科学版

大学数学学习指导系列

线性代数与空间解析几何

学习指导

——典型例题精解

俞正光 何坚勇 王飞燕 编

- 联系紧密的基础知识
- 灵活多样的解题技巧
- 复习总结的理想读物
- 全面系统的考研辅导

科学出版社
www.sciencep.com

大学数学学习指导系列

线性代数与空间解析几何学习指导

——典型例题精解

俞正光　何坚勇　王飞燕　编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是大学数学学习指导系列之一，包含了线性代数与空间解析几何中的主要内容。全书共分十一章，它们是行列式、矩阵、n维向量空间、线性方程组、空间解析几何、矩阵的特征值与特征向量、二次型、一元多项式、线性空间、线性变换和欧几里得空间等。本书精选了将近400道例题和400道练习题，选材注重突出课程的基本要求，力求做到解题简明，思路清晰，由易到难，从基本到综合，循序渐进。本书编写体例有内容精讲、典型例题、练习和提示与答案四部分。概述了每一章节的基本概念、基本定理和基本方法。在某些难以理解或容易出错的地方特别作出解释，指出各概念之间的联系。在大部分例题中，都有思路分析、解题过程、小结以及注解等，有的题还提供了每一节后面都安排了适量的习题，读者可以通过练习进一步巩固所学到的知识，掌握各种题型的解题技巧。

本书是学习线性代数课程的辅导教材，可作为高等院校在校学生、电大、高教自考等学员学习线性代数的参考书，也可供报考研究生的读者复习参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与空间解析几何学习指导：典型例题精解/俞正光，何坚勇，王飞燕编. —北京：科学出版社，2003.5

(大学数学学习指导系列)

ISBN 7-03-011347-0

Ⅰ.线… Ⅱ.①俞…②何…③王… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教学参考资料②立体几何：解析几何-高等学校-教学参考资料

Ⅳ.①O151.2②O182.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第023536号

责任编辑：陈玉琢　吕　虹/责任校对：曹锐军

责任印制：安春生/封面设计：黄华斌　陈　敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2003年5第　一　版　开本：B5(720×1000)

2003年5月第一次印刷　印张：35 1/2

印数：1—3 000　字数：682 000

定价：46.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉)

序

数学是大学理工、农医、经济、管理等各专业的非常重要的基础理论课程，学好数学是每一个大学生的强烈愿望，然而刚入大学的一年级新生面对大学数学中诸多抽象概念和方法，往往无所适从，望题生畏。最主要的表现就是不会做题，拿到一道题不能独立地形成解题的思路。为了帮助初学者很快适应大学数学学习的规律，掌握好大学数学的基本概念和基本方法，我们策划了这套由清华大学数学系的主讲教授编写的适合大学非数学类专业的数学辅导丛书，其中包括了大学数学中的三门核心课程：微积分（有的学校称为高等数学）、线性代数与空间解析几何以及概率论与数理统计。在每本书中，分别对各部分的基本内容进行综合与归纳；精选了数百道例题，分析解题思路、讲解如何运用基本原理和方法来解决问题。每章后面还附有相应的习题供大家练习，巩固所学的知识，以求取得举一反三的效果。

鉴于目前报考硕士研究生是很大一部分学子的愿望，其中包括应届毕业生和已经工作若干年的在职人员，在职人员虽然已经学过这些课程，但由于间隔多年，许多内容也需从头复习。我们在编写过程中，在讲解基本题的基础上，选择了相当数量的综合题，以满足这部分读者的需求。

