中国科学院考研指定参考书

中国科学技术大学数学教学丛书

微积分学习辅导

陈效群　陈秋桂　顾新身　编

科学出版社
www.sciencep.com

微积分学习辅导

中国科学技术大学数学教学丛书

微积分学习辅导

陈效群　陈秋桂　顾新身 编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书为《中国科学技术大学数学教学丛书》之一，是与本套丛书中的《微积分》(上、下) 相匹配的学习辅导书，基本上按照其章节逐一对应编写. 每节包括学习要点、解题方法和例题分析三部分，通过对大量典型例题的分析和求解，揭示微积分的解题方法、解题规律和技巧.

本书可作为理工科院校本科生学习微积分的学习辅导书以及微积分习题课的参考书，也可作为考研的复习指南.

图书在版编目 (CIP) 数据

微积分学习辅导/陈效群等编. —北京：科学出版社，2004
(中国科学技术大学数学教学丛书)
ISBN 7-03-013422-2

Ⅰ. 微… Ⅱ. 陈… Ⅲ. 微积分 - 高等学校 - 教学参考资料 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 061379 号

责任编辑：杨 波 姚莉丽 / 责任校对：包志虹
责任印制：安春生 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2004 年 8 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2004 年 8 月第一次印刷 印张：31 3/4
印数：1—4 000 字数：625 000

定价：38.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　言

微积分是一门非常重要的基础课. 为了帮助广大学生学好微积分这门课程, 我们根据几十年的教学经验, 编写了这本与《微积分》(上、下) 配套的辅导书.

本书基本上按照《微积分》(上、下) 的章节逐一对应编写, 指出每节的学习要点、重点与难点以及有关的基本概念、基本理论和运算技巧, 不仅有大量的问题解答及富于启发性的典型例题分析, 而且还有一题多解的灵活性例题.

本书题目论证严谨, 着重思路分析, 有的还从正、反两方面进行论证, 通过对大量有代表性的典型例题的解证, 阐述了微积分的解题方法、解题规律及运算技巧. 这样, 有助于学生对微积分基本概念、基本理论的理解, 使各章节知识在头脑中形成知识网, 进而提高逻辑推理与解决问题的能力, 达到学好微积分的目的.

同时, 为了不影响读者的独立思考, 对《微积分》(上、下) 每章配置的习题, 绝大部分留给读者去完成.

本书参考了与原《高等数学导论》(中国科学技术大学出版社, 1995 年) 配套的学习辅导书, 并有较大修改, 使内容与系统更加完整.

由于我们的水平有限, 本书可能有不少问题和错误, 诚恳地希望得到读者的指正.

编　者

2004 年 4 月于合肥

目　　录

第 1 章　极限与连续

1.1　数 列 极 限

学习要点

一、数列收敛的概念

设有数列 $\{a_n\}$ 及定数 a, 若对任意给定的正数 ε, 总存在自然数 N, 使得当 $n > N$ 时,

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

成立, 则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 或称 a 是数列 $\{a_n\}$ 的极限, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 或 $a_n \to a\ (n \to \infty)$.

二、收敛数列的重要性质

1. 收敛数列有唯一的极限.

2. 收敛的数列一定有界.

3. 设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 收敛, 则有

i) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)\cdot(\lim\limits_{n\to\infty} b_n)$;

iii) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$;

iv) 若 $a_n \le b_n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

v) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, 则 $\exists$ 自然数 n_0, 使当 $n > n_0$ 时, $a_n < b_n$;

vi) $\{a_n\}$ 收敛于 a 的充要条件是 $\{a_n\}$ 的任一个子数列也收敛于 a.

三、判别数列收敛的方法

1. 利用数列收敛的定义;

2. 夹逼定理:

设 $a_n \le c_n \le b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$;

3. 单调有界数列一定收敛;

4. 柯西 (Cauchy) 收敛准则:

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是对任给的 $\varepsilon>0$, 存在自然数 N, 当 $n>N$ 时

$$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon,$$

对一切自然数 p 成立.

