

航空高等院校教材

结构优化设计

丁运亮 编



航空专业教材编审组

结构优化设计

丁运亮 编



30268639

航空专业教材编审组

511397

内 容 简 介

本书从结构优化设计的基本概念、所需的数学力学基本知识入手,较系统地介绍了满应力设计、最优性准则法、可行方向法、线性规划、二次规划、无约束最优化方法及其在结构优化设计中的应用。其宗旨是指导大型结构系统的结构优化设计。本书适合于工科院校结构设计专业和计算力学专业教学使用,对从事结构设计和结构计算的工程技术人员亦有一定的参考价值。

结 构 优 化 设 计

丁运亮 编

*

航空专业教材编审组出版

南京航空学院印刷厂印装

*

787×1092 1/16 印张 15.75, 8 开插表 1, 11 开插表 2, 字数 416 千字

1984 年 7 月第一版 1984 年 7 月第一次印刷

统一书号: 22249j 定价: 1.70 元

前 言

本书综合运用结构有限元分析和数学中的最优化理论,着重介绍目前广泛应用、比较成熟以及较先进的各种结构优化设计方法和这些方法的基本原理、具体算法及设计程序框图,并有大量算例,其宗旨是指导大型结构系统的结构优化设计。书中文字叙述力求通俗易懂,并从工程实际出发,将数学力学原理与工程设计紧密结合起来,同时也尽量反映当前在结构优化设计方面的新成就。

全书共分八章。第一章主要介绍结构优化设计与有限元分析之间的关系;常用的基本名词术语;结构优化设计技术的发展概况。第二章简要介绍结构优化设计方法中所需的数学和力学基本知识,作为后面各章的基础。这里引进了结构近似重分析方法和设计灵敏度分析的概念。本章重点是Kuhn—Tucker定理及其应用。第三章介绍最早的准则法——满应力设计。着重叙述满应力设计概念及存在的问题,改进方法。最后具体介绍几种实际结构元件的满应力设计方法。重点是改进满应力设计及其应用。第四章较系统地介绍了各种最优性准则法,并进行适当分析比较。最后介绍最优性准则和数学规划的混合法。本章重点是新的最优性准则法和包络法。第五章介绍几种可行方向法和梯度投影法。第六章介绍七种一维寻查方法,本章是非线性规划法的基础。第七章介绍线性规划的基本原理及单纯形法,二次规划、对偶规划及其在结构优化设计中的应用。第八章介绍几种主要的无约束最优化方法。这类方法在结构优化设计中的应用实例较少。重点是序列无约束最小化方法。

由于受学时和编写大纲的限制,结构动力优化设计问题没有编入本书。

结构优化设计是一门综合性学科,它把工程设计、结构有限元分析、数学优化理论及在大型电子计算机上做计算紧密结合在一起,涉及的知识面较广。因此,对初学者要求具备线性代数、算法语言、结构有限元分析和结构设计等方面的基本知识。在学习过程中,要善于学习各类结构优化设计方法的基本优点,以便在实际结构优化设计问题中灵活运用。

本书所用参考资料可在书后的参考文献中找到。各章后面还附有少量习题。

本书先后经大连工学院钱令希教授、程耿东副教授、隋允康老师和国防科学技术大学李国光老师详细审阅;南京航空学院乔新副教授、何柏庆老师与郑兆铃、胡传泰副教授对本书提出了许多宝贵意见,莫乃先老师参加了本书中许多例题的上机计算工作,在此,表示衷心感谢。

书中如有不当之处,敬请读者提出宝贵意见。

编 者

1983.9.30.