总之，我们希望这套丛书的出版，对我们的读者掌握大学数学的基本思想和解题方法有所帮助，我们也衷心地欢迎读者对我们的丛书提出宝贵的意见，以便进一步改进我们的工作。

前　　言

线性代数是高等院校的一门重要的数学基础课程，也是许多专业研究生入学数学考试中的一个科目。许多学生在学习线性代数这门课时，常有这样的感触："书上的内容都能看懂，可是一拿到习题就不会做"，"计算步骤都明白，就是一算就错"。这些现象确实是学生学习线性代数课程时遇到的普遍问题。究其原因，我们认为是没有很好把握住本课程的内在特点。那么，线性代数的特点有哪些呢？概括起来以下几点是大家在学习中要特别注意的：概念多且概念之间的联系非常紧密；定理密集又有一定的抽象性；新的运算多且许多运算性质与数的运算性质相悖；无论是计算方法还是证明方法都灵活多样；演算虽然简单但是计算工作量大，易出错等等。尤其是概念之间的联系比较隐蔽，使初学者往往理不顺、吃不透，不易揭示与掌握这种紧密的关系，造成对概念理解不深，也就谈不上运用自如了。线性代数是以行列式、矩阵、向量等作为工具，研究线性方程组的解、线性空间和线性变换理论的一门课程。因此，行列式、矩阵、向量、线性方程组、特征值与特征向量、线性空间以及线性变换等概念之间必然有着紧密的联系。举例来说，与"n 阶矩阵 A 可逆"这个概念等价的命题就有十多个：n 阶矩阵 A 可逆$\Leftrightarrow A$ 的行列式的值不为 $0\Leftrightarrow A$ 满秩$\Leftrightarrow A$ 的列向量组线性无关$\Leftrightarrow A$ 的行向量组线性无关$\Leftrightarrow$以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=0$ 只有零解$\Leftrightarrow A$ 可以通过一系列初等行变换化作单位矩阵$\Leftrightarrow A$ 可分解为一系列初等矩阵的乘积$\Leftrightarrow A$ 的列向量可作为 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的一组基$\Leftrightarrow\mathbf{R}^n$ 中任意一个向量都可以由 A 的列向量线性表出$\Leftrightarrow$对任意 n 维向量 $\boldsymbol{b}$，方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 必有惟一解$\Leftrightarrow A$ 没有零特征值等等。这些等价命题原先是分散在各个章节中的，需要读者在学习过程中不断分析、归纳和总结。而这些命题往往是我们在求解或证明问题时产生思路与方法的依据。因此，如何能较好地掌握线性代数的基本概念之间的联系，较快地理解与掌握线性代数的特点与精髓，是每个期望学好线性代数的读者所必定要解决的问题。我们根据课程的基本要求结合多年教学实践的经验，编写了这本大学数学复习丛书，以期指导读者复习总结线性代数的基本概念、基本理论和基本方法，掌握各种概念之间的联系。在复习总结的基础上，帮助读者开拓思路，学会灵活运用概念掌握各种题型的解题方法与技巧，提高计算的准确性。从而能真正掌握线性代数的精髓。

本书包含了线性代数与空间解析几何中的主要内容，有行列式、矩阵、n

维向量空间、线性方程组、空间解析几何、矩阵的特征值与特征向量、二次型、一元多项式、线性空间、线性变换和欧几里得空间等章节，共选择了将近 400 道例题和 400 道练习题，选材注重突出课程的基本要求，力求解题简明，思路清晰，由易到难，从基本到综合，循序渐进。对于不同学时、不同专业要求的读者，可以只选择其中相应的部分内容。本书编写体例有[**内容精讲**]、[**典型例题**]、[**练习**]和[**提示与答案**]四部分。

[**内容精讲**]　概述每一章节的基本概念、基本定理和基本方法。在某些难以理解或容易出错的地方特别作出解释，指出各概念之间的联系。

[**典型例题**]　根据内容安排了典型例题。在大部分例题中，都有思路分析、解题过程、小结以及注解等，有的题还提供了一题多解，以帮助读者尽快掌握解题思路及解题方法，起到举一反三的作用。

[**练习**]　每一节后面都安排了适量的习题，读者可以通过练习进一步巩固所学到的知识，掌握各种题型的解题技巧。

[**提示与答案**]　给出练习中的答案，对于较难的题给出提示。

本书编写分工如下：第一、六、九、十各章由何坚勇编写，第二、三、四各章由王飞燕编写、第五、七、八及十一章由俞正光编写。在编写过程中，得到科学出版社编辑吕虹的大力支持和帮助，在此表示衷心感谢。

