

21

世纪高等院校教材

高等数学

(物理类)

上册

何柏庆 王晓华 编



科学出版社

www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材

高等数学

(物理类)

上册

何柏庆 王晓华 编

科学出版社

北京

2008013841

内 容 简 介

本教材是根据物理类高等数学教学大纲(200学时)编写,分为上、下两册出版.本书为上册,内容包括函数、极限、连续,导数与微分,微分学中值定理,微分学应用,不定积分,定积分和定积分的应用.本书总结了编者长期从事高等数学教学的经验,结构严谨、逻辑清晰、难点分散、例题丰富、通俗易懂.各章配有大量与工科相结合的例题和习题,便于教师教学和学生自学使用.

本书可供理工科大学物理类、电类专业的本科生使用,还可供从事高等数学教学的教师和科研工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:物理类.上册/何柏庆,王晓华编. —北京:科学出版社,2007
21世纪高等院校教材

ISBN 978-7-03-019291-2

I. 高… II. ①何… ②王… III. 高等数学:高等学校-教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 098159 号

责任编辑:赵 靖 杨 然 / 责任校对:曾 茹
责任印制:张克忠 / 封面设计:陈 敬

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双 青 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 7 月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2007 年 7 月第一次印刷 印张:41 1/4

印数:1—4 000 字数:781 000

定价:48.00 元(上、下册)

(如有印装质量问题,我社负责调换<环伟>)

1588108008

前 言

高等数学的内容包括一元函数微分学、一元函数积分学、空间解析几何学、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数论、常微分方程,以及作为理论基础的极限论.由于构成本课程的主体是一元及多元函数的微分学和积分学,所以有时也就把高等数学这门课程称为微积分学.

微积分学与中学里学过的初等数学有着本质的区别.初等数学研究的对象基本上是常量(即固定不变的量).例如,算术中研究固定不变的量的运算法则;代数学中解方程,所要求的未知数也是固定不变的,只不过具体数值事先不知道;几何学中研究的是一些固定的、规则的几何图形.而且初等数学所涉及的基本运算是常量之间的算术运算.因此,初等数学基本上是常量数学.

微积分学是一门以变量(函数)作为主要研究对象,以极限方法作为基本研究手段的数学学科.它有两个分支:用微观的观点,运用极限方法研究曲线的切线问题和各类变化率问题,进而就产生了微分学;用宏观的观点,运用极限方法研究曲边图形面积、曲面立体体积等这类涉及微量元素的无限积累的问题,进而就产生了积分学.而微积分学的理论基础是极限论,它从方法论上突出表现了微积分学不同于初等数学的特点.另外,以极限论为基础建立起来的无穷级数论,一直被认为是微积分学的一个不可缺少的部分,它的一个重要用处就是用来表示函数.与一元函数微积分学同时成长起来的(常)微分方程,正是数学科学联系实际的主要途径之一.总之,高等数学是变量数学.在数学的历史上,自从出现了解析几何学并继而产生了微积分学之后,便开始了变量数学的研究.正如恩格斯所指出的,“数学中的转折点是笛卡儿的变数.有了变数,运动进入了数学,有了变数,辩证法进入了数学,有了变数,微分学和积分学也就立刻成为必要的了……”

高等数学是大学工科院校的基础课,学好这门课相当重要.特别是对刚从中学毕业的同学们,由于对大学数学的学习方法还不太入门,因此,我们在教材的编写上,对一些概念分析比较深入,逻辑推导比较细致,例题也配备得较多,尽量便于阅读,以利于培养自学能力,同时也可以打好坚实的数学基础.

本教材分上、下两册.上册由何柏庆(第1~4章)和王晓华(第5~7章)编写;

下册由张国珉(第 8、9 章)、徐海燕(第 10 章)和肖瑞霞(第 11、12 章)编写. 各章都配备相当数量的习题,另有习题答案供参考. 在编写过程中,得到南京航空航天大学教材科和理学院领导及同仁们的帮助和指导,在此一并深表感谢.

本教材的书稿虽经小范围的多次试用和修改,但由于编者水平有限,不足之处期待得到读者的宝贵意见.