目 录

第一章 结构优化设计的一般概念

§ 1—1 结构优化设计的含义	(1)
§ 1—2 结构优化设计问题的数学描述	(2)
§ 1—3 应用举例	(4)
例1—1 三杆构架的设计	(4)
例1—2 加强薄板的设计	(7)
例1—3 机翼结构优化设计	(9)
例1—4 直升机尾梁结构设计	(11)
§ 1—4 结构优化设计发展概况	(14)
习 题	(15)

第二章 有关的数学和力学基本知识

§ 2—1 两个问题	(16)
§ 2—2 函数的台劳展开式	(17)
§ 2—3 方向导数和梯度	(19)
一、方向导数	(19)
二、梯 度	(20)
三、几种特殊类型函数的梯度	(21)
§ 2—4 极值的必要条件和充分条件	(21)
§ 2—5 凸集、凸函数和凸规划	(23)
一、函数的凸性	(23)
二、凸集	(24)
三、凸函数	(25)
四、凸规划	(26)
§ 2—6 约束和拉格朗日乘子	(27)
§ 2—7 Kuhn—Tucker 定理及约束边界上的最优性判别	(28)
一、Kuhn—Tucker 定理	(28)
二、Kuhn—Tucker 定理的几何意义	(31)
三、Kuhn—Tucker 条件的推广	(34)
§ 2—8 结构近似重分析技术及设计灵敏度分析	(37)
一、设计灵敏度分析的虚载荷法	(37)
二、结构重分析的台劳一阶近似	(40)
三、台劳展开与迭代法相结合	(40)

四、台劳展开与寻找最优射线点相结合	(41)
五、降阶法	(43)
六、三杆构架的设计灵敏度分析及几种结构近似重分析方法的计算比较	(45)
习 题	(50)

第三章 满应力设计

§ 3—1 满应力设计的概念和特点	(51)
§ 3—2 比例满应力设计	(52)
§ 3—3 改进满应力设计	(57)
一、改进措施	(57)
二、设计程序框图及算例	(58)
三、修改的齿行法	(61)
§ 3—4 杆系结构的满应力设计	(62)
§ 3—5 板杆元结构的满应力设计	(64)
一、受剪板元	(64)
二、平面应力薄膜元	(64)
三、算例	(65)
§ 3—6 梁元结构的满应力设计	(68)
一、受弯曲同时受剪切的梁元结构	(68)
二、受弯曲同时受轴力的梁元结构	(69)
§ 3—7 一个元件带多个设计变量的梁元结构优化设计	(70)
一、基本原理	(70)
二、设计程序框图及算例	(72)
习 题	(75)

第四章 用最优性准则作结构优化设计

§ 4—1 概述	(77)
§ 4—2 一般位移准则法	(77)
一、单一位移约束下的最优性准则	(78)
二、主被动元件的确定原则	(80)
三、设计程序框图及算例	(81)
四、多位移约束下的最优性准则	(85)
§ 4—3 一种新的最优性准则法	(88)
一、基本原理	(88)
二、设计程序框图及算例	(89)
三、同一般位移准则法的比较	(90)
四、满应力设计与新的最优性准则结合——包络法	(91)
§ 4—4 Newton—Raphson 方法*	(95)
一、基本原理	(96)

二、设计程序框图及算例	(97)
§ 4—5 最优性准则和数学规划的混合法	(99)
一、最优性准则和数学规划法的分析对比	(99)
二、结构优化设计中的力学近似概念	(100)
三、约束条件的显式线性近似处理	(103)
四、混合法的基本原理*	(108)
习 题	(110)

第五章 用可行方向法结构优化设计

§ 5—1 概述	(112)
§ 5—2 最佳矢量法	(113)
§ 5—3 梯度投影法	(114)
一、侧移向量的计算	(115)
二、步长的确定	(116)
三、收敛性判别	(117)
四、设计程序框图及算例	(117)
§ 5—4 可行方向法*	(123)
一、计算侧移向量的线性子规划	(123)
二、设计程序框图及算例	(125)
§ 5—5 改进的可行方向法	(129)
一、基本原理	(130)
二、设计程序框图及算例	(134)
习 题	(136)

第六章 一维寻查方法

§ 6—1 引 言	(137)
§ 6—2 迭代法	(138)
§ 6—3 牛顿法	(140)
§ 6—4 弦截法	(141)
§ 6—5 0.618 法和两分法	(143)
一、0.618 法	(143)
二、两分法	(145)
§ 6—6 抛物线法	(145)
§ 6—7 三次插值	(147)
一、三次曲线的构成	(147)
二、极小值的计算	(149)
三、构造新的三次曲线	(150)
四、三次插值的设计程序框图及算例	(150)
习 题	(151)

