解析函数论简明教程

（第三版）

[苏]A. И. 马库雪维奇 著

阎昌龄 吴望一 译

高等教育出版社

解析函数论简明教程

(第三版)

[苏] A. И. 马库雪维奇 著

阎昌龄 吴望一 译

高等教育出版社

（京）112号

本书第一版系根据苏联国家技术理论书籍出版社(Гостехиздат)1957年出版的 А. И. Маркушевич 所著«Краткийгкурс теории аналитических функций»由阎昌龄、吴望--同志译出的，由我社分别于1958年、1959年分上、下册出版．现在的第三版是根据苏联科学出版社(«Наука»)1978年出版的原书第四版，由阎昌龄同志修订、补译的．

原书新版在内容上与旧版有很大变动，主要是增加了不少内容，同时为了不使本书篇幅过大，原作者又删去了有关讲述流体力学平面问题的部分．

本书可作为高等学校数学专业的教学参考书．

解析函数论简明教程

（第三版）

［苏］ А. И. 马库雪维奇 著

阎昌龄　吴望一　译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

民族印刷厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张 13.875　字数 332.000

1992年5月第3版　1992年5月第1次印刷

印数 0001—3 100

ISBN 7-04-000808-4/O·314

定价　8.50元

第一版序

本书是按大学数学物理系的教学大纲编写的解析函数论教科书．用来说明一般原理及方法的很多例子用小号铅字印刷．某些(但是不多)补充基础教程的问题和细节也用小号铅字印刷．对于希望深入这一领域的读者，请阅读附在本书末所列的论著．

在这本书的准备中作者广泛地使用了自著“解析函数论”①一书．

作　者

① 有中译本，黄正中等译，高等教育出版社，1957——译者．

第四版序

自从前一版(1966)问世以来大学数学系的教学大纲发生了一系列变化,有了增补. 由于这种新的要求,也由于自学本课程的读者的要求,作者改写了或增写了本书的某些节. 例如,增加了关于解析函数展开成多项式级数的Runge定理,扩大了关于整函数的最大模,阶和型的内容,关于有限型整函数展开为无限乘积的内容,增加了Phragmen-Lindelöf原理及其在研究整函数的增长指标中的应用,叙述了椭圆函数的一般性质而且讨论了Weierstrass的函数$\mathscr{P}(z)$和$\mathscr{P}'(z)$,叙述了沿曲线开拓的概念并证明了单值性(Monodromy)定理,考察了Borel变换在解析开拓中的应用,分析了超椭圆积分逆转的问题,最后叙述了Schwarz模函数及其在Picard(小)定理证明中的应用. 在第十章第7节中增加了广义辐角原理,并用以简化了边界对应定理的证明.

为了尽可能保持本书的篇幅,这一版略去了原先书末所述关于流体力学的平面问题. 有兴趣的读者可以参看有关的专门书籍. 供进一步研究用的文献目录经过了修订和更新.

作　者

目　录

引 论

1. 解析函数论的对象 本书叙述的对象有两个名称：解析函数论和复变函数论. 每个名称只强调了事情的一面，因为我们将要研究复变解析函数.

如果 $f(x)$ 是定义在某个(有限的或无限的)区间 (a, b) 内的实变量 x 的函数，而且在这区间的每个点 x_0 的邻域内都可以把 $f(x)$ 表为按 $x-x_0$ 的非负整幂展成的幂级数的和

$$f(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\cdots+A_n(x-x_0)^n+\cdots,$$

那末，$f(x)$ 叫做在这区间内是**解析的**.

