

高等学校教学参考书

# 现代机械设计 方法综述

● 王步瀛 陈庚梅 吴琦 编

高等教育出版社

## 内 容 简 介

本书较详细地介绍了目前常用的几种现代机械设计方法的基本知识和基本理论。内容丰富,深入浅出,便于自学。

全书共分四章。第一章机械零件的模型试验设计方法,第二章机械零件的概率设计方法,第三章机械零件的最优化设计方法,第四章机械零件的计算机辅助设计。

本书可作为高等工业学校机械类、近机类各专业的选修课教材和学生的课外读物,也可作为电大、职工大学等同类专业学生的参考读物。

高等学校教学参考书

### 现代机械设计方法综述

王步瀛 陈庚梅 吴 琦 编

\*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

崇明大同红卫印刷厂印装

\*

开本 850×1168 1/32 印张 7 字数 166,000

1985年9月第1版 1985年12月第1次印刷

印数 00,001—12,200

书号 15010·0639 定价 1.60 元

# 前 言

本书编写的目的,是为了使学习过机械零件课程的学生,通过阅读本书,能对机械零件的现代设计方法有一个概括的了解,以便为今后进一步的有针对性的深入学习打下良好的基础。

相对于传统的设计思想,现代有两个突出的方面使机械零件设计发生了深刻的变化。

## (1) 最优化的设计思想

传统的设计是基于“合格设计”(Adequate design)的思想。在这种思想指导下所设计的机械零件,就其选择材料和几何参数的取值来说,既要满足对该零件提出的要求,又要把不希望出现其他失效的准则限制在容许的范围以内。

本世纪五十年代以来,发展和推广了“最优化设计”(Optimal design)的思想。在此思想指导下所设计的机械零件,就其选择材料和几何参数的取值来说,既要使零件所满足的使用要求达到最优的程度,同时要使不希望出现其他失效的准则达到最小,或限制在容许范围以内。

基于这样的考虑,我们编入了“最优化设计方法”一章。

## (2) 设计变量随机化的思想

传统的设计是把设计变量当作常量来看待的。但是,实际的设计变量基本上都是随机变量。据此引入了“概率设计”(Probabilistic design)的新思想及相应的设计方法。因此,本书中编入了“机械零件的概率设计方法”一章。

由于零件有了“失效概率”和“生存概率”这样的属性,于是传

统的设计准则,如“强度”、“刚度”等就不能完整地说明零件应具备的性能,从而引入了“可靠性”(Reliability)的概念。根据可靠性设计准则,发展了机械系统及机械零件的可靠性设计的新方法。不过,根据定义,可靠性的量度——可靠度,是指一定的环境条件及工作寿命下零件不失效的概率,因此本书未列专章讨论可靠性设计,而只在概率设计方法中予以介绍。

作为设计工作,历来是设计人员依靠自己的双手来进行计算和制图等工作的。随着电子计算机技术的发展,在设计工作中耗费大量劳动的性能分析计算及制图等工作都可由计算机系统去完成,从而使设计人员从这些繁重的劳动中解脱出来,去思考更为重要且能体现创造性的其他问题。这不仅是设计工具的革命,而且在设计思想上也引起了巨大的变革。例如没有电子计算机的快速计算的能力,最优化设计一般地也只能停留在“思想”阶段而不能引入实用。因而本书编入了“机械零件的计算机辅助设计”一章对此加以介绍。

机械零件的模型试验设计方法是出现得较早的一种设计方法。虽然如此,在可靠性要求很高的部门,对于大型、结构复杂以及比较重要的零件,在正式投产以前,先要设计、制造出较小的模型,在模型上进行试验,以发现原初步设计中的薄弱之处,并加以改进。这就是说,模型试验设计还是一些工业部门不可缺少的一种设计方法。试验的方法及使用的手段也还在不断地改进和发展。本书中列入“机械零件的模型试验设计”一章,重点讨论了模型试验设计方法中的关键步骤——模型设计和模型试验方法中的若干问题。至于试验设备方面,限于本书的篇幅,只好从略。