第七章 线性规划法及其在结构优化设计中的应用

§7—1 线性规划的标准形式及基本原理	(152)
一、线性规划的标准形式	(152)
二、线性规划的基本原理	(154)
§7—2 解线性规划的单纯形法	(157)
一、典型方程式	(157)
二、在可行凸集中的顶点间移动	(158)
三、最优解的判别	(160)
四、单纯形法的设计程序框图	(160)
五、单纯形法的表格计算形式及算例	(160)
§7—3 二次规划及其应用	(164)
一、二次规划的一般概念	(164)
二、雷姆克互补主元算法及算例	(166)
三、二次规划互补主元算法的收敛性分析	(172)
四、一种最简单的二次规划问题	(172)
§7—4 对偶线性规划	(174)
一、线性规划的对偶性	(174)
二、非线性规划的对偶性	(176)
§7—5 结构优化设计中将原规划变为对偶规划的混合算法*	(177)
习 题	(179)

第八章 无约束最优化方法

§8—1 序列无约束最小化方法	(181)
一、内点罚函数法	(181)
二、外点罚函数法	(187)
三、内点法与外点法的比较	(190)
§8—2 梯度法	(190)
§8—3 牛顿法	(193)
§8—4 共轭梯度法	(194)
一、共轭方向的性质	(194)
二、共轭方向法	(198)
三、二次函数的共轭梯度法(或共轭斜量法)	(200)
四、共轭梯度法的计算步骤及设计程序框图	(203)
§8—5 变尺度法*	(206)
一、基本关系式	(206)
二、Broyden 秩二算法类	(207)
三、DFP 算法及设计程序框图	(208)
四、Broyden 秩一算法类	(211)

五、关于变尺度的命名	(212)
§ 8—6 Powell 方法	(214)
一、理论基础	(214)
二、共轭方向的生成	(216)
三、Powell 法的具体算法及设计程序框图	(217)
§ 8—7 单纯形方法	(221)
一、单纯形法的基本原理及计算过程	(222)
二、单纯形法设计程序框图及算例	(225)
§ 8—8 复合形法*	(232)
一、具体算法	(232)
二、设计程序框图及算例	(233)
习 题	(237)
参考文献	(238)

注：带“*”的章节可不作为讲解内容，但供学生参考。

第一章 结构优化设计的一般概念

§ 1—1 结构优化设计的含义

这里所讲的结构优化设计，指的是在给定结构外形和基本结构形式；给定各元件材料；外载荷条件；给定整个结构的强度、刚度、工艺要求的条件下，对结构进行整体和元件优化设计。

结构优化设计，有时又称为结构综合^[34]。从目前的观点看，它便是综合对结构进行有限元分析或解析计算，运用数学上的最优化方法，在计算机上实现自动设计，产生出一个理想的设计方案。

具体地说，对任何一种新的结构设计，在进行结构优化设计之前，首先要求设计人员事先选定该结构的布局方案（即外形尺寸、基本结构形式、元件类型等，可以选择多种布局方案同时进行计算比较）。在此基础上，便可运用力学的基本观点，对该结构进行观察和分析，例如将实际结构运用有限元分析的方法简化成理想的力学计算模型，这就是所谓的结构离散化。

从有限元分析的观点看，离散化后的所有各个元件都是一个一个的受力单元。结构在外力作用下的力学特性可以近似地认为就是这些小的受力单元的力学特性的总和。

从结构设计的角度看，这每一个小单元，都可看成是一个设计对象。在每一个设计对象中选取一个关键性尺寸作为可改变的参数，例如杆元件的横截面面积，板元件的厚度、梁元件的惯性矩等。所有这些可变化的参数统称为设计变量。改变这些设计变量的大小，实际上也就改变了每个元件的受力特性，整个结构的平衡协调系统也起了变化，同时还改变了整个结构的材料分布及结构重量。