编 者

二〇〇七年四月

目 录

前言

第 1 章 函数 极限 连续	1
1.1 函数	1
1.1.1 函数概念	1
1.1.2 反函数概念	6
1.1.3 函数的几何性质	8
1.1.4 函数的运算	11
习题 1.1	14
1.2 极限	16
1.2.1 数列极限概念	17
1.2.2 收敛数列的性质	24
1.2.3 数列收敛的判别准则	28
1.2.4 函数极限概念	32
1.2.5 函数极限的性质	41
1.2.6 无穷小量与无穷大量	47
习题 1.2	52
1.3 连续	56
1.3.1 函数连续与间断的概念	57
1.3.2 连续函数的运算法则 初等函数连续性	62
1.3.3 闭区间上连续函数的性质	64
1.3.4 一致连续性	67
习题 1.3	69
总习题一	70
第 2 章 导数与微分	74
2.1 导数概念	74
2.1.1 实例	74
2.1.2 导数定义	75
2.1.3 导数的 Δ 求法	77
2.1.4 可导与连续的关系	79
2.1.5 左、右导数	80

习题 2.1	81
2.2 导数的计算法则	82
2.2.1 四则运算求导法则	82
2.2.2 反函数求导法则	85
2.2.3 复合函数求导法则	86
2.2.4 隐函数求导法则	92
2.2.5 参数方程求导法则	93
2.2.6 高阶导数	95
习题 2.2	100
2.3 导数的简单应用	103
2.3.1 切线与法线问题	103
2.3.2 相关变化率问题	105
习题 2.3	106
2.4 微分	106
2.4.1 微分概念	107
2.4.2 微分的基本公式和运算法则	109
2.4.3 高阶微分	111
2.4.4 微分在近似计算中的应用	112
习题 2.4	113
总习题二	113
第 3 章 微分学中值定理	116
3.1 中值定理	116
3.1.1 罗尔定理	116
3.1.2 拉格朗日定理	119
3.1.3 柯西定理	123
习题 3.1	125
3.2 洛必达法则	126
3.2.1 $\frac{0}{0}$ 型不定式	127
3.2.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式	130
3.2.3 其他类型的不定式	132
习题 3.2	135
3.3 泰勒公式	136
3.3.1 带皮亚诺余项的泰勒公式	136
3.3.2 带拉格朗日余项的泰勒公式	143

习题 3.3	148
总习题三	150
第 4 章 微分学应用	152
4.1 函数的单调性	152
4.1.1 函数单调性的判定法	152
4.1.2 不等式定理	154
习题 4.1	156
4.2 函数的凹凸性	156
4.2.1 函数凹凸性的判定法	157
4.2.2 拐点及其判定法	159
习题 4.2	161
4.3 函数的极值和最值	161
4.3.1 函数极值及其判定法	162
4.3.2 函数最大值、最小值的计算	166
习题 4.3	170
4.4 函数的图形	172
4.4.1 曲线的渐近线	172
4.4.2 函数的作图	176
习题 4.4	179
4.5 曲率	179
4.5.1 曲率的定义和计算	180
4.5.2 曲率圆、曲率半径和曲率中心	182
习题 4.5	184
总习题四	184
第 5 章 不定积分	186
5.1 原函数和不定积分的概念	186
5.1.1 原函数和不定积分	186
5.1.2 基本积分表	188
5.1.3 不定积分的性质	190
习题 5.1	192
5.2 换元积分法	192
5.2.1 第一换元法(凑微分法)	193
5.2.2 第二换元法	197
习题 5.2	201
5.3 分部积分法	202

习题 5.3	205
5.4 有理函数、三角有理函数及简单无理函数的积分	206
5.4.1 有理函数的不定积分	206
5.4.2 三角有理函数的积分	210
5.4.3 简单无理函数的积分	211
习题 5.4	213
总习题五	214
第 6 章 定积分	215
6.1 定积分的概念	215
6.1.1 定积分问题举例	215
6.1.2 定积分的定义	217
6.1.3 定积分的存在条件	220
6.1.4 定积分的性质	222
习题 6.1	225
6.2 微积分基本公式与基本定理	226
6.2.1 微积分基本公式	226
6.2.2 微积分基本定理	228
习题 6.2	231
6.3 定积分的换元法与分部积分法	233
6.3.1 定积分的换元法	233
6.3.2 定积分的分部积分法	236
习题 6.3	240
6.4 广义积分	241
6.4.1 无穷积分	241
6.4.2 无穷积分的收敛判别法	244
6.4.3 瑕积分	249
6.4.4 瑕积分的收敛判别法	251
6.4.5 Γ 函数和 B 函数	254
习题 6.4	256
总习题六	257
第 7 章 定积分的应用	260
7.1 建立积分表达式的微元法	260
7.2 定积分的几何应用	261
7.2.1 平面图形的面积	261
7.2.2 体积	265