目前对于机械零件的现代设计方法所应当包含的内容尚无统一的公认的看法,所以上述四章只是我们按照自己的理解所选定的最低限度的内容。我们认为,所谓机械零件的现代设计方法,应

当贯穿着现代的设计意图与准则, 且与现代的设计手段和工具相联系。鉴于上述看法, 本书中没有编入以下的内容:

(1) 有限元素法

在机械零件设计中, 有限元素法主要是作为应力应变分析的一种手段而采用的。它的分析结果还是应用于“强度”和“刚度”的设计中去。也就是说, 从机械设计的观点来看, 它是材料力学、弹性力学等学科的一个等效学科。

(2) 设计方法学

目前在国际上兴起的“设计方法学”, 主要是对机械系统设计方法的研究。

(3) 机械零件设计的断裂力学方法

五十年代以来迅速发展起来的断裂力学, 在承认零件中总是存在有各式各样的缺陷的前提下, 对零件的脆性断裂、裂纹扩展等问题提出了一系列与材料力学的处理方法不相同的观点和方法。现在不少学校都在有关专业中开设了断裂力学的课程。

当然, 我们这样选择本书内容, 只是我们的管窥之见。如有必要和可能, 俟以后再行增补。

本书承华中工学院余俊教授审阅。西北工业大学濮良贵教授对本书也提出了不少改进意见。编者在此一并致谢。

本书第一、二章由王步瀛编写, 第三章由吴琦编写, 第四章由陈庚梅编写。初稿曾互相校阅, 最后由王步瀛统一校改。由于我们水平所限, 书中难免有不妥当甚至错误之处, 敬请提出批评指正。

编者

一九八四年四月

# 目 录

|                          |    |
|--------------------------|----|
| 第一章 机械零件的模型试验设计方法        | 1  |
| 1.1 模型设计中的相似准则           | 2  |
| 1.1.1 几何相似               | 2  |
| 1.1.2 运动相似               | 2  |
| 1.1.3 动力相似               | 3  |
| 1.1.4 与强度有关的物理量的相似       | 4  |
| 1.1.5 边界条件的相似            | 4  |
| 1.2 相似判据及比例尺方程           | 5  |
| 1.3 弹性结构的变态模型            | 9  |
| 1.4 模型设计的另一途径            | 10 |
| 1.5 模型试验的方法              | 13 |
| 1.5.1 应力应变分析试验           | 13 |
| 1.5.2 破坏性试验              | 14 |
| 第二章 机械零件的概率设计方法          | 17 |
| 2.1 概述                   | 17 |
| 2.2 机械零件概率设计方法中常用的分布密度函数 | 19 |
| 2.3 随机变量的函数的数字特征         | 24 |
| 2.3.1 函数的数学期望及方差         | 24 |
| 2.3.2 数字特征定理             | 25 |
| 2.4 构件几何尺寸的统计数字特征        | 30 |
| 2.4.1 线性尺寸的统计数字特征        | 30 |
| 2.4.2 面积的统计数字特征          | 32 |
| 2.4.3 截面抗弯模量的统计数字特征      | 32 |
| 2.4.4 截面对轴的惯性矩的统计数字特征    | 33 |
| 2.5 零件载荷和截面应力的统计数字特征     | 34 |
| 2.5.1 零件上载荷的统计数字特征       | 34 |