结构优化设计就是为了寻找一组最优的设计变量（即各受力元件参数的最有利组合），使得所设计的结构既满足强度、刚度、工艺以及动态特性等要求，而且结构重量最轻，或者制造成本最低。为了达到此目的，任一静不定结构的优化设计过程，都得反复改变这些设计变量，使之向所要求的目标变化，而每一次设计变量的修改，同时也改变了整个结构的受力特性，因此，就需要对修改后的结构进行重分析。结构优化设计便是在“分析（对事先任意给定的初始设计作分析）——设计（修改设计变量）——再分析——再设计”这样一个多次迭代过程中，由计算机自动来完成的。

由此可见，有限元分析是结构优化设计的力学基础，在结构优化的迭代过程中起重分析作用。

最优化方法是结构优化设计的数学基础。最优化方法经过一定的工程处理，在优化设计中起再设计作用。

而一般的结构设计技术将为结构优化设计提供合理的预研方案，并最终将结构优化设计的结果在实际结构设计中付诸实现。

§ 1—2 结构优化设计问题的数学描述

把前面所述的结构优化设计概念，用数学形式描述出来，即成为一般的数学规划形式。
寻找一组变量

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{Bmatrix} \\ f(\mathbf{x}) &\rightarrow \text{Min (最小)} \\ g_j(\mathbf{x}) &\leq 0 \quad (j=1, 2, \dots, k) \\ g_e(\mathbf{x}) &= 0 \quad (e=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

使得函数
并且满足

其中， $\mathbf{x}$ 称为设计变量向量。它的每一个分量即代表一个元件的设计参数（横截面面积或厚度等）。或者多个元件根据它们的共同特性合用一个设计变量，此称为设计变量连接。设计变量连接是简化结构优化设计问题的一种很有用的方法。

$f(\mathbf{x})$ 称为目标函数或称为价值函数，它定义为设计变量 $\mathbf{x}$ 的函数，是作为在可供选择的许多可行设计中，即满足所有约束条件的设计中，进行比较选择的依据。优化的目标就是要使 $f(\mathbf{x})$ 达到最小。目标函数可能指整个结构重量，也可能指最低成本或其他种种指标，也即最优化问题并不一定与最小重量相联系。但在大多数结构优化设计中，总是把结构重量最轻作为目标函数，而且最小结构重量是各种目标函数中最容易写成设计变量的函数形式。

$g_j(\mathbf{x}) \leq 0$ 称为不等式约束，它说明一种结构只能在某种限制条件下工作，这些约束条件可能包括应力、位移、稳定性、振动频率、几何尺寸等等。不同的约束条件所得到的最后优化设计结果是不一样的。

$g_e(\mathbf{x}) = 0$ 称为等式约束。它代表整个结构的平衡协调方程。例如在矩阵位移法中，这些方程可以写为

$$[K]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{p}\} \quad (1-2)$$

$$[K]\{\mathbf{y}\} = \xi[M]\{\mathbf{y}\} \quad (1-3)$$

式中 $[K]$ ——结构刚度矩阵；
 $\{\mathbf{u}\}$ ——位移向量；
 $\{\mathbf{p}\}$ ——载荷向量；
 $\{\mathbf{y}\}$ ——特征向量；
 $[M]$ ——结构的质量矩阵；
 ξ ——特征值。

在某些优化设计的著作中，把式 (1-2) 和式 (1-3) 称为状态方程；并把 $\mathbf{u}$, $\mathbf{y}$ 称为状态变量，意即这些量是决定整个结构力学状态特性的，它们是设计变量的函数。或者叫做结构相应于设计变量的响应量^[1]。

由设计变量所组成的数学空间称为设计空间。如果只有两个设计变量，则这个空间是一个设计平面，如图 1—1 所示。若此时把约束条件以等式反映在这个设计平面内，则为平面

上的若干条曲线。如果同时把一系列目标函数等值线（可能是直线，也可能是曲线，依 $f(x)$ 与 x 的函数关系而定）也画在同一图上，我们便可以来分析目标函数、约束条件和设计变量在优化设计过程中的相互关系。