7.2.3 平面曲线的弧长	268
7.2.4 旋转体的侧面积	272
习题 7.2	273
7.3 定积分的物理应用	274
7.3.1 变速直线运动的路程	274
7.3.2 变力沿直线所做的功	274
7.3.3 水压力	276
7.3.4 引力	276
习题 7.3	277
总习题七	278
习题答案	280
附录 几种常用的曲线	302

第1章 函数 极限 连续

高等数学所研究的主要对象是函数,所用的主要方法是极限法. 极限与函数虽然在中学已经分别学过,但是,没有应用极限方法来研究函数. 一门科学,由于改变了研究方法,就能得到很大的进步和发展,这不仅在数学中如此,在其他科学中也是如此,这是值得注意的.

本章分为函数、极限和连续三节,是学习高等数学的基础.

1.1 函 数

函数是高等数学主要的研究对象. 现在,我们学习高等数学,就要从函数入手. 由于在中学里已经学习过函数概念和一些简单函数的性质,在这里将帮助大家对原有知识进行复习,并根据本课程的需要作必要的补充和提高.

1.1.1 函数概念

现实世界中的万事万物,无一不在一定空间中运动变化着,在运动变化过程中都存在一定的数量关系,有的数值是变化的量,称为变量. 通常用后面几个英文字母 $x, y, z, \dots$ 表示. 有的数值是不变的量,称为常量. 通常用前面几个英文字母 $a, b, c, \dots$ 表示. 常量可以看作变量的特殊情形: 即在所考察的变化过程中,始终只取同一数值的变量.

本课程不论变量和常量,它们的取值都是实数,超出实数范围都认为没有意义,不作研究. 因此,变量的每一个值都是一个实数,所有这些数所构成的数集,称为这个变量的变化域. 在许多情况下,变量的变化域可以用区间表示.

设 $a < b$, 开区间: $(a, b) = \{x | a < x < b\}$;

闭区间: $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$;

半开半闭区间: $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$, $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$;

无穷区间: $(a, +\infty) = \{x | a < x < +\infty\}$, $[a, +\infty) = \{x | a \leq x < +\infty\}$,

$(-\infty, b) = \{x | -\infty < x < b\}$, $(-\infty, b] = \{x | -\infty < x \leq b\}$.

特别,开区间 $(a - \delta, a + \delta) = \{x | |x - a| < \delta\} = \{x | a - \delta < x < a + \delta\}$, 其中, $\delta (> 0)$ 为常数,称为以点 a 为中心、 δ 为半径的邻域,或称点 a 的 δ 邻域,简称 a 的邻域,记作 $S(a, \delta)$. 有时还要讨论,在 a 的邻域内去掉心(点 a),即 $\{x | 0 < |x - a| < \delta\}$ 称为

a 的去心邻域, 记作 $S_0(a, \delta)$.

我们知道, 在某一变化过程中, 同一个问题, 往往同时出现好几个变量, 而这些变量又往往是相互联系、相互依赖的, 高等数学不是孤立地研究每一个变量, 而是着重研究变量之间确定的依赖关系, 变量之间的这种确定的依赖关系, 就叫做函数.

定义 设在某一变化过程中有两个变量 x 和 y , x 的变化域为 X . 如果对于 X 中的每一个 x 的值, 根据某一规律 f , 变量 y 都有唯一确定的值与它对应, 则称 y 是 x 的函数^①, 记作

$$y = f(x), \quad x \in X.$$

其中, x 称为自变量, y 称为因变量. 自变量 x 的变化域 X 称为函数 $y = f(x)$ 的定义域, 因变量 y 的变化域称为函数 $y = f(x)$ 的值域, 记值域为

$$Y = \{y \mid y = f(x), x \in X\}.$$

为了理解这个定义, 我们说明以下几点.

首先, 函数 $y = f(x)$ 中的“ f ”代表从自变量 x 到因变量 y 的对应关系, 称为函数关系. $f(x)$ 是一个完整记号, 切不可误以为 f 乘以 x , 正如 $\sin x$ 不能看作 $\sin$ 乘以 x 一样.

当自变量 x 取一定值时, 因变量 y 的相应值称为函数值. 函数 $y = f(x)$ 当 $x = x_0$ 时的函数值记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

$$\text{例如, } y = f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ 则 } f(-3) = \frac{-3}{\sqrt{10}}, f(x^2) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}}, f(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

首先, 特别指出: $f(x)$ 与 $f(x_0)$ 是两个完全不同概念, 前者是函数关系式, 后者是函数在某点的值, 要严加区分.