|                                                                                   |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.5.2 零件截面上应力的统计数字特征 .....                                                        | 37        |
| 2.6 材料机械性能的统计数字特征 .....                                                           | 38        |
| 2.6.1 材料静强度特性的统计数字特征 .....                                                        | 38        |
| 2.6.2 材料弹性模量的统计数字特征 .....                                                         | 39        |
| 2.6.3 材料疲劳极限的统计数字特征 .....                                                         | 39        |
| 2.6.4 金属材料机械性能离散性的平均值 .....                                                       | 40        |
| 2.7 概率设计方法中的应力-强度干涉理论 .....                                                       | 40        |
| 2.7.1 强度和应力都服从正态分布时的干涉公式 .....                                                    | 44        |
| 2.7.2 强度和应力都服从对数正态分布时的干涉公式 .....                                                  | 44        |
| 2.7.3 强度服从正态分布, 应力服从指数分布时的干涉公式 .....                                              | 45        |
| 2.7.4 应力服从 $\gamma$ 分布, 强度服从正态分布时的干涉公式 .....                                      | 46        |
| 2.7.5 强度服从三参数 $(b, \theta, S_0)$ 韦布尔分布, 应力服从正态分布 $s(\mu, \sigma)$<br>时的干涉公式 ..... | 46        |
| 2.7.6 强度服从正态分布, 应力服从瑞利分布时的干涉公式 .....                                              | 48        |
| 2.8 安全系数与可靠度 .....                                                                | 49        |
| 2.8.1 第一种方法 .....                                                                 | 50        |
| 2.8.2 第二种方法 .....                                                                 | 50        |
| 2.8.3 讨论 .....                                                                    | 51        |
| 2.9 机械零、部件可靠性设计简介 .....                                                           | 52        |
| 2.9.1 可靠性函数 .....                                                                 | 52        |
| 2.9.2 三种失效速率 .....                                                                | 56        |
| 2.9.3 平均失效时间 MTBF .....                                                           | 60        |
| 2.9.4 系统的可靠度 .....                                                                | 64        |
| 2.9.5 可靠度的分配 .....                                                                | 66        |
| 2.10 典型机械零件的概率设计计算 .....                                                          | 69        |
| 2.10.1 静载螺栓的概率设计 .....                                                            | 69        |
| 2.10.2 轴的强度的概率设计 .....                                                            | 71        |
| 2.10.3 滚动轴承的概率计算 .....                                                            | 74        |
| 2.10.4 圆柱螺旋压缩弹簧的概率设计 .....                                                        | 77        |
| <b>第三章 最优化设计方法 .....</b>                                                          | <b>82</b> |
| 3.1 概述 .....                                                                      | 82        |

|            |                            |            |
|------------|----------------------------|------------|
| 3.1.1      | 无约束问题最优解存在的必要和充分条件         | 85         |
| 3.1.2      | 优化设计的数学模型的几何表示             | 89         |
| 3.1.3      | 优化设计的一般步骤                  | 93         |
| 3.2        | 无约束优化方法                    | 97         |
| 3.2.1      | 步长因子 $\omega_k$ 的确定和一维搜索方法 | 97         |
| 3.2.2      | 搜索方向 $P_k$ 的确定和间接算法        | 103        |
| 3.3        | 无约束优化方法(直接方法)              | 117        |
| 3.3.1      | 方向加速法(Powell 法)            | 119        |
| 3.3.2      | 单纯形法(Simplex method)       | 123        |
| 3.4        | 约束优化方法                     | 127        |
| 3.4.1      | 梯度投影法                      | 131        |
| 3.4.2      | 罚函数法                       | 134        |
| 3.4.3      | 复合形法和可变允差法简介               | 140        |
| 3.5        | 数学规划及其发展概况                 | 142        |
| 3.6        | 最优化设计方法在机械设计中的应用           | 149        |
| 3.6.1      | 数学模型的建立                    | 150        |
| 3.6.2      | 优化方法的选择                    | 153        |
| 3.6.3      | 计算结果的分析                    | 154        |
| 3.7        | 应用实例                       | 155        |
| <b>第四章</b> | <b>机械零件的计算机辅助设计</b>        | <b>163</b> |
| 4.1        | 概述                         | 163        |
| 4.2        | CAD 系统的设计特点                | 164        |
| 4.2.1      | 机械零件的传统设计过程                | 164        |
| 4.2.2      | 计算机辅助设计(CAD)系统             | 165        |
| 4.2.3      | 两种设计方法的对比                  | 167        |
| 4.3        | CAD 系统的组成                  | 168        |
| 4.3.1      | 主机                         | 168        |
| 4.3.2      | 输入装置                       | 168        |
| 4.3.3      | 输出装置                       | 168        |
| 4.3.4      | 人机对话装置                     | 169        |
| 4.3.5      | 外存贮器                       | 169        |