三个设计变量组成立体空间，约束条件 $g_j(x)=0, j=1, 2, \dots, k$ 成为若干个曲面，目标函数则构成一系列等值面。三个以上设计变量组成多维设计空间，约束条件组成一个一个的超曲面，目标函数则构成一系列等值超曲面（或超平面）。多维空间及超曲面无法直接用几何图形表达出来。

设计空间内任一点 x ，代表一个设计。每一个约束曲面（或曲线）都把设计空间分成两部分：即满足该约束条件的部分和不满足的部分。所有临界约束组合成一个约束边界，或称为约束包络面（或线）。约束边界把设计空间划分为两个区域：可行域和不可行域。在约束边界上及可行域内的任一设计点均满足全部约束条件，因而是一可行设计，称为可行点。反之，不可行域中的任一点，都是不能接受的设计点，称为不可行点。见图 1—1。有关结构优化设计一般概念的描述，还可参考文献[44]。

设计空间中的某一点 $x^{(0)}$ 可以用向量来表示，假设它为初始设计

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_m^{(0)} \end{pmatrix}$$

经过结构分析，发现这一设计不满足优化要求，于是运用优化方法修改设计，从而得到一新的设计点（新的设计向量）

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_m^{(1)} \end{pmatrix}$$

图 1—1 表示在二维情况下的 $x^{(0)}$ 和 $x^{(1)}$ 两向量及其相互关系。这两个设计点（向量）之间的关系，在多维情况下用数学形式表示，则为

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_m^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_m^{(0)} \end{pmatrix} + \omega_0 \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix} \quad (1-4)$$

或写为

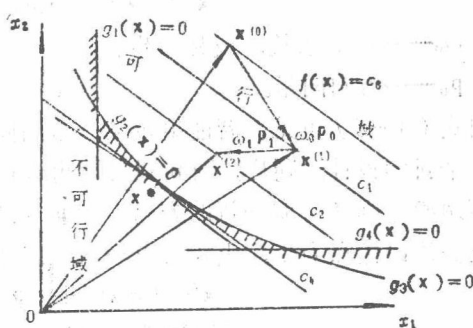


图 1—1

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \omega_0 \mathbf{p}_0$$

式中 ω_0 ——正的系数, 或称为步长;

$\mathbf{p}_0$ ——方向向量。

由式(1-5)可见, 若能给定某一方向向量 $\mathbf{p}_0$ 和步长 ω_0 , 就可以对原设计进行修改而获得一个新的设计。同样, 对新设计点再进行结构重分析。检查约束条件及目标函数, 发现还需要调整, 则又可取一新的方向向量 $\mathbf{p}_1$ 及步长 ω_1 来修改设计。如此继续迭代下去, 直到设计点到达最优为止。上式可以写成一般迭代公式

$$\mathbf{x}^{(v+1)} = \mathbf{x}^{(v)} + \omega_v \mathbf{p}_v \quad (v=0, 1, 2, \dots) \quad (1-6)$$

式中 $v, v+1$ ——表示前后两次迭代次数。

ω_v 及 $\mathbf{p}_v$ 的选取由具体的最优化方法决定。在具体计算中, 一般 $\mathbf{p}_v$ 取为单位向量

$$\mathbf{p}_v^c = \frac{\mathbf{p}_v}{(\mathbf{p}_v^T \cdot \mathbf{p}_v)^{1/2}} \quad (1-7)$$

而

$$(\mathbf{p}_v^T \mathbf{p}_v)^{1/2} = \sqrt{p_{v1}^2 + p_{v2}^2 + \dots + p_{vm}^2} \quad (1-8)$$