解题方法

一、利用定义证明数列收敛

这就是所谓的 "ε-N" 方法. 要证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 即要证 $\forall\varepsilon>0,\exists N$, 当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<\varepsilon$.

用定义证明极限存在, 有一先决条件, 即事先得知道极限的猜测值 a, 但通常只给定了数列 $\{a_n\}$, 对它的极限不得而知, 那么如何根据 a_n 的表达式, 求出极限 a 呢? 此问题一般来说比较困难, 没有统一的方法, 只能根据具体情况进行具体的分析和处理, 有利用初等变形化为已知极限的方法等, 更多的方法有赖于人们去创造和发现.

一般方法是

1. **求最小的 N** 通过解不等式 (作等价代换), 从 $|a_n-a|<\varepsilon$ 解出 n.

2. **放大法** 有时 $|a_n-a|<\varepsilon$ 比较复杂, 不便解出 n. 可考虑将 $|a_n-a|$ 简化、适当放大, 使之成为 n 的一个新的函数, 记为 $f(n)$. 通过解 $f(n)<\varepsilon$, 求出所需的自然数 N.

3. **分步法** 有时不对 n 作某些限制, 便无法进行简化、放大. 不妨假定 n 已足够大 $n>N_1$(N_1 是某个常数), 然后放大为 $f(n)$ 解不等式 $f(n)<\varepsilon$, 求出 $n>N(\varepsilon)$. 令 $N=\max(N_1,N(\varepsilon))$, 则 $n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<\varepsilon$.

二、利用极限的运算法则、夹逼定理以及已知的一些数列的极限

如

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0\,(a>0),\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\,(a>0),$$
$$\lim_{n\to\infty}q^n=0\,(|q|<1),\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

等.

三、利用 "单调有界数列必收敛" 的定理

四、利用数列的柯西收敛准则来判断数列的敛散性

例题分析

例 1 用 "ε-N" 方法证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$.

解题思路 $\forall\varepsilon>0$, 找 N. 由于 $\left|\dfrac{\sin n}{n}-0\right|=\left|\dfrac{\sin n}{n}\right|<\dfrac{1}{n}$, 当 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ 时, $|a_n-0|<\varepsilon$ 成立, N 从简单不等式 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ 中解出即可.

书写格式 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 当 $n>N$ 时有

$$\left|\frac{\sin n}{n}-0\right|\leq\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon.$$

由极限定义得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0.$$

注 1.1 1° $|a_n-a|$ 可以放大以便解出 n, 这是因为 $\forall\varepsilon>0$, 只要找到 N 即可, 这里的 N 不是唯一的.

2° 取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$ 使 $\forall\varepsilon>0$ 都适用, 主要是保证 N 是自然数 (因为当 $\varepsilon>1$ 时 $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]=0, \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1=1$). 所以一般也写作取自然数 $N>f(\varepsilon)$, 使 $n>N$ 时 $|a_n-a|<\varepsilon$.

3° 以下题解不再叙述, 而是直接用解题格式了.

例 2 用 "ε-N" 方法证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3n}{5n^2+4n+1}=\dfrac{2}{5}$.

证 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{2n^2+3n}{5n^2+4n+1}-\frac{2}{5}\right|=\left|\frac{7n-2}{5(5n^2+4n+1)}\right|<\frac{7n}{25n^2}=\frac{7}{25n}<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3}{5n^2+4n+1}=\frac{2}{5}.$$

例 3 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n\text{个}}=1$.

证 因为要 $|0.99\cdots9-1|=0.\underbrace{0\cdots0}_{n\text{个}}1=10^{-n}<\varepsilon$, 取 $n>\lg\dfrac{1}{\varepsilon}$, 所以 $\forall\varepsilon>0$, 取 N 为大于 $\lg\dfrac{1}{\varepsilon}$ 的自然数, 当 $n>N$ 时, 有

$$|0.99\cdots9-1|=10^{-n}<10^{-N}<10^{-\lg\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}0.99\cdots9=1$.