|                    |     |
|--------------------|-----|
| 4.4 数表、曲线和实测数据的程序化 | 170 |
| 4.4.1 数表的程序化       | 172 |
| 4.4.2 曲线的输入及程序化    | 176 |
| 4.4.3 实测数据的曲线拟合    | 178 |
| 4.5 图形显示装置         | 186 |
| 4.5.1 图形显示器的组成     | 186 |
| 4.5.2 装配图的显示方法     | 192 |
| 4.5.3 零件图的显示方法     | 194 |
| 4.6 计算机绘图          | 194 |
| 4.6.1 计算机绘图的过程     | 195 |
| 4.6.2 绘图原理         | 195 |
| 4.6.3 自动绘图机的主要功能   | 197 |
| 4.6.4 自动绘图系统       | 197 |
| 4.6.5 自动绘图机        | 198 |
| 4.6.6 自动绘图机软件简介    | 204 |
| 4.7 机械零件的 CAD 应用举例 | 205 |

# 第一章 机械零件的模型试验设计方法

根据强度准则设计机械零件时，应当计算零件危险点上的最大应力。对于结构复杂的零件，无法用解析法求出零件上各点的应力值。现代发展起来的弹性问题的有限元素法，虽然能在相当大的程度上计算出某些复杂零件的应力和变形，但是它也不能离开弹性的基本假设并存在把连续体离散化所带来的近似性。对于三维问题也只能用于相对简单的形体。因此很难把它用于一切设计场合。

结构复杂的零件常常是一些基础零件，例如大型水轮机机壳、锻压机的横梁等；有时是一些重要的承力构件，例如有开孔的旋转圆盘，大型齿轮的轮缘与辐板等。对于这些零件有时就要用模型试验设计作为重要的设计手段。

模型试验设计就是设计、制造出原型零件的模型，在其上加载并进行应力和应变的测量，用以判断原型零件的强度和刚度，以及原型零件的结构是否合理，然后以实测数据为依据，对零件的尺寸及结构进行修改，从而使设计更加完善的设计过程。

制造零件的模型，有时可以用和原型零件相同的材料，但常常用弹性模量较低的其他材料。

利用模型试验设计可以有效地解决以下一些问题：

- (1) 原型零件尚未制出，无法利用原型零件进行试验和测量。
- (2) 原型零件虽已制出，但由于受力后变形很小，应力较低，所以测量精度不高。
- (3) 原型零件制造价格昂贵，用原型零件试验在经济上不够

合理。

以下分别讨论模型设计的有关问题。

## 1.1 模型设计中的相似准则

用作试验的机械零件的模型，应当和原型零件是相似的。从强度设计的范畴来讲，所谓相似是指力学相似。力学相似包括三个方面，即满足了以下三个相似条件才算力学相似。

### 1.1.1 几何相似

模型(以下标 $m$ 表示)和原型零件(以下标 $e$ 表示)任何相对应的线性尺寸之比恒相等，任意两条对应直线间的夹角保持不变，这就叫做几何相似。这个关系用公式表示为

$$C_L = \frac{L_{ei}}{L_{mi}} \quad (1-1)$$

式中  $C_L$ ——尺寸比例尺，对于选定的模型是一个常数；

$L_{ei}$ ——原型零件的某一个(第 $i$ 项)线性长度；

$L_{mi}$ ——模型上相对应的线性长度。

遵从这个相似条件，当尺寸比例尺  $C_L > 1$  时，模型小于实物，即用同一比例将原型零件缩小制出模型。由于线性尺寸的比例尺为  $C_L$ ，所以截面尺寸  $A$  的比例尺  $C_A$  及体积比例尺  $C_V$  分别应为