其次, 研究函数, 还应了解函数在什么范围内有意义, 因此要确定函数的定义域.

例如, 圆面积 A 是圆半径 r 的函数 $A = \pi r^2$, 显然圆半径 r 必须是正值, 因此它的定义域是 $(0, +\infty)$. 又如, 离地面高度为 h 的物体, 在重力作用下的自由落体有函数关系式

$$s = \frac{1}{2}gt^2.$$

其中, t 表示时间, s 表示路程. 显然落下的最大距离是 h , 因此, 这个函数的定义域

^① 函数一词最早是德国哲学、数学家莱布尼茨 (G. W. Leibniz, 1646~1716) 于 1694 年从拉丁文中引进的. 这里函数的定义是德国数学家狄利克雷 (P. G. L. Dirichlet, 1805~1859) 给出的.

为 $\left[0, \sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$.

但如果只是在数学上一般地研究某一由具体表达式规定的函数关系, 函数的定义域则由该表达式本身确定.

例如, $y = \sin x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

$y = \log_a x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

$y = \arcsin(3x+2)$ 的定义域应该从 $|3x+2| \leq 1$ 解出来, 得 $-1 \leq 3x+2 \leq 1$, 亦有 $-1 \leq x \leq -\frac{1}{3}$, 故定义域为 $\left[-1, -\frac{1}{3}\right]$.

$y = \sqrt{\frac{5-x^2}{x-1}}$ 的定义域应该从 $x \neq 1$ 且 $\frac{5-x^2}{x-1} \geq 0$ 解出来. 当 $x > 1$ 时, 要求 $5-x^2 \geq 0$, 得 $1 < x \leq \sqrt{5}$; 当 $x < 1$ 时, 要求 $5-x^2 \leq 0$, 得 $x \leq -\sqrt{5}$. 故定义域为 $(-\infty, -\sqrt{5}] \cup (1, \sqrt{5}]$.

又由于 $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x - 1}}$ 的定义域是空集, 所以表达式 $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x - 1}}$ 不能成为函数.

因此, 函数的两要素: 第一是函数关系, 第二是定义域, 缺一不可.

另外, 两个函数相等应该是函数关系相同, 它们的定义域也相同. 例如, $f(x) = x, g(x) = x(\sin^2 x + \cos^2 x)$ 这两个函数是相同的, 故 $f(x) = g(x)$; 而 $f(x) = x, g(x) = \frac{x^2}{x}$, 它们不是同一个函数. 因为 $f(x) = x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 而 $g(x) = \frac{x^2}{x}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. 由于两个函数定义域不同, 所以这两个函数不是同一个函数.

今后常用函数 $y = f(x)$ 在 X 上有定义或者函数 $y = f(x)$ 定义在 X 上来表示存在定义域为 X 的函数 $y = f(x)$.

有一种很特殊而又很重要的函数, 其定义域 X 是全体正整数 $1, 2, \dots, n, \dots$, 因而它的函数值就依次是 $y_1 = f(1), y_2 = f(2), \dots, y_n = f(n), \dots$, 这种定义在全体正整数上的函数, 特别称之为数列或整标函数. 并记为 $\{y_n\}$ 或

$$y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$$

例如, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$, 即 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^n, \dots$, 即 $\{2^n\}$, $0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1+(-1)^n}{n}, \dots$, 即 $\left\{\frac{1+(-1)^n}{n}\right\}$ 等都是数列的例子.

最后, 表示函数关系的方法很多, 常用的有三种: 列表法、图示法和公式法.

所谓列表法, 就是将自变量和因变量的对应数据列成表格, 它们之间的函数关

系从表格上一目了然,如三角函数表、对数函数表。

在很多生产部门中常采用图示法来表示函数关系。例如,气象站用仪表记录下的气温曲线来表示气温随时间的变化关系;化工厂中用温度压力曲线来表示温度与压力之间的函数关系等。

公式法就是用算式表达函数关系的方法,这在高等数学中是最常见、最常用的方法,便于作理论研究。

以上三种表示法都各有优缺点。如公式法,它所表示的形式比较简单而全面,研究起来也比较方便,但是,它不能把量与量之间的变化过程很明显地表示出来,使人一目了然,并且每一个函数值都要临时计算,不能立刻得到结果。至于图示法虽然能把量与量之间的变化过程很明显地表示出来,但是,限于画图的技巧,缺乏足够的精确性。列表法虽然可以从表上很快地查出函数的值,但不能查出函数的任何值。所以每一种表示法都各有优缺点。因此,在高等数学中,经常把函数的三种表示法结合起来应用,如研究函数 $y=f(x)$ 的变化过程时,为了使它明显起见,总把它的图形画出来。所谓函数的图形是指,在直角坐标系中,满足方程 $y=f(x)$ 的点 (x,y) 的轨迹。