上述设计过程可以用一个简单程序框图来表示, 见图 1-2。

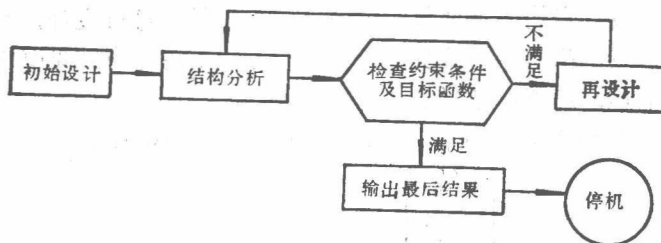


图 1-2

§ 1-3 应用举例

例 1-1 三杆构架的设计

三杆构架的设计问题是结构优化设计中广泛运用的一个最简单的应用实例^[1,13,15,16]。

现给出三杆构架的外形尺寸, 如图 1-3。两种载荷情况分别为 P_1 和 P_2 。 $P_1 = P_2 = 20000 \text{ lb}$ 。给定材料的弹性模数 $E = 10^7 \text{ lb/in}^2$, 材料的重量密度 $\rho = 0.1 \text{ lb/in}^3$, 杆元的应力极限 $[\sigma_+] = 20000 \text{ lb/in}^2$, $[\sigma_-] = -15000 \text{ lb/in}^2$, 第 1 点 y 方向的位移极限 $u_y^* = 0.01 \text{ in}$, 元件最小尺寸为 $x_{i \min} = 0.01 \text{ in}^2$, $i = 1, 2, 3$ 。

设计要求 选择元件的横截面面积 x_1 , x_2 和 x_3 (设计变量), 使整个构架重量尽可能轻, 同时满足应力、位移和元件尺寸约束。

这里, 我们按有限元分析中的矩阵位移法 (直接刚度法) 来推导出三杆构架优化设计中的数学规

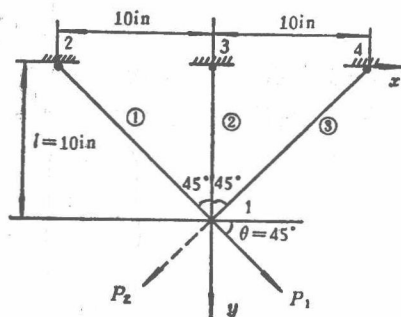


图 1-3

划表达形式。

三杆构架为平面构架，坐标如图1—3。每个节点只有两个自由度，并且第2，3，4点均铰接，自由度被约束住，所以实际上该问题只有两个自由度。

分别写出三杆的几何矩阵和元件刚度矩阵

第①杆

几何矩阵

$$[a_1] = \frac{1}{\sqrt{2}L} [-L, -L, L, L] = \frac{\sqrt{2}}{2} [-1, -1, 1, 1] \quad (1-9)$$

元件刚度矩阵

$$[K_1] = \frac{Ex_1}{\sqrt{2}L} [a_1]^T [a_1] = \frac{Ex_1}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-10)$$

第②杆

$$[a_2] = [0, -1, 0, 1] \quad (1-11)$$

$$[K_2] = \frac{Ex_2}{L} [a_2]^T [a_2] = \frac{Ex_2}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-12)$$

第③杆

$$[a_3] = \frac{\sqrt{2}}{2} [1, -1, -1, 1] \quad (1-13)$$

$$[K_3] = \frac{Ex_3}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-14)$$

三杆构架的总刚度矩阵，直接由 $[K_1]$, $[K_2]$, $[K_3]$ 迭加便可得到，并且考虑只取第1点两个自由度，则得

$$\begin{aligned} [K] &= \begin{bmatrix} \frac{Ex_1}{2\sqrt{2}L} + \frac{Ex_3}{2\sqrt{2}L} & \frac{Ex_1}{2\sqrt{2}L} - \frac{Ex_3}{2\sqrt{2}L} \\ \frac{Ex_1}{2\sqrt{2}L} - \frac{Ex_3}{2\sqrt{2}L} & \frac{E}{2\sqrt{2}L} (x_1 + x_3 + 2\sqrt{2}x_2) \end{bmatrix} \\ &= \frac{E}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} x_1 + x_3 & x_1 - x_3 \\ x_1 - x_3 & x_1 + x_3 + 2\sqrt{2}x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-15)$$

若考虑结构对称，两种载荷情况也对称，可设 $x_1 = x_3$ 。元件①中的应力大小在载荷条件

P_1 下与元件 3 在载荷条件 P_2 下是相同的, 反之亦然。因此, 只要考虑第一种载荷条件就够了。据此, 式 (1-15) 简化为

$$[K] = \frac{E}{\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}x_2 + x_1 \end{bmatrix} \quad (1-16)$$