限于作者水平，其中错误之处在所难免，敬请读者不吝指正。

编者

2002 年 5 月于清华园

策划　俞正光　华　苏　吕　虹

微积分学习指导
——典型例题精解

编　华　苏　扈志明　莫　骄

线性代数与空间解析几何学习指导
——典型例题精解

编　俞正光　何坚勇　王飞燕

概率论与数理统计学习指导
——典型例题精解

编　葛余博　赵衡秀

目　　录

第一章　行 列 式

§1.1　行列式的定义

[内容精讲]

行列式是作为解线性方程组的工具引出的.我们在中学已经学过,对于二元一次及三元一次线性联立方程组,其解可以用两个二阶或三阶的行列式比值来表达:$x_j=\dfrac{D_j}{D}$.而二阶或三阶行列式是用沙路法来定义的:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

但是,如果用这种方法来定义高阶行列式(指大于等于四阶的行列式),则所得的行列式却不能用来表达相应线性方程组的解.说明沙路法并没有反映出行列式的本质.高阶行列式的本质定义要用“排列逆序”法来描述.

1. 排列、逆序与对换

由 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个自然数组成的一个有序数组 $j_1j_2\cdots j_n$,称为一个 n 级排列.显然,不同的 n 级排列共有 $n!$ 个.

在一个 n 级排列中,任取两个数 j_s,j_t,若大的数排在小的数前(如 $j_s>j_t$),则称这两个数 j_sj_t 组成一个逆序.在一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数,记作 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.一个排列的逆序数是偶数,称为偶排列;反之称为奇排列.

在一个 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n$ 中,交换任意两个数 j_s 与 j_t 的位置,我

们称为对排列作了一次对换.对换前后的排列其奇偶性正好相反.

2. n 阶行列式的定义

定义　n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

式中 $\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}$ 表示对所有 n 级排列求和.

对于此定义,初学者要抓住其中提供的三个信息:

(1) 行列式的展开式是一个多项式,n 阶行列式共有 $n!$ 项(因为 n 级排列的总数有 $n!$ 个).

(2) 每一项必是由处在不同行不同列的 n 个元素相乘构成的.

读者应掌握的是:保证这一点的是由一般项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中,每个元素的行指标(第一下标)是一个固定的 n 级自然排列:$123\cdots n$;而列指标(第二下标)是某一个 n 级排列:$j_1j_2\cdots j_n$.

(3) 每一项前所带的符号由构成这一项的 n 个元素的列指标所组成的排列的逆序数 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$所确定(当行指标为固定的自然排列时).

[典型例题]

例 1.1　求下列排列的逆序数及奇偶性:

(1) 25314　　(2) 364512

(3) $n(n-1)(n-2)\cdots21$　　(4) $(2n)1(2n-1)2(2n-2)3\cdots(n+1)n$

解　(1) 排列 25314 中, 21, 53, 51, 54, 31 都是逆序, 因此 $\tau(25314)=5$,是奇排列.

(2) 排列 364512 中,31,32,64,65,61,62,41,42,51,52 都是逆序,因此 $\tau(364512)=10$,是偶排列.

(3) 在排列 $n(n-1)(n-2)\cdots21$ 中,对第一个数 n 来说,后面比它小的数有 $n-1$ 个,对第二个数$(n-1)$来说,排在它后面比它小的数有$(n-2)$个,……,因此 $\tau(n(n-1)(n-2)\cdots21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0=\frac{n(n-1)}{2}$.当 n 为 $4k$ 或 $4k+1$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}$为偶数,故此时的排列为偶排列;

当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}$为奇数，此时的排列为奇排列.

注意 在求排列的逆序数时，我们也可用排列中每一个数与它前面的数来比，看是否组成逆序.如本排列中，第一个数 n 前面没有数，故能构成逆序的个数为 0；第二个数为 $(n-1)$，在它前面能与它构成逆序的个数为 1；第三个数 $(n-2)$，在它前面且能与它构成逆序的个数为 2；…，对第 n 个数 1 来说，在它前面且能与它构成逆序的个数为 $(n-1)$. 故 $\tau(n(n-1)\cdots21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n-1)}{2}$.

