叫做 Q 点在 N 方向的微分面， S 、 σ 及 τ 则分别称为 Q 点在 N 方向微分面上的全应力、正应力及剪应力。

通过 Q 点可以作无限多的切面。在不同方向的切面上， Q 点的应力显然是不同的。现以单向均匀拉伸为例(图 2-2)进行分析。设一断面积为 F_0 的匀截面棒料承受拉力 P ，通过棒

料内一点 Q 作一切面 A ，其法线 N 与拉伸轴成 θ 角，将棒料切开而移去上半部。由于是均匀拉伸，故 A 面上的应力是均布的。设 Q 点在 A 面上的全应力为 S ，则 S 的方向一定平行于拉伸轴，而大小则为

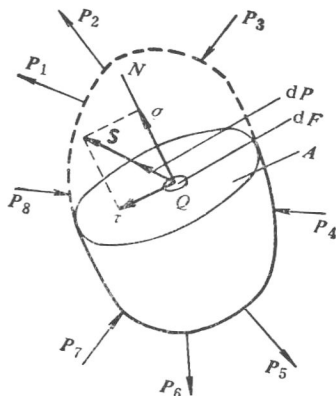


图2-1 面力、内力 and 应力

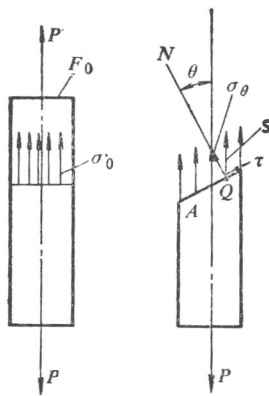


图2-2 单向均匀拉伸时的应力

$$S = \frac{P}{\cos\theta} = \frac{P}{F_0} \cos\theta = \sigma_0 \cos\theta \quad (2-1)$$

式中 σ_0 即为垂直于拉伸轴的切面上的正应力。全应力 S 的正应力分量及剪应力分量可用下式求得：

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= S \cos\theta = \sigma_0 \cos^2\theta \\ \tau &= S \sin\theta = \frac{1}{2} \sigma_0 \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

在上述这种简单拉伸的情况下，只要知道 Q 点任意一个切面上的应力，就可以通过式(2-2)求得其他切面上的应力。但是，在多向受力的情况下，显然不能由一点任意切面上的应力求得该点其他方向切面上的应力。也就是说，仅仅用某一方向切面上的应力并不足以全面地表示出一点所受应力的情况。为了全面地表示一点的受力情况，就需引入“点应力状态”的概念。

§ 2-2 直角坐标系中一点的应力状态

一、应力分量及应力张量

设在直角坐标系中有一承受任意力系的物体，物体内有一任意点 Q ，围绕 Q 切取一矩形六面体作为单元体，其棱边分别平行于三根坐标轴。取六面体中三个相互垂直的表面作为微分面，如果这三个微分面上的应力为已知，则该单元体任意方向上的应力都可以通过静力平衡求得（见§ 2-2二）。这就是说，可以用质点在三个相互垂直的微分面上的应力来完整地描述该质点的应力状态。

上述三个微分面上的应力都可以按坐标轴的方向分成三个分量。由于每个微分面都与一座标轴垂直而与另两座标轴平行，故三个应力分量中必有一个是正应力分量，另两个则是剪应力分量。三个微分面共有九个分量。因此一般情况下，一点的应力状态应该用九个应力分

量来描述,如图 2-3 所示。

为了清楚地表示出各个微分面上的应力分量,三个微分面都可用各自的法线方向命名,例如图 2-3 中 $ABCD$ 面叫 x 面, $CDEF$ 面叫 y 面等。每个应力分量的符号都带有两个下角标。第一个角标表示该应力分量的作用面,第二个角标则表示它的作用方向。很明显,两个下角标相同的是正应力分量,例如 σ_{xx} 即表示 x 面上平行于 x 轴的正应力分量,一般简写为 σ_x ; 两个下角标不同的是剪应力分量,例如 τ_{xy} 即表示 x 面上平行于 y 轴的剪应力分量。为了清楚起见,可将九个分量表示如下:

σ_{xx}	τ_{xy}	τ_{xz}	——作用在 x 面上
τ_{yx}	σ_{yy}	τ_{yz}	——作用在 y 面上
τ_{zx}	τ_{zy}	σ_{zz}	——作用在 z 面上
			——作用方向为 z
			——作用方向为 y
			——作用方向为 x

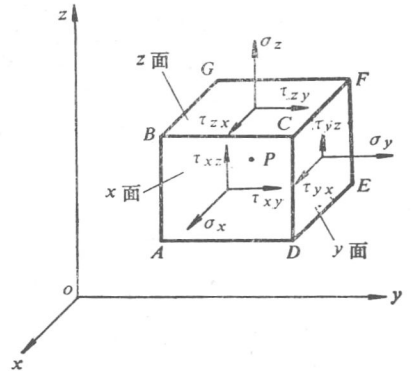


图 2-3 单元体上的应力分量

应力分量的正、负号按以下方法确定:在单元体上,外法线指向坐标轴正向的微分面(图 2-3 中的前、右、上三个面)叫做正面,反之称为负面。在正面上,指向坐标轴正向的应力分量取正号,指向负向的取负号。负面上的应力分量则相反,指向坐标轴负向的为正,反之为负。按此规定,正应力分量以拉为正,以压为负,图 2-3 中画出的剪应力分量都是正的。

由于单元体处于静力平衡状态,故绕单元体各轴的合力矩必须等于零,由此可以导出(见 § 2-3) 以下关系:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (2-3)$$

式(2-3)叫做剪应力互等定律。它表明,为了保持单元体的平衡,剪应力总是成对出现的。由此,为了表示一点的应力状态,实际上只需要六个应力分量。

对于同一个 Q 点,如果选取的坐标轴方向不同,那么,虽然该点的应力状态没有改变,但用来表示该点应力状态的九个应力分量就会有不同的数值。但是,这些不同坐标的应力分量之间可以用一定的线性关系式来换算,所以点的应力状态是一个二阶张量(参看附录),叫做应力张量,可以用符号 σ_{ij} ($i, j = x, y, z$) 表示。使角标 i, j 分别依次等于 x, y, z , 即可得到九个分量。例如 $i = x, j = x$, 可得 σ_{xx} , 也即 σ_x ; 如 $i = x, j = y$, 则得 σ_{xy} , 也即 τ_{xy} 。于是应力张量可以表示成矩阵的形式

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

根据式(2-3)所示的剪应力互等定律,我们可以发现式(2-4)中矩阵主对角线 $\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z$ 的两边是对称的,这样的张量叫对称张量,它有许多独特的性质,下面将进行详细的分析。上述 σ_{ij} 这种类型的符号叫角标符号,它可使书写大为简化,其使用规则可参看附录。

二、质点在任意切面上的应力

取质点 Q (单元体) 与 $oxyz$ 坐标系中的原点重合。设此单元体的应力分量为 σ_{ij} 。现有

一任意方向的斜切微分面 ABC 把单元体切成一个四面体 $QABC$ (图 2-4), 则该微分面上的应力就是质点在任意切面上的应力, 它可通过四面体 $QABC$ 的静力平衡求得。设 ABC 微分面的法线为 N , N 的方向余弦为 l 、 m 、 n (或 l_x 、 l_y 、 l_z)

$$l = \cos(x, N); \quad m = \cos(y, N);$$

$$n = \cos(z, N)$$

用角标符号可简记为

$$l_i = \cos(x_i, N) \quad (i = x, y, z)$$

设微分面 ABC 的面积为 dF , 微分面 QBC (即 x 面)、 QCA (即 y 面)、 QAB (即 z 面) 的面积分别为 dF_x 、 dF_y 及 dF_z , 则

$$dF_x = l dF \quad dF_y = m dF \quad dF_z = n dF$$

设 ABC 面上的全应力为 S , 它在三个坐标

轴方向的分量为 S_x 、 S_y 、 S_z 。由静力平衡条件 $\Sigma P_x = 0$, 将有

$$\Sigma P_x = S_x dF - \sigma_x l dF - \tau_{yx} m dF - \tau_{zx} n dF = 0$$

可得

同理可得

$$\left. \begin{aligned} S_x &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ S_y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ S_z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