$$C_A = \frac{A_{ei}}{A_{mi}} = \frac{L_{ei}^2}{L_{mi}^2} = C_L^2 \quad (1-2)$$

$$C_V = \frac{V_{ei}}{V_{mi}} = \frac{L_{ei}^3}{L_{mi}^3} = C_L^3 \quad (1-3)$$

### 1.1.2 运动相似

原型零件和模型相对应点的位移  $u$  (在强度问题中一般为变

形位移量)、速度 $\frac{du}{dt}$ 及加速度 $\frac{d^2u}{dt^2}$ 保持同一恒定的比例, 叫做运动相似。换句话说, 原型零件和模型的位移场、速度场和加速度场保持几何相似。这个关系用公式表示为

$$C_u = \frac{u_{ei}}{u_{mi}} \quad (1-4)$$

式中  $C_u$ ——位移比例尺。

已知位移比例尺  $C_u$ , 可以推知速度及加速度比例尺如下。

设  $u_{e1}$  及  $u_{m1}$  分别为零件和模型上相对应点在时刻  $t_1$  时的位移,  $u_{e2}$  及  $u_{m2}$  为时刻  $t_2$  时的位移, 于是

$$\frac{u_{e1}}{u_{m1}} = \frac{u_{e2}}{u_{m2}} = C_u$$

又根据比例的性质有

$$\frac{u_{e1} - u_{e2}}{u_{m1} - u_{m2}} = \frac{\Delta u_e}{\Delta u_m} = C_u$$

所以

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta u_m \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta u_e}{\Delta u_m} \right) &= \frac{du_e}{du_m} = \frac{du_e/dt}{du_m/dt} = \frac{v_e}{v_m} \\ &= C_v = C_u \end{aligned} \quad (1-5)$$

用同样的方法, 可以推知:

$$\frac{d^2u_e/dt^2}{d^2u_m/dt^2} = \frac{a_e}{a_m} = C_a = C_u \quad (1-6)$$

亦即在时间  $t$  的比例保持为 1 时, 位移、速度和加速度的比例尺是相等的。

### 1.1.3 动力相似

作用在原型零件和模型上的外力必须保持恒定的比例, 称为动力相似。即原型零件和模型的力场是几何相似的。这个关系用公式表示为

$$C_P = \frac{P_e}{P_m} \quad (1-7)$$

由于  $C_P$  及  $C_L$  已经确定, 所以应力比例尺就可以从上述关系式中推导出来, 而不能任意选取。应力比例尺  $C_\sigma$  为

$$C_\sigma = \frac{\sigma_e}{\sigma_m} = \frac{P_e/A_e}{P_m/A_m} = \frac{P_e/P_m}{A_e/A_m} = \frac{C_P}{C_L^2} \quad (1-8)$$

除了以上三项相似条件外, 在强度问题中还有以下两条补充的相似条件。

#### 1.1.4 与强度有关的物理量的相似

与强度计算有关的物理量一般有材料的弹性模量  $E$  和  $G$ , 泊桑比  $\mu$  以及单位体积的重量  $\gamma$  等。这些量的相似条件表示为原型零件及模型相对应点上的这些量应当分别符合自己恒定的比例, 即

$$C_E = \frac{E_e}{E_m}, \quad C_\mu = \frac{\mu_e}{\mu_m}, \quad C_\gamma = \frac{\gamma_e}{\gamma_m} \quad (1-9)$$

式中  $C_E$ 、 $C_\mu$  及  $C_\gamma$  分别为弹性模量、泊桑比及单位体积重量的比例尺。在比例尺  $C_L$  及  $C_P$  已定的条件下,  $C_E$  和  $C_\gamma$  最好能符合以下关系:

$$\left. \begin{aligned} C_E &= C_\sigma = \frac{C_P}{C_L^2} \\ C_\gamma &= \frac{C_P}{C_L^3} \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