由平衡协调方程式 (1-2), 有

$$\begin{aligned} & \frac{E}{\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}x_2 + x_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} P_1 \cos \theta \\ P_1 \sin \theta \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1-17)$$

解得

$$\left. \begin{aligned} u_{1x} &= \frac{LP_1}{Ex_1} \\ u_{1y} &= \frac{LP_1}{(x_1 + \sqrt{2}x_2)E} \end{aligned} \right\} \quad (1-18)$$

元件中的应力

$$\sigma_1 = \frac{E}{\sqrt{2}L} [a_1] \{u\}_1 = \frac{2x_1 + \sqrt{2}x_2}{2(x_1^2 + \sqrt{2}x_1x_2)} P_1 \quad (1-19)$$

式中 $\{u\}_1$ —— 第①杆两端节点位移, 铰接点处位移用 0 代入。

同样可得

$$\sigma_2 = \frac{E}{L} [a_2] \{u\}_2 = \frac{1}{(x_1 + \sqrt{2}x_2)} P_1 \quad (1-20)$$

$$\sigma_3 = \frac{E}{\sqrt{2}L} [a_3] \{u\}_3 = \frac{-\sqrt{2}x_2}{2(x_1^2 + \sqrt{2}x_1x_2)} P_1 \quad (1-21)$$

到此为止, 我们可以建立三杆构架优化设计的数学规划表达形式:

求设计变量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$

使得目标函数——结构重量最轻, 即

$$f(\mathbf{x}) = W(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \rho L_i x_i = 2\sqrt{2}x_1 + x_2 \rightarrow \text{Min} \quad (1-22)$$

并且满足

应力约束

$$g_1(\mathbf{x}) = \sigma_1 - [\sigma_+]$$

$$= \frac{2x_1 + \sqrt{2}x_2}{2(x_1^2 + \sqrt{2}x_1x_2)} P_1 - 20000 \leq 0 \quad (1-23)$$

$$g_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{x_1 + \sqrt{2}x_2} P_1 - 20000 \leq 0 \quad (1-24)$$

$$g_3(\mathbf{x}) = \left| \frac{-\sqrt{2}x_2}{2(x_1^2 + \sqrt{2}x_1x_2)} P_1 \right| - 15000 \leq 0 \quad (1-25)$$

位移约束

$$g_4(\mathbf{x}) = u_{1y} - u_1^* \\ = \frac{LP_1}{(x_1 + \sqrt{2}x_2)E} - 0.01 \leq 0 \quad (1-26)$$

尺寸约束

$$g_5(\mathbf{x}) = x_{1\min} - x_1 \leq 0 \quad (1-27)$$

$$g_6(\mathbf{x}) = x_{2\min} - x_2 \leq 0 \quad (1-28)$$

尽管这个问题是理想的设计问题，并且维数很低（最后为两维空间的设计问题），但它作为一个很好的例子可考验某些优化方法及检验计算的初步迭代规律，将在以后各章中用来作详细运算的例子。