(4) 此排列为 $2n$ 级排列.为了便于找出规律，我们这样来计算逆序：数 1（第二个数）前面有 1 个数 $(2n)$ 比它大；数 2（第 4 个数）前面比它大的数有 2 个：$2n,2n-1$；数 3 前面有 3 个比它大的数：$2n,2n-1,2n-2$；…，数 n 前面有 n 个比它大的数：$2n,2n-1,\cdots,n+1$；而数 $(n+1)$ 前面有 $(n-1)$ 个比它大的数：$2n,2n-1,\cdots,n+2$；数 $(n+2)$ 前面有 $(n-2)$ 个比它大的数：$2n,2n-1,\cdots,n+3$；…；数 $2n$ 前比它大的数为 0. 因此有

$$\tau(2n1(2n-1)2\cdots(n+1)n)=[1+2+\cdots+n]+[(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0]=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=n^2.$$

故当 n 为奇数时为奇排列，n 为偶数时，为偶排列.

例 1.2 已知 $\tau(j_1j_2\cdots j_{n-1}j_n)=t$. 求 $\tau(j_nj_{n-1}\cdots j_2j_1)$.

解 一个排列的逆序数等于排列中每个数与其前面的（或后面的）数构成的逆序数之和.记原排列 $j_1j_2\cdots j_{n-1}j_n$ 为排列(1)、新排列 $j_nj_{n-1}\cdots j_2j_1$ 为排列(2).在排列(2)中，j_1 前面且比 j_1 大的个数设为 k_1，则在排列(1)中，在 j_1 后面比 j_1 大的个数也为 k_1，记 j_1 在排列(1)中与其后的数构成的逆序数为 k'_1. 下面推导 k'_1与 k_1 之间的关系：因为 k'_1是指排列(1)中，排在 j_1 后比 j_1 小的个数.而在 j_1 后总共有 $(n-1)$ 个数，因此必有

$$k_1=(n-1)-k'_1.$$

同理，在排列(2)中，记 j_2 前面比 j_2 大的个数为 k_2；记在排列(1)中，j_2 与其后的数构成的逆序数为 k'_2，即排列(1)中，在 j_2 后比 j_2 小的数有 k'_2个，而 j_2 后总共有 $(n-2)$ 个数，故有

$$k_2=(n-2)-k'_2.$$

依次类推，记在排列(2)中，j_{n-1} 前比 j_{n-1} 大的个数为 k_{n-1}，在排列(1)中；在

j_{n-1}之后比 j_{n-1}小的数为 k'_{n-1},则有

$$k_{n-1} = [n-(n-1)] - k'_{n-1}$$

又有

$$\begin{aligned}\tau(j_n j_{n-1}\cdots j_2 j_1) &= k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1}\\ &= [(n-1)-k'_1] + [(n-2)-k'_2] + \cdots + \{[n-(n-1)]-k'_{n-1}\}\\ &= (n-1)+(n-2)+\cdots+1-(k'_1+k'_2+\cdots+k'_{n-1})\\ &= \frac{n(n-1)}{2} - \tau(j_1 j_2 \cdots j_{n-1} j_n) = \frac{n(n-1)}{2} - t.\end{aligned}$$

小结　本题既要对逆序数的定义有深刻的理解,又要会灵活运用,找出排列(1)与排列(2)的逆序数之间的联系.

例 1.3　(1) 在 5 阶行列式中,问项 $a_{12}a_{24}a_{35}a_{41}a_{53}$前面应冠以什么符号?

(2) 写出在 5 阶行列式中,包含因子 a_{24},a_{31}与 a_{45}且冠以负号的项.

解　(1) 项 $a_{12}a_{24}a_{35}a_{41}a_{53}$中,行指标(第一下标)为自然顺序排列.此时列指标(第二下标)为 24513.而其逆序数 $\tau(24513)=5$,故该项应冠以负号.