例 4 试用 ε–N 语言叙述: 数列 $\{a_n\}$ 不以 a 为极限及数列 $\{a_n\}$ 不是柯西列.

解 数列 $\{a_n\}$ 不以 a 为极限可叙述如下: 存在 $\varepsilon_0>0$, 使得对任意的自然数 N, 都存在 $n>N$, 满足 $|a_n-a|\geq\varepsilon_0$.

数列 $\{a_n\}$ 不是 Cauchy 列可叙述如下: 存在一个 $\varepsilon_0>0$, 使得对任意的自然数 N, 都至少存在一个 $n>N$ 及一个自然数 p, 满足 $|a_{n+p}-a_n|\geq\varepsilon_0$.

例 5 "对于任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$, 总存在整数 N, 当 $n>N$ 时恒有 $|x_n-a|\leq 2\varepsilon$" 是数列 $\{x_n\}$ 收敛到 a 的 (　　).

(A) 充分条件但非必要条件

(B) 必要条件但非充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既非充分条件, 又非必要条件

解 应选 (C). 先证条件的充分性. $\forall 2>\eta>0$, 取 $\varepsilon=\min\left(\dfrac{1}{3}\eta,\dfrac{\eta}{2}\right)$, 则 $\varepsilon\in(0,1)$. 由条件, 故 $\exists N$, 当 $n>N$ 时

$$|x_n-a|\leq 2\varepsilon<2\cdot\frac{\eta}{2}=\eta,$$

即

$$|x_n-a|<\eta.$$

由定义

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

再证条件的必要性. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\forall\varepsilon\in(0,1),\exists N_1$, 当 $n>N_1$ 时, 有 $|x_n-a|<\varepsilon$, 即

$$|x_n-a|<\varepsilon\leq 2\varepsilon$$

成立, 即所述条件又是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的必要条件.

通过本题, 应理解 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的实质是, 无论给定多么小的误差, 总存在某项数 N, 使得对位于 x_N 之后的一切项 x_n, 它与常数 a 之差的绝对值可以小到事先任意给定的无论多小的误差 ε.

例 6 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$, a 为任意实常数.

证 因为 a 是任意实常数, 一旦确定了 a 总存在自然数 N_1, 使得 $|a|\leq N_1$. 因而

$$\cdots<\frac{|a|}{N_1+2}<\frac{|a|}{N_1+1}<\frac{|a|}{N_1}\leq 1,$$

则 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\max\left\{N_1,\left[\frac{|a|^{N_1+1}}{\varepsilon}\right]+1\right\}$, 当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|=\frac{|a|^n}{n!}=\frac{|a|}{n}\cdot\frac{|a|}{n-1}\cdots\frac{|a|}{N_1+1}\cdot\frac{|a|}{N_1}\cdots\frac{|a|}{1}$$
$$\le\frac{|a|}{n}\cdot\frac{|a|}{N_1}\cdots\frac{|a|}{1}\le\frac{|a|^{N_1+1}}{n}<\frac{|a|^{N_1+1}}{N}<\varepsilon$$

成立, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$.

例 7 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a 的充分必要条件是它的奇数项及偶数项收敛于同一数 a, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}=a$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=a$.

证 $(\Rightarrow)$ $\forall\varepsilon>0$, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 故 $\exists N_1$, 当 $n>N_1$ 时, $|a_n-a|<\varepsilon$. 于是取 $N=\left[\frac{N_1}{2}\right]+1$, 当 $n>N$ 时, $2n>N_1, 2n+1>N_1$, 此时

$$|a_{2n+1}-a|<\varepsilon,\qquad |a_{2n}-a|<\varepsilon$$

同时成立. 所以

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=a,\quad \lim_{n\to\infty}a_{2n}=a.$$

$(\Leftarrow)$ 由已知条件, $\forall\varepsilon>0,\exists N_1>0$, 当 $n>N_1$ 时, $|a_{2n}-a|<\varepsilon$, 又 $\exists N_2>0$, 当 $n>N_2$ 时, $|a_{2n+1}-a|<\varepsilon$. 于是令 $N=\max\{2N_1,2N_2+1\}$, 则 $n>N$ 时, 恒有 $|a_n-a|<\varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

注 1.2 此题的结论今后常用到, 要记住.