任意的多项式，函数 e^x, $\sin x$, $\cos x$ 在整个数轴上是解析的；每个有理函数，函数 $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\csc x$ 在不含有该函数无定义(变成无限大)的点的区间内是解析的；函数 $\ln x$ 在区间 $(0, \infty)$ 内是解析的. 所有这些论断都容易验证. 例如，如果 $x_0>0$，那末当 $|x-x_0|<|x_0|$ 时

$$\ln x=\ln x_0+\ln\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)=\ln x_0+\sum_1^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-x_0)^n}{nx_0^n}.$$

解析函数的和，差，积，商(在除数不取零值的区间内)是解析函数；解析函数的导数同积分也是解析的. 下面两个命题在一些补充条件下也成立：a) 解析函数的反函数是解析的；b) 如果 $A_j(x)$ $(j=0, 1, 2, \cdots, n)$ 是解析函数，那末由方程

$$A_0(x)+A_1(x)f(x)+\cdots+A_n(x)[f(x)]^n=0$$

或方程

$$A_0(x)+A_1(x)\frac{df(x)}{dx}+\cdots+A_n(x)\frac{d^nf(x)}{dx^n}=0$$

确定的函数$f(x)$是解析的.

由这些命题出发，容易明白，由数学分析、几何学、力学和物理学的问题引出来的一切最重要的函数都是解析的. 事实上，不但上述的初等函数是解析的，而且如Gamma函数(Γ函数)、圆柱函数(Bessel函数)、椭圆函数和其他许多函数在相应的区间内都是解析的. 这种情况说明，为什么解析函数在数学以及它的应用中起着这样重要的作用，同时，这种情况也是将解析函数的一般理论作为独立的数学课程的充分理由.

2. 复变解析函数 在研究最简单的解析函数——多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \quad (a_n\neq 0)$$

的时候，已经显示出来把它看作复变函数是适当的.

事实上，只有采取这种看法才能表明，使这函数取每个值(特别是零)的x值有n个(其中有些可能重合). 由此还可以得出以下的基本推论，即，多项式可以表示成一次因子的乘积

$$f(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n),$$

以及其他和这有关的命题.

自然，把多项式当作复变函数研究时，它的系数可以取任意的复数值. 同样，在研究复变量$z=x+iy$的最一般的解析函数时，所用幂级数$\sum\limits_0^\infty A_n(z-z_0)^n$中的系数$A_0, A_1, \cdots, A_n, \cdots$，以及数$z_0$都是复数. 如果在复平面(表示复数的平面)上有某个点集，在这集的任意一点的邻域内，函数$f(z)$可以用幂级数的和表示为:

$$f(z)=\sum_0^\infty A_n(z-z_0)^n,$$

则称$f(z)$在这点集上是解析的.

以后我们可以看到，数学分析的基本概念一般来说都可以推广到复变函数上来，其中包括导数$f'(z)$的概念及沿着某个平面曲

线 L 的积分 $\int_L f(z)dz$ 的概念.

在本教程中将要证明以下的基本事实. 下列四种条件中的任一种，都是函数 $f(z)$ 在复变量 z 平面的某个圆内为解析函数的必要和充分条件:

a) 函数 $f(z)$ 在圆内每一点有导数 $f'(z)$;

b) 若 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$，其中 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 是实变量 x 和 y 的两个实函数，那末 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 是两次可微函数，满足 Laplace 微分方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0,$$

而且以方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

彼此联系着;

c) 函数 $f(z)$ 在圆内连续，而且它沿圆内任意闭曲线的积分等于零;

d) 在半径较小的任一同心圆内函数 $f(z)$ 可以用多项式逼近到任意的精确度.

在这些命题之上建立了全部复变解析函数的理论. 性质 a), b), c), d) 的任意一个可以作为复变解析函数概念的定义基础. 在本教程中将用以性质 a) 为基础的定义，而只是在以后才证明这一定义和用幂级数的定义是等价的.

我们指出，解析函数论在物理及力学中的许多应用是以性质 b) 为基础的; 例如，所谓平面上的热平衡或电平衡问题、液体或气体稳恒流沿平面闭路的绕流问题，都归结到 Laplace 方程，而 Laplace 方程的种种解构成全部解析函数。

第一章　复数及其几何表示

1. 复数在平面上的几何表示　在高等代数教程中叙述了复数的理论①. 这里我们只回忆一下复数理论的基本定义及结论，并且为了便于以后的讨论，再作一些补充.

每个复数 c 具有 $a+bi$ 的形状，其中 a 和 b 是实数，而 i 是所谓虚数单位；a 叫做 c 的实部，b 叫做 c 的虚部. 记作：$a=\operatorname{Re} c$, $b=\operatorname{Im} c$(Re 是拉丁文 realis (实的)开首两个字母，Im 是imaginarius(虚的)开首两个字母). 两个复数 c' 和 c'' 当且只当 $\operatorname{Re} c'=\operatorname{Re} c''$, $\operatorname{Im} c'=\operatorname{Im} c''$ 的时候相等. 如果 $\operatorname{Im} c=0$，那末 $c=\operatorname{Re} c$ 是实数；如果 $\operatorname{Im} c\neq 0$，那末 c 叫做虚数，如果同时 $\operatorname{Re} c=0$，就叫做纯虚数.

为了在平面上作复数的几何表示，选取 Descartes 直角坐标系，而且把每个点 $M(x, y)$ 看作是复数 $x+yi$ 的象；数 $x+yi$ 叫做点 M 的附标. 这一约定建立了平面上一切点的集和一切复数的集间的双方单值的对应. 并且一切实数的集由横坐标轴表示，因此叫做实轴，一切虚数的集由不在横坐标轴上的点集表示，特别地，纯虚数集由纵坐标轴表示，叫做虚轴(注意，虚轴上有一个点——坐标原点表示实数 0). 表示复数的平面叫做复平面(有时叫做 Gauss 平面)，或按照表示复数的字母是 z, w, …而叫做 (z) 平面，(w) 平面等等.

"复数 $x+iy$"和"点 $x+iy$"用作同义语.

为了得到数 $z=x+iy$ 的几何表示，除了用点 (x, y) 以外，还用

---

① 例如，参看 А. Г. Курош 著高等代数教程 (1959 年修订第六版，有中译本，柯召译，人民教育出版社，1962).

在坐标轴上的投影是 x 和 y 的矢量来表示；它的起点可以安放在任意点（图 1）. 因此，可以把“复数”和“矢量”用作同义语. 矢量的长度 $|z|$ 叫做复数 z 的模，实轴的正方向和矢量之间的角度 $\operatorname{Arg} z$（这里假定 $z\neq 0$）叫做 z 的辐角；同一个 z 的辐角可以相差 2π 的整数倍. 但只有一个辐角的值 α 满足条件 $-\pi<\alpha\leqslant\pi$；它叫做辐角的主值，而且用 $\arg z$ 表示. 显然

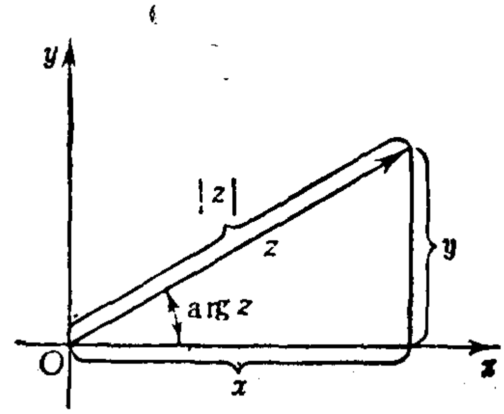

图 1

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi,$$

其中 k 表示任意整数.

我们还要指出下列的关系式：

若 $z=x+iy$，那末 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$；

当 $x>0$ 时 $\arg z=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$，

当 $x<0$ 而 $y\geqslant 0$ 时 $\arg z=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}+\pi$，

当 $x<0$ 而 $y<0$ 时 $\arg z=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}-\pi$.

z 的实部和虚部可以用模和辐角表示为：

$\operatorname{Re} z=|z|\cos\operatorname{Arg} z$，$\operatorname{Im} z=|z|\sin\operatorname{Arg} z$；因此，$z$ 本身可以表示成 $z=|z|(\cos\operatorname{Arg} z+i\sin\operatorname{Arg} z)$ 的形式，这个式子叫做 z 的三角形式.

二复数 $x+iy$ 与 $x-iy$ 叫做是（相互）共轭的. 如果其中之一用 z 表示，那末另一个用 $\bar z$ 表示. 显然，点 z 和 $\bar z$ 关于实轴是对称的. 因此 $|z|=|\bar z|$；此外，如果 z 不是负实数，那末 $\arg z=-\arg\bar z$；如果 z 是负实数，那末 $\arg z=\arg\bar z=\pi$.

2. 复数的运算 复数的加法和乘法运算由下列的等式定义：

$$(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2),$$

$$(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1),$$

而减法和除法定义作相应的逆运算. 由这些定义推出下列的重要推论: 加法和乘法具有可交换和可结合的性质,乘法对于加法具有可分配的性质; 两个因子的乘积,当且只当两因子中至少有一个是零时才等于零; 减法总是可能的,除法在除数不等于零的条件下是可能的. 这一切表明复数构成域. 我们指出一个乘法的特殊情形: 若 $c=a+ib$, 那末 $c\cdot\bar{c}=a^2+b^2=|c|^2$, 由此 $|c|=\sqrt{c\cdot\bar{c}}$.

复数 $c_1=a_1+ib_1$ 和 $c_2=a_2+ib_2$ 的加法在几何表示中按照矢量加法规则来进行(图 2, a). 差 c_1-c_2 可以用起点在点 c_2, 终点在点 c_1 的矢量来表示(图 2, b). 由此推出, 二点 $c_1=a_1+ib_1$, $c_2=a_2+ib_2$ 的距离等于差的模: $\rho(c_2, c_1)=|c_1-c_2|$. 我们还要指出关于和及差的模的重要不等式

$$|c_1+c_2|\leqslant|c_1|+|c_2|,\quad |c_1-c_2|\geqslant||c_1|-|c_2||;$$

等号只在矢量 c_1 和 c_2 共线而且同方向的时候成立.

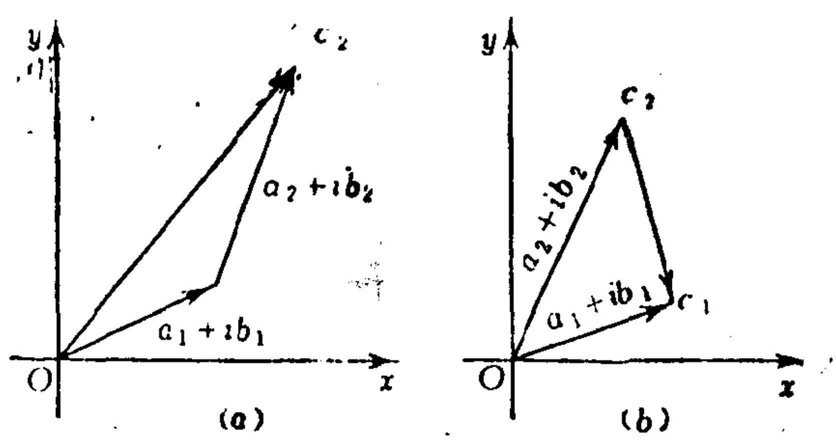

图 2

第一个不等式可以推广到任意个相加项的情形:

$$|c_1+c_2+\cdots+c_n|\leqslant|c_1|+|c_2|+\cdots+|c_n|;$$

这里的等式也只能在所有 n 个矢量 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 共线而且同方向的条件下成立.

为了得到乘法的几何解释,将 c_1 和 c_2 写成三角形式

$$c_1=|c_1|(\cos\operatorname{Arg}c_1+i\sin\operatorname{Arg}c_1),$$
$$c_2=|c_2|(\cos\operatorname{Arg}c_2+i\sin\operatorname{Arg}c_2);$$

由乘法的定义得到:

$$c=c_1c_2=|c_1||c_2|[\cos(\operatorname{Arg}c_1+\operatorname{Arg}c_2)+i\sin(\operatorname{Arg}c_1+\operatorname{Arg}c_2)];$$

由此得到:

$$|c_1\cdot c_2|=|c_1||c_2|,\ \operatorname{Arg}(c_1\cdot c_2)=\operatorname{Arg}c_1+\operatorname{Arg}c_2$$

(最后的等式应该理解如下:$\operatorname{Arg}c_1$ 和 $\operatorname{Arg}c_2$ 的值的一切可能的和所成的集,与 $\operatorname{Arg}(c_1\cdot c_2)$ 值的集一样). c_1 乘以 c_2 的几何表示,就是矢量 c_1 伸长 $|c_2|$ 倍而且绕自己的起点旋转一个角 $\operatorname{Arg}c_2$. 对于商 $c_1:c_2=\frac{c_1}{c_2}(c_1\neq0,\ c_2\neq0)$ 我们得到等式

$$|c_1:c_2|=|c_1|:|c_2|,\ \operatorname{Arg}(c_1:c_2)=\operatorname{Arg}c_1-\operatorname{Arg}c_2.$$

由最后的等式推出,矢量 c_1 与 c_2 之间的角度,由 c_2 到 c_1 按反时针方向计算(可以相差 2π 的整数倍),等于 $\operatorname{Arg}\frac{c_1}{c_2}$:

$$\widehat{c_2,c_1}=\operatorname{Arg}\frac{c_1}{c_2}.$$

由乘法规则得到:

$$c^n=|c|^n(\cos n\operatorname{Arg}c+i\sin n\operatorname{Arg}c),$$

其中 n 是自然数; 显然,这公式当 $n=0(c^0=1)$ 时也是成立的. 注意到 $c^{-n}=\frac{1}{c^n}$,我们得到:

$$c^{-n}=|c|^{-n}[\cos(-n\operatorname{Arg}c)+i\sin(-n\operatorname{Arg}c)].$$

因此,对于任意整数 m 下列公式成立:

$$c^m=|c|^m(\cos m\operatorname{Arg}c+i\sin m\operatorname{Arg}c).$$

如果 p 和 q 是整数, $q\geqslant2$ 而且分数 $\frac{p}{q}$ 是不可约的,那末公式

$$c^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{c^p}=\sqrt[q]{|c|^p}_{+}\left[\cos\left(\frac{p}{q}\operatorname{Arg}c\right)+i\sin\left(\frac{p}{q}\operatorname{Arg}c\right)\right]$$

的右边给出 $c^{\frac{p}{q}}$ 的 q 个相异的值，其中 $\sqrt[q]{|c|^p}_{+}$ 表示 $|c|^{\frac{r}{q}}$ 的正值.

为了得到全部相异的值，只要固定 Arg c 的某一个值，设此值为 φ，在等式右边用下列的 q 个值：$\varphi,\ \varphi+2\pi,\ \cdots,\ \varphi+(q-1)2\pi$ 代入 Arg c.

3. 序列的极限　复数序列 $\{c_n=a_n+ib_n\}$ 在下列情况下叫做收敛于极限 $c=a+ib$（记作：$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=c$ 或 $c_n\to c,\ n\to\infty$），如果对于任意的 $\varepsilon>0$ 有正数 $N(\varepsilon)$ 存在，使当 $n>N(\varepsilon)$ 时 $|c_n-c|<\varepsilon$. 因为当 $n>N(\varepsilon)$ 时 $|a_n-a|\leqslant|c_n-c|<\varepsilon$ 和 $|b_n-b|\leqslant|c_n-c|<\varepsilon$，所以有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. 因此，最后的这两个关系式是 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+ib_n)=a+ib$ 的推论. 反之，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，那末当 $n>N_1(\varepsilon)$ 时 $|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ 和 $|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$；因此，当 $n>N_1(\varepsilon)$ 时 $|a_n+ib_n-(a