有了函数图形的概念,于是,函数与几何图形就统一起来,这不仅使研究函数的人对于函数的变化状态可以从图形上一目了然,也使研究几何的人可用分析方法来研究几何图形。

以下给出本课程经常使用的函数。

例1 中学数学里熟知的六类函数,即:

(I) 常数函数 $y=c$ (c 为常数);

(II) 幂函数 $y=x^a$ ($a \neq 0$ 为常数);

(III) 指数函数 $y=a^x$ ($0 < a \neq 1$ 为常数),特别取 $a=e$ (无理数 $e=2.718281828459045\cdots$) 有

$$y = e^x,$$

这是常用的指数函数;

(IV) 对数函数 $y=\log_a x$ ($0 < a \neq 1$ 为常数),特别取 $a=e$ 有 $y=\log_e x = \ln x$ 称为自然对数函数;

(V) 三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$;

(VI) 反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$ 。

以上统称为基本初等函数。

注意,用公式法表示函数,而没有给出定义域时,我们约定函数的定义域就是使得算式有意义的一切实数组成的集合,称为函数的自然定义域。例如, $y=\log_a x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$; $y=\sin x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[-1, 1]$; $y=$

$\arcsin x$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; $y = \arctan x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

例 2 表达式

$$y = f(x) = \begin{cases} -1, & x < -1 \\ \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 1 \\ x-1, & x > 1 \end{cases}$$

定义了 $(-\infty, +\infty)$ 上的一个函数, 这函数图形如图 1.1 所示.

值得注意的是, 在函数的定义中, 并不要求在整个定义域上只能用一个表达式来表示对应规律. 本例中, 函数定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上, 在各自的子区间内表达式不相同, 所以称为分段函数, 不是三个函数.

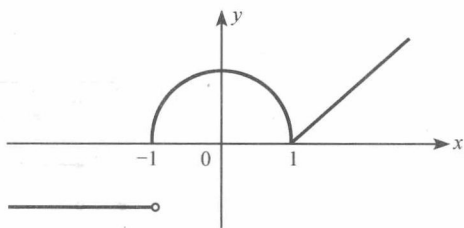


图 1.1

例 3 绝对值函数 $y = f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 也是分段函数. 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[0, +\infty)$, 它的图形如图 1.2 所示.

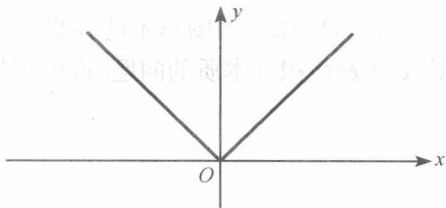


图 1.2

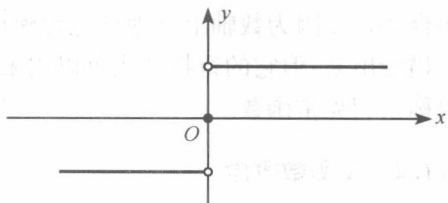


图 1.3

例 4 符号函数 $y = f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ 是分段函数. 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为集合 $\{-1, 0, 1\}$, 它的图形如图 1.3 所示.

因为对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 总有

$$|x| = x \operatorname{sgn} x,$$

所以 $\operatorname{sgn} x$ 起了 x 的符号的作用, 这正是取名的由来. 也称克罗内克^①函数.

① 克罗内克(德国数学家, L. Kronecker, 1823~1891).

例5 取整函数 $y=f(x)=[x]$, 表示不超过数 x 的最大整数. 例如

$$[2.5]=2, [3]=3, [-\pi]=-4,$$

它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为集合 $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$. 它的图形如图 1.4 所示.

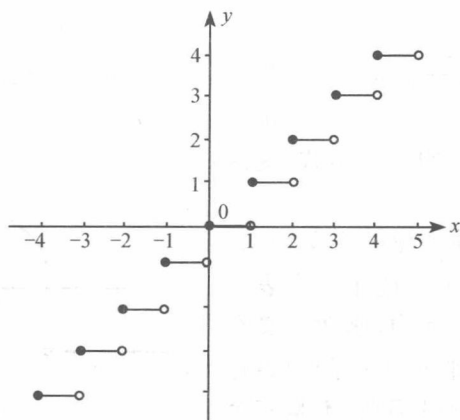


图 1.4

由于图形成阶梯形, 所以又称为阶梯函数, 还称为高斯^①函数.