当原型零件及模型分别用单一的材料制成时, 公式(1-9)是一定成立的。但是, 由于实际使用的模型材料的品种有限, 不一定能够同时符合式(1-10)的关系。在此情形下, 由模型实测数据向原型零件复原时, 要进行一些较复杂的运算。 $C_E$  和  $C_\gamma$  不符合式(1-10)的模型, 叫做原型零件的不完全相似模型。

#### 1.1.5 边界条件的相似

模型的边界条件要和原型零件的边界条件相同。例如, 原型

零件是一端固定的悬臂梁, 则模型也应为一端固定的悬臂梁。

## 1.2 相似判据及比例尺方程

机械零件的强度问题通常都是作为弹性问题来处理的。所以, 作为机械零件的模型试验设计方法, 就是解决弹性结构的模型试验设计问题。

根据一般的相似理论, 两个相似的系统必须具有相同的相似判据(或叫做相似准则)<sup>[1]①</sup>。所谓相似判据, 是指系统的物理过程所具有的独立的无量纲变量组。现以例说明如下。

以图 1-1 中悬臂梁截面的应力分析为例, 任意截面  $AA$  上的弯曲应力  $\sigma_b$  为

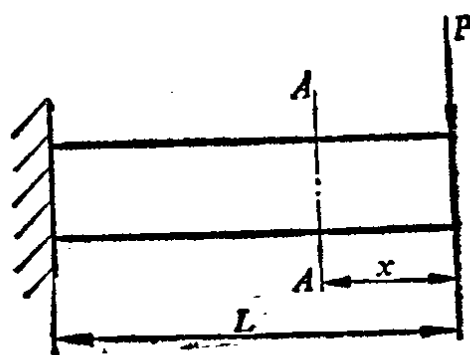


图 1-1

$$\sigma_b = \frac{Px}{W} \quad (a)$$

最大弯曲应力发生在固定端的截面上, 即

$$\sigma_{b \max} = \frac{PL}{W} \quad (b)$$

式中  $W$ ——梁横截面的抗弯模量。

方程(a)及(b)即为系统(本例中为悬臂梁)的物理过程(本例

---

① 本书用带方括号的数字代表各章参考文献的序号。

中为应力)的表达式。根据方程式量纲齐次的原则, 方程中每一项的量纲都是一样的。所以, 我们可以得到一个符合本方程的无量纲变量组为

$$\frac{PL}{\sigma_{b \max} W} = 1 \quad (c)$$

$PL/(\sigma_{b \max} W)$  这个无量纲变量组就是悬臂梁按强度作模型设计时必须满足的相似判据。即对于原型零件和模型来说, 如要两者相似, 则必须

$$\frac{P_e L_e}{\sigma_{be} W_e} = \frac{P_m L_m}{\sigma_{bm} W_m} \quad (d)$$

根据(d)式, 即可找到由模型实测所得的应力  $\sigma_{bm}$  还原到原型零件上的应力的复原公式为

$$\sigma_{be} = \sigma_{bm} \cdot \frac{P_e L_e / W_e}{P_m L_m / W_m} = \sigma_{bm} \cdot \frac{C_P C_L}{C_W} \quad (1-11)$$

式中  $C_W = \frac{W_e}{W_m}$  为截面抗弯模量比例尺。

把公式(1-11)加以变换, 则得到

$$\frac{C_P C_L}{C_\sigma C_W} = 1 \quad (1-12)$$

公式(1-12)叫做比例尺方程。它表示原型零件和模型相似时各有关比例尺应当满足的关系。比例尺方程说明在模型设计时各有关变量的比例尺是不能任意独立地选取, 而必须符合该物理过程所具有的比例尺方程。

关于一个物理过程有几个相似判据的问题, 已由相似理论中称为  $\pi$  定理的相似定理说明<sup>[1]</sup>。现只将该定理引用如下, 证明从略。 $\pi$  定理为:

“如一物理现象中参与的物理量有  $n$  个, 其中包含  $i$  个基本量纲, 则可得到  $n-i$  个无量纲的相似判据。”

仍以上例来讨论。上例中有  $P$ 、 $L$ 、 $\sigma$ 、 $W$  四个物理量, 只有  $P$ 、 $L$  两个基本量纲。因此, 应当有  $4-2=2$  个相似判据。另一个相似判据可以从纯几何的关系求得为(设梁截面为圆形, 直径用  $d$  表示)

$$W = \frac{\pi d^3}{32}$$

于是

$$\frac{\pi d^3}{32W} = 1$$

就是另一个相似判据, 去掉常数, 相似判据还可写成  $d^3/W$ 。根据它可以有

$$\frac{d_e^3}{W_e} = \frac{d_m^3}{W_m}$$

所以

$$C_W = \frac{W_e}{W_m} = \left(\frac{d_e}{d_m}\right)^3 = C_L^3$$

这就是根据第二个相似判据写出的比例尺方程。

如果物理方程中包含有导数, 在求相似判据时, 可将导数直接改为物理量的比, 如  $\frac{du}{dx}$  改为  $\frac{u}{x}$ ,  $\frac{d^2u}{dx^2}$  改为  $\frac{u}{x^2}$  等。这是因为相似判据中所表达的各量间的关系是量纲的关系。现仍以弹性结构的模型设计为例来予以说明。

在弹性力学中已知, 当用位移作为独立变量时, 弹性结构的变形要满足拉梅(Lamé)方程<sup>[3]</sup>:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \nabla^2 u + \rho X &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial y} + G \nabla^2 v + \rho Y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial z} + G \nabla^2 w + \rho Z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$



式中

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} = \frac{2\mu G}{1 - 2\mu}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \text{拉普拉斯算子}$$

$X, Y, Z$ ——分别为单位质量的体积力沿  $x, y, z$  轴向分量。

式(1-13)中的物理量共有六个，即位移( $u, v, w$ )、线性尺寸( $x, y, z$ )、弹性模量  $G$ (或  $E$ )、泊桑比  $\mu$ 、材料密度  $\rho$  和时间  $t$ 。基本量纲为线性尺寸  $L$ 、力  $P$  和时间  $t$ ，只有三个。所以应当有  $6 - 3 = 3$  个独立的相似判据。按照相似判据和比例尺方程的一致性关系，相似判据可以通过以下的方法找出。

根据量纲齐次的原则，只要用方程中的任一项去除整个方程，则所得的各项都是无量纲的变量组。把方程(1-13)展开(为简单计，只展开三个公式中的第一个)得：

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho X = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

把以上各项中的导数换成变量，则各项分别为  $\lambda \frac{\theta}{x}$ ； $G \frac{\theta}{x}$ ； $G \frac{u}{x^2}$ ；

$G \frac{u}{y^2}$ ； $G \frac{u}{z^2}$ ； $\rho X$ ； $\rho \frac{u}{t^2}$ 。用第一项去除各项，则各项分别变为：1；

$\frac{G}{\lambda}$ ； $\frac{Gu x}{\lambda \theta x^2}$ ； $\frac{Gu x}{\lambda \theta y^2}$ ； $\frac{Gu x}{\lambda \theta z^2}$ ； $\frac{\rho X x}{\lambda \theta}$ ； $\frac{\rho u x}{\lambda \theta t^2}$ 。以上第 3、4、5 项中， $\theta$  为无量纲量， $u$  的量纲为线性尺寸，故  $ux$  与  $x^2, y^2, z^2$  均为线性尺寸的平方，可直接对消。因此，从无量纲变量组来说，第 2、3、4、5 项都是相同的，都是  $\frac{G}{\lambda}$ 。第六项中去掉无量纲量  $\theta$ ，则余留的无量纲变