(2) 由行列式的定义可知,5 阶行列式中每项是由处在不同行不同列的 5 个元素相乘构成的.因此包含 a_{24},a_{31},a_{45}因子的项只能是 $a_{12}a_{24}a_{31}a_{45}a_{53}$及 $a_{13}a_{24}a_{31}a_{45}a_{52}$.而它们的逆序数分别为 $\tau(24153)=4$,$\tau(34152)=5$.因此,所求之项应为 $-a_{13}a_{24}a_{31}a_{45}a_{52}$.

小结　在本题第(1)小题中,若问“项 $a_{24}a_{41}a_{12}a_{53}a_{35}$前应冠以什么符号?”可以有两种解法:(i)　将该项各因子的次序作适当的调整,使其行指标为自然顺序排列 $a_{12}a_{24}a_{35}a_{41}a_{53}$.如上所解.(ii) 将该项的行指标排列 24153 及列指标排列 41235 的逆序数分别求出 $\tau(24153)=4$,$\tau(41235)=3$.这两个逆序数之和($4+3=7$)的奇偶性与该项符号的奇偶性相同,即$(-1)^7=(-1)^5=-1$.

例 1.4　求函数 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & -1\\ 1 & x & 2 & 1\\ 1 & 2 & x & x\\ -1 & 3 & 2 & x\end{vmatrix}$中 x^3 项前的系数.

解　首先,我们要认识到行列式的展开式是一个多项式,其每一项的取值是由处在不同行不同列的 4 个元素乘积构成.由本行列式特点,可知其展开式应是 x 的一个多项式.包含 x^3 的项只能有一项:$a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{34}\cdot a_{43}=2x^3$.其所冠的符号为$(-1)^{\tau(1243)}=(-1)^1=-1$.故 x^3 前的系数为-2.

例 1.5 用定义计算下列行列式的值：

(1) 主对角线行列式.

(2) 上三角形行列式.

解 (1) 主对角线行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

在 D 中只有 n 个元素：$a_{11},a_{22},\cdots,a_{n-1,n-1},a_{nn}$ 不为零，而这 n 个元素恰好处在不同的行不同的列，因此这 n 个元素乘积是 D 中一项，该项前冠以符号为 $(-1)^{\tau(12\cdots n)}=1$. 而 D 的每一行中，除了主对角元素外全为零. 因此 D 中不为零的项只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$. 所以 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$.

(2) 上三角形行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

我们知道，D 中一般项应是 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$. $j_1j_2\cdots j_n$ 是某个 n 级排列，配上一个排列就是行列式中的一项. 因为在 D 中有许多元素为零. 我们只要考虑其值不为零的那些项. 考虑列指标 $j_1j_2\cdots j_n$ 时，若我们先考虑 j_1，则 j_1 取 $1,2,\cdots,n$ 时，其元素 a_{1j1} 都不为零，即 j_1 有 n 种可取的值，讨论不方便. 若我们先从 j_n 开始考虑：j_n 只有取 n 时，$a_{nj_n}=a_{nn}$ 不为零，只有一种取法. 而 j_{n-1} 可有 $n-1$ 及 n 两种取法，但在同一项中当 $j_n=n$ 时，j_{n-1} 不能再取 n 了，(请读者思考理由是什么?) 即 j_{n-1} 只能取 $n-1$. 故 $a_{n-1,j_n}=a_{n-1,n-1}$，同理 $a_{n-2,j_{n-2}}=a_{n-2,n-2},\cdots a_{2j_2}=a_{22},a_{1j_1}=a_{11}$. 故行列式的值不为零的只有一项：$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$，其前所冠的符号为 $(-1)^{\tau(12\cdots n)}=1$. 所以 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$.

小结 (1) 对于一个含有较多零元素的行列式,其值可用定义来求.这时,主要考虑的是那些不为零的项.可参见例 1.6.

(2) 主对角线行列式、上三角形行列式及下三角形行列式都是特殊的行列式,其值都等于主对角线元素的乘积.这个结论必须牢记.以后我们会看到,一般的行列式通过行列式性质化成这些特殊的行列式来计算,是行列式计算的重要方法之一.