例 8 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$. 但反之不一定成立. 试举例说明之. 但若 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 试证之.

证 由不等式 $\big||a_n|-|a|\big|\le|a_n-a|$, 易知若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists N$, 当 $n>N$ 时 $|a_n-a|<\varepsilon$, 所以 $\big||a_n|-|a|\big|\le|a_n-a|<\varepsilon$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$.

反例: 取 $a_n=(-1)^{n-1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=1$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在. 又因为 $|a_n-0|=|a_n|=\big||a_n|-0\big|$, 所以当 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$ 时, 一定有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

例 9 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}e^{a_n}=1$.

证 要证 $\lim\limits_{n\to\infty}e^{a_n}=1$, 只要 $\forall\varepsilon>0$, 找 N, 使当 $n>N$ 时有 $|e^{a_n}-1|<\varepsilon$, 即

$$1-\varepsilon<e^{a_n}<1+\varepsilon.$$

不妨设 $0<\varepsilon<1$ (否则 $\forall\varepsilon>1$, 取 $\varepsilon_1>0$ 使 $\varepsilon_1<1$, 且 $\varepsilon_1<\varepsilon$, 当 $|e^{a_n}-1|<\varepsilon_1$ 时, 自然有 $|e^{a_n}-1|<\varepsilon$). 于是只要

$$\ln(1-\varepsilon)<a_n<\ln(1+\varepsilon). \tag{1}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 故对 $\varepsilon_2 = \min\{|\ln(1-\varepsilon)|, \ln(1+\varepsilon)\}$, 存在自然数 N, 当 $n > N$ 时, $|a_n| < \varepsilon_2$, $-\varepsilon_2 < a_n < \varepsilon_2$ 就满足上述不等式 (1). 反推上去就有 $\lim\limits_{n\to\infty} e^{a_n} = 1$.

注 1.3　本题顺序叙述如下.

$\forall\, 0 < \varepsilon < 1$, 取 $\varepsilon_2 = \min\{-\ln(1-\varepsilon), \ln(1+\varepsilon)\}$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 知, 存在 N, 当 $n > N$ 时, $|a_n| < \varepsilon_2$, 即

$$\ln(1-\varepsilon) \leq -\varepsilon_2 < a_n < \varepsilon_2 \leq \ln(1+\varepsilon).$$

于是

$$1-\varepsilon < e^{a_n} < 1+\varepsilon,$$

即

$$|e^{a_n} - 1| < \varepsilon.$$

由此立即得 $\lim\limits_{n\to\infty} e^{a_n} = 1$.

例 10　证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 且 $a > 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$, 其中 k 为正整数.

证　由于 k 为正整数. 当 $a_n > 0$ 时, 可利用等式

$$(\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a})(\sqrt[k]{a_n^{k-1}} + \sqrt[k]{a_n^{k-2}a} + \cdots + \sqrt[k]{a_n a^{k-2}} + \sqrt[k]{a^{n-1}}) = a_n - a.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 而 $a > 0$, 由收敛数列的性质, 存在自然数 N_1, 当 $n > N_1$ 时 $a_n > 0$, 从而

$$\sqrt[k]{a_k^{k-1}} + \sqrt[k]{a_n^{k-2}a} + \cdots + \sqrt[k]{a_n a^{k-2}} + \sqrt[k]{a^{k-1}} > \sqrt[k]{a^{k-1}} > 0.$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 自然数 N_2, 当 $n > N_2$ 时, $|a_n - a| < \sqrt[k]{a^{k-1}}\varepsilon$. 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时

$$\begin{aligned}|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a}| &= \frac{|a_n - a|}{\sqrt[k]{a_n^{k-1}} + \sqrt[k]{a_k^{k-2}a} + \cdots + \sqrt[k]{a_n a^{k-2}} + \sqrt[k]{a^{k-1}}} \\ &< \frac{\sqrt[k]{a^{k-1}}\varepsilon}{\sqrt[k]{a^{k-1}}} = \varepsilon.\end{aligned}$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$.