或记为

$$S_i = \sigma_{ji} l_j \quad (2-5a)$$

于是, 斜切微分面 ABC 上的全应力为

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = S_i S_i$$

通过全应力 S 及其分量 S_i , 即可方便地求得斜切微分面上的正应力和剪应力。正应力 σ 就是 S 在法线 N 上的投影, 也就等于 S_i 在法线 N 上的投影之和, 即

$$\sigma = S_x l + S_y m + S_z n$$

将式 (2-5) 代入上式, 整理后可得

$$\sigma = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2(\tau_{xy} l m + \tau_{yz} m n + \tau_{zx} n l) \quad (2-6)$$

由于

$$S^2 = \sigma^2 + \tau^2$$

所以, 斜切微分面上的剪应力为

$$\tau^2 = S^2 - \sigma^2 \quad (2-7)$$

这也就证明了: 如质点在三个相互垂直切面上的应力为已知, 则该点在任意方向切面上的应力均可求得。

如果质点处在物体的边界上, 斜切微分面 ABC 就是物体的外表面, 则该面上作用的就是外力 T_i ($i = x, y, z$)。这时, 式 (2-5) 所表示的平衡关系仍应成立。因此, 用 T_i 代替式 (2-5a) 中的 S_i , 并考虑到 $\sigma_{ii} = \sigma_{ii}$, 即可得到

$$T_i = \sigma_{ij} l_j \quad (2-8)$$

这就是应力边界条件的表达式。

三、主应力和应力不变量

由公式 (2-6)、(2-7) 可知, 如果点应力状态的应力分量已经确定, 那末微分面 ABC 上的正应力 σ 及剪应力 τ 都将随法线 N 的方向、也即随 l 、 m 、 n 的数值而变。假如 N 在某

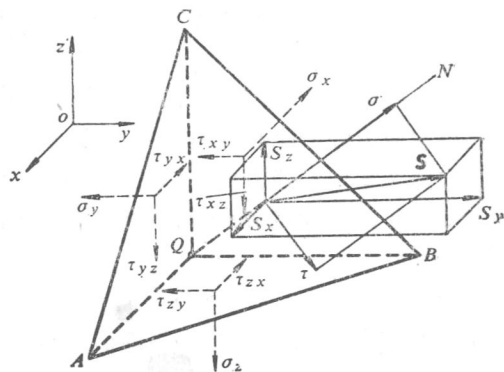


图2-4 斜切微分面上的应力

一方向时, 微分面上的 $\tau = 0$, 这样的特殊微分面就叫做主平面, 面上作用的正应力即称为主应力 (其数值有时也可能为零), 主平面的法线方向则称为应力主方向或应力主轴。

对于任意一点的应力状态, 一定存在相互垂直的三个主方向、三个主平面和三个主应力。这是应力张量的一个重要特性。若选取三个相互垂直的主方向作为座标轴, 那么应力张量的六个剪应力分量都将为零, 可使问题大为简化。

三个主应力和三个相互垂直的主方向都可以由任意坐标系的应力分量求得。为此, 我们可以假定图 2-4 中法线方向余弦为 l 、 m 、 n 的斜切微分面 ABC 正好就是主平面, 面上的剪应力 $\tau = 0$, 由式 (2-7) 可得 $\sigma = S$, 于是主应力 σ 在三个座标轴方向上的投影也就是 S_x 、 S_y 及 S_z , 即

$$S_x = l\sigma; \quad S_y = m\sigma; \quad S_z = n\sigma$$

将上列的 S_i 值代入式 (2-5), 整理后可得

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n &= 0 \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy}n &= 0 \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-9)$$

上式是以 l 、 m 、 n 为未知数的齐次线性方程组。此方程组的一组解是 $l = m = n = 0$ 。但由解析几何可知, 方向余弦之间必须保持

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (2-10)$$

它们不能同时为零, 所以必须寻求非零解。齐次线性方程组 (2-9) 存在非零解的条件是方程组的系数所组成的行列式等于零, 即

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0$$

将行列式展开, 整理后可得

$$\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + [\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]\sigma - [\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - (\sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{zx}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2)] = 0$$