例 1.6 用定义计算下列两个行列式:

$$(1)\ D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix};\ (2)\ D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

解 (1) 在该行列式中只有 n 个元素不为零,且处于不同行不同列.因此,该行列式不为零的项只有一项:$1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot n=n!$.而这 n 个数在行列式中所处的位置为 $a_{1,n-1},a_{2,n-2},\cdots,a_{n-1,1},a_{nn}$.即 $j_1=n-1,j_2=n-2,\cdots,j_{n-1}=1,j_n=n$,因此列指标排列的逆序为 $\tau(j_1j_2\cdots j_{n-1}j_n)=\tau[(n-1)(n-2)\cdots 21n]=1+2+\cdots+(n-2)=\frac{1}{2}(n-2)(n-1)$.

故

$$D=(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}n!.$$

(2) 根据该 4 阶行列式元素构成的特点,第一行只有一个非零元素 a_{11},当 a_{11} 取定后,第二行有两个非零元素可取:a_{22} 及 a_{23}.若第二行取定为 a_{22},则第三行两个非零元素 a_{32},a_{34} 中只能取 a_{34},不能再取 a_{32} 了(请读者思考为什么此时不能取 a_{32}),同理,第四行只能取 a_{43}.因此 $a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$ 为 D 中一项;若第二行取定为 a_{23},则第三行有 a_{32},a_{34} 两个非零元素.但若第三行取定为 a_{34},则第四行只能取 $a_{42}=0$.(请读者思考其理由是什么?)因此,当第二行取定为 a_{23} 时,第三行只有取 a_{32},第四行才可取 a_{44}.因此 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 也是该行列式中不为零的一项.它们前面所冠的符号分别为 $(-1)^{\tau(1243)}=(-1)^1=-1,(-1)^{\tau(1324)}=(-1)^1=-1$.故有

$$D=-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}.$$

小结 从以上几个例题中可看到:用定义计算含有很多零元素的行列式

的值时,经常要用到的一点是行列式中每一项是由处在不同行不同列的 n 个元素相乘构成的.这往往成为计算是否正确的关键.

例 1.7 用定义计算

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

解 因为行列式的一般项为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$,为了取出值不为零的元素,第三、四、五行可取的元素,其列指标分别为 $j_3=4,5;j_4=4,5;j_5=4,5$.虽然有 $j_1=1,2,3,4,5;j_2=1,2,3,4,5$.但这组数值不能构成一个其值不为零的 5 级排列.或反过来讲,为了能构成行列式中的一项,对于 $j_3=4,5;j_4=4,5;j_5=4,5$.当其中两行(如第三、四行)取不为零的元素时(如取 $a_{34}a_{45}$),则剩下的一行只能取零元素($j_5=1$ 或 2 或 3,即取 a_{51}或 a_{52}或 a_{53}).因此,本行列式没有不为零的项.故有 $D=0$.

[练习]

1.1 求下列排列的逆序数并确定奇偶性:

(1) 23514;　　(2) 43512;

(3) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$;

(4) $246\cdots(2n)(2n-1)\cdots31$.

1.2 在 5 阶行列式中,项 $a_{21}a_{33}a_{42}a_{55}a_{14}$ 与项 $a_{32}a_{41}a_{14}a_{53}a_{25}$ 前各应冠以什么符号?

1.3 下列 16 个元素均不相同的 4 阶行列式中项 $(-8)\cdot5\cdot2\cdot(-6)$ 前应冠以什么符号?

$$D_4=\begin{vmatrix} -1 & 6 & -8 & 4 \\ -3 & 7 & 1 & -6 \\ -4 & 2 & 3 & -5 \\ 5 & -7 & 9 & -2 \end{vmatrix}.$$

1.4　用定义计算下述3个行列式的值：

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

1.5　利用行列式的定义，计算4阶行列式：

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{34} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}.$$

1.6　已知 $D_4 = \begin{vmatrix} x & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$，问 $x = ?$.

1.7　用行列式定义计算

$$f(x) = \begin{vmatrix} 3x & -2x & 1 & 2 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -3 & 1 & x & -2 \\ 1 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

中 x^4 与 x^3 的系数.