例 11　证明下列极限.

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$.

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \dfrac{a}{2}$.

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 且 $a_n > 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = a$.

(4) 已知 $\left\{S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right\}$ 收敛, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k=0$.

证 (1) $\forall\varepsilon>0$, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 故 $\exists N_1$, 当 $n>N_1$ 时, $|a_n-a|<\varepsilon/2$. 固定 N_1, 记 $M=|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|$ 为常数, 因此, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{M}{n}=0$. 于是 $\exists N_2$, 当 $n>N_2$ 时, $\dfrac{M}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 当 $n>N$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|\\
=&\frac{|a_1-a+a_2-a+\cdots+a_{N_1}-a+a_{N_1+1}-a+\cdots+a_n-a|}{n}\\
\leq&\frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}+\frac{|a_{N_1+1}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}\\
<&\frac{M}{n}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}
$$

即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$$

注 1.4 此题的结论对许多极限题都有指导作用, 其证明方法也是常用的, 掌握此方法是很有用的. 下面两个例题都用了此题的结论.

(2) **方法 1** (利用上题结论)

设 $b_1=a_1, b_2=b_3=a_2, b_4=b_5=b_6=a_3,\cdots,b_{\frac{n(n-1)}{2}+1}=\cdots=b_{\frac{n(n+1)}{2}}=a_n,\cdots$, 得一新数列 $\{b_n\}$, 易证 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. 由上题结果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{\frac{n(n+1)}{2}}}{\dfrac{n(n+1)}{2}}=\lim_{n\to\infty}b_n=a,$$

而

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}&=\lim_{n\to\infty}\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{\frac{n(n+1)}{2}}}{\dfrac{n(n+1)}{2}}\cdot\frac{n(n+1)}{2n^2}\\
&=a\cdot\frac{1}{2}=\frac{a}{2}.
\end{aligned}
$$

方法 2 (ε-N 法)

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 故 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1$, 当 $n>N_1$ 时, $|a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{3}$, 固定 N_1, 记 $M=|a_1-a|+\cdots+N_1|a_{N_1}-a|$, 则 M 是一个常数, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{M}{n^2}=0$. 同时, 又有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a|}{n}=0$, 所以 $\exists N_2$, 当 $n>N_2$ 时, $\dfrac{M}{n^2}<\dfrac{\varepsilon}{3}$, $\dfrac{|a|}{n}<\dfrac{\varepsilon}{3}$ 成立. 取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,

当 $n > N$ 时, 就有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}-\frac{a}{2}\right| \\
=&\frac{\left|a_1+2a_2+\cdots+na_n-\dfrac{n^2}{2}a\right|}{n^2} \\
=&\left|\frac{(a_1-a)+2(a_2-a)+\cdots+N_1(a_{N_1}-a)}{n^2}\right. \\
&\left.+\frac{(N_1+1)(a_{N_1+1}-a)+\cdots+n(a_n-a)+\dfrac{n}{2}a}{n^2}\right| \\
\leq&\frac{|a_1-a|+2|a_2-a|+\cdots+N_1|a_{N_1}-a|}{n^2}+\frac{(N_1+1)|a_{N_1+1}-a|+\cdots+n|a_n-a|}{n^2}+\frac{|a|}{2n} \\
<&\frac{M}{n^2}+\frac{(N_1+1)+\cdots+n}{n^2}\cdot\frac{\varepsilon}{3}+\frac{|a|}{2n} \\
<&\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\frac{a}{2}.$$

(3) 因为 $a_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $a \geq 0$. 下面分情况讨论.

i) $a = 0$. 由不等式

$$0 < \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

及前面例题的结论

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}a_n=a=0,$$

立即有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=0=a.$$

ii) $a > 0$. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a}$. 再由不等式

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1\cdots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$