例1—2 加强薄板的设计。这个例题取自参考文献[45]。

现给定加强薄板的外形尺寸，如图 1—4(a)。已知数据：

$$E = 10^7 \text{ lb/in}^2, \quad \rho = 0.1 \text{ lb/in}^3, \quad \mu = 0.30$$

杆元极限应力 $[\sigma] = \pm 10000 \text{ lb/in}^2$,

板受剪或受正应力极限应力 $[\tau]$ 或 $[\sigma] = \pm 10000 \text{ lb/in}^2$,

杆元最小尺寸限制为 0.05 in^2 ,

板厚最小尺寸限制为 0.022 in ,

不考虑位移约束，四种载荷情况见图 1—4。

设计要求 选择杆元横截面面积和板厚度，使整个加强薄板重量最轻，同时满足应力和元件尺寸约束。

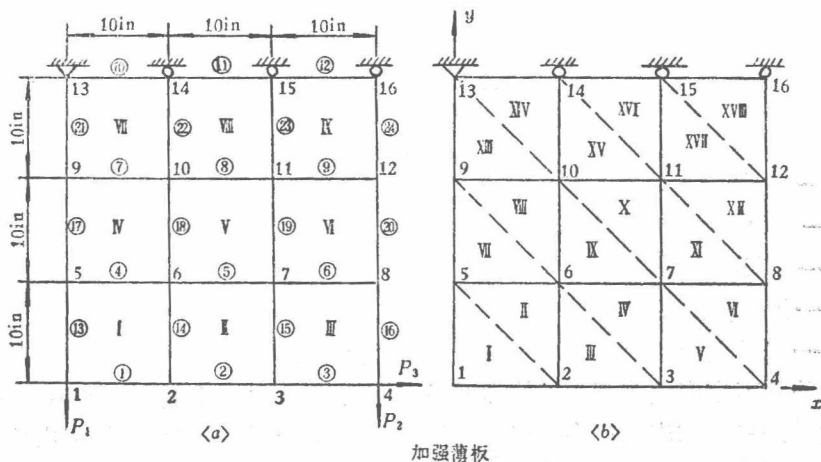


图 1—4

该问题为包含多种元件类型的结构优化设计问题。首先，按结构有限元分析模型简化原则，可以把加强薄板理想化为两种离散模型：第一种为杆元和纯受剪板元组成，如图 1—4(a)。此时共有 24 根杆，9 块板，因此设计变量为 33 个。受剪板承受正应力的能力折算到四周的杆元中，优化设计后，杆元横截面面积还应将板的折算面积扣除。第二种为杆元和均匀厚度的常应变三角板或矩形板薄膜元组成，如图 1—4(b)。此时除 24 根杆元同于第一种

外,还有 18 块三角板共 42 个设计变量。若同一个矩形内两块三角板,采用变量连接共一个设计变量,则仍为 33 个设计变量。采用矩形板薄膜元,变量数同第一种。离散模型不同,优化设计结果也会有差异,可以通过这两种离散模型的计算来进行分析比较,选其中更合理的一个。

该问题的平衡协调方程仍为式 (1-2)

$$[K]\{u\}=\{p\}$$

总刚度矩阵 $[K]$ 可直接由各元件刚度矩阵按节点自由度迭加而成,对杆元、受剪板及平面应力薄膜元的元件刚度矩阵可用一个共同的公式表示

$$[K_i]=[a]^T[D][a] \quad (1-29)$$

式中 $[a]$ ——各元件的几何矩阵;

$[a]^T$ —— $[a]$ 的转置。各元件的几何矩阵可参考结构力学或有限元分析等有关著作。

$[D]$ ——元件的弹性模量矩阵。

对杆元

$$[D]=\frac{Ex_i}{L} \quad (1-30)$$

对受剪板元

$$[D]=\frac{Gx_i}{4A}=\frac{Ex_i}{8(1+\mu)A} \quad (1-31)$$

对平面应力薄膜元

$$[D]=\frac{EAx_i}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (1-32)$$

式中 E ——弹性模量;

μ ——泊桑比;

L ——杆长;

A ——代表板的面积;

x_i ——表示设计变量,即杆的横截面积或板厚度。

由于结构静不定度数较高,元件类型多,维数高,在这个例题中就不可能象例 1-1 那样直接由式 (1-2) 求出位移 $\{u\}$ 与各设计变量之间的显函数关系,只能由式 (1-2) 求得位移的数值。因此在绝大多数结构中,状态变量 $\{u\}$ 与设计变量 $\{x\}$ 都只能用隐函数关系表示出来。在给定设计变量的初始设计情况下,由 (1-2) 式可求得位移值。

解得位移后,很容易求出各元件中的应力,也可以用一个通式表示

$$\{\sigma\}_i=\frac{1}{x_i c_i}[D][a]\{u\}_i \quad (1-33)$$

或者写为

$$\{\sigma\}_i=[S]\{u\}_i \quad (1-34)$$

7

载荷情况表

情 况 \ 载荷 (lb)	P_1	P_2	P_3
1	30000	30000	0
2	50000	10000	0
3	20000	40000	0
4	0	0	20000