例6 函数 $y=D(x)=\begin{cases} 1, & x \text{ 是有理数} \\ 0, & x \text{ 是无理数} \end{cases}$, 它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为

集合 $\{0, 1\}$. 因为数轴上有理点与无理点都是稠密的, 所以它的图形不能在坐标系下描绘出来. 但它的奇特性质可以用来说明许多涉及微积分本质的问题. 这个函数也称狄利克雷函数.

1.1.2 反函数概念

在函数的定义中, 存在两个变量, 一个是自变量, 一个是因变量, 一主一从, 地位不同. 然而在实际问题中, 谁是自变量, 谁是因变量, 并不是绝对的, 依所研究的具体问题而定.

例如, 在自由落体运动中, 如果想从已知的时间 t 来确定路程 s , 则 t 是自变量, s 是因变量, 它们之间的关系为

$$s = \frac{1}{2}gt^2.$$

如果反过来, 想从已知路程 s 来确定下落的时间, 则应从上式改写为

^① 高斯(德国数学、物理学、天文学家, C. F. Gauss, 1777~1855).

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}},$$

这时 s 是自变量, t 成了因变量.

这说明在一定条件下, 函数的自变量与因变量可以互相转化, 两个变量的地位可以互换. 这样得到的新函数, 就叫做原来那个函数的反函数. 反函数的一般定义如下.

定义 设给定函数

$$y = f(x), \quad x \in X, \quad (1.1.1)$$

其值域为 Y . 如果对于 Y 中每一个 y 值, 都可以从方程 $f(x) = y$ (把它看成关于 x 的一个方程) 确定唯一的一个 x 值, 则就得到一个定义在 Y 上的以 y 为自变量, x 为因变量的新函数, 称为函数 $y = f(x)$ 的反函数, 记作

$$x = f^{-1}(y), \quad y \in Y \quad (1.1.2)$$

(f^{-1} 读作 f 逆, 不读作 f 负一次方). 这时, 原来函数也称为正函数.

例 1 函数 $y = 5x + 3$ 的反函数是 $x = \frac{y-3}{5}, y \in (-\infty, +\infty)$.

例 2 函数 $y = 2^x$ 的反函数是 $x = \log_2 y, y \in (0, +\infty)$.

但在习惯上, 我们用 x 表示自变量, y 表示因变量, 因此反函数 (1.1.2) 式可以改记为

$$y = f^{-1}(x), \quad (1.1.3)$$

也称函数 (1.1.3) 式为函数 (1.1.1) 式的反函数. 以后没有特别声明, 总是采用 (1.1.3) 式作为 (1.1.1) 式的反函数. 因而, 当函数 (1.1.1) 式用公式表示时, 求它的反函数的过程是: 先从 (1.1.1) 式解出 x , 即将 x 用 y 来表示, 然后将 x 换作 y , y 换作 x .

例如, $y = 5x + 3$ 的反函数是 $y = \frac{x-3}{5}$; $y = 2^x$ 的反函数是 $y = \log_2 x$.

从几何图形上来看, 如果知道函数 (1.1.1) 式在直角坐标中的图形, 那么, 在同一直角坐标系中反函数 (1.1.2) 式的图形就是函数 (1.1.1) 式的图形. 这是因为任意一点 (a, b) 如果满足 (1.1.1) 式, 它也满足 (1.1.2) 式; 反过来说, 如果满足 (1.1.2) 式, 它也满足 (1.1.1) 式, 所以函数 (1.1.1) 式的图形和反函数 (1.1.2) 式的图形在同一直角坐标系中是同一曲线. 然而, 反函数 (1.1.3) 式仅是把反函数 (1.1.2) 式将 x 与 y 互换. 因此, 反函数 (1.1.3) 式的作图上不同之处只在于 x 轴与 y 轴的位置对调, 换言之, 反函数 (1.1.3) 式的图形可以由函数 (1.1.1) 式的图形绕第一、三象限角平分线 ($y = x$) 旋转 180° 印出来, 不必另行作图.

定理 正、反函数的图形对称于直线 $y = x$.

证明 设正函数 $y = f(x)$ 的反函数 $y = f^{-1}(x)$, 并设正函数 $y = f(x)$ 的图形