设:

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ J_2 &= -(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \\ J_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - (\sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{zx}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2) \end{aligned} \right\} \quad (2-11)$$

于是上式即可写成

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 - J_2\sigma - J_3 = 0 \quad (2-12)$$

这是一个以 σ 为未知数的三次方程式, 叫做应力状态的特征方程, 它必然有三个实根 (证明方法参看附录), 也就是三个主应力, 一般用 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 表示。将解得的每一个主应力代入式 (2-9) 并与式 (2-10) 联解, 即可得到该主应力的方向余弦, 这样就可以得到三个相互垂直的主方向。

对于一个确定的应力状态, 只能有一组 (三个) 主应力的数值, 因此, 特征方程式 (2-12) 的系数 J_1 、 J_2 及 J_3 应该是单值的, 不随座标而变。于是可以得出如下的重要结论: 尽管应力张量的各分量随座标而变, 但按式 (2-11) 的形式组合起来的函数的值是不变的。因此我们把 J_1 、 J_2 及 J_3 分别称为应力张量的第一、第二和第三不变量。存在不变量也是张量的特性。

如果取三个主方向为座标轴，则一般用 1、2、3 代替 x 、 y 、 z ，这时应力张量为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (2-4 a)$$

将上式中的各分量代入式 (2-6)、(2-7)，即可得到主轴坐标系中斜切面上的正应力和剪应力公式

$$\sigma = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \quad (2-6 a)$$

$$\begin{aligned} \tau^2 &= S^2 - \sigma^2 \\ &= \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2 \end{aligned} \quad (2-7 a)$$

这时，三个应力不变量为

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ J_2 &= -(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \\ J_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned} \quad (2-11 a)$$

通过主轴坐标系，我们还可以把点应力状态用几何图形形象化地表示出来。将主轴坐标系的应力分量 (式 2-4 a) 代入式 (2-5)，可求得任意斜切面上全应力的三个分量 S_1 、 S_2 及 S_3 ：

$$S_1 = \sigma_1 l \quad S_2 = \sigma_2 m \quad S_3 = \sigma_3 n$$

或

$$l = \frac{S_1}{\sigma_1} \quad m = \frac{S_2}{\sigma_2} \quad n = \frac{S_3}{\sigma_3}$$

考虑到

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

于是可得

$$\frac{S_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{S_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{S_3^2}{\sigma_3^2} = 1 \quad (2-13)$$

对于一点的应力状态，主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 是确定的，因此上式表示一个椭球面，叫做应力椭球面，它就是点应力状态任意斜切面全应力矢量 S 端点的轨迹 (图 2-5)，其主半轴的长度分别等于 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 。还可以看到，三个主应力中的最大者和最小者也就是一点所有方向的应力中的最大者和最小者。

人们还常常根据三个主应力的特点来区分各种应力状态。在三个主应力中，如有两个为零，就叫单向应力状态，例如单向拉伸就是这种状态；如有一个主应力为零，就叫两向应力状态，例如材料力学中讨论过的弯曲、扭转等就是这种状态，塑性成形中的多数板料成形工序也可看成是两向应力状态；如三个主应力都不为零，就叫三向应力状态，在锻造、轧钢等工艺中，大多是这种状态。另外，如果在三个主应力中有两个相等，例如 $\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3$ ，则可叫圆柱形应力状态，单向应力时， $\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ，所以也属于这种状态。在这种状态下，与 σ_1 轴垂直

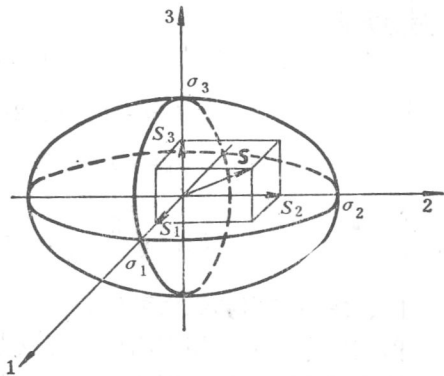


图2-5 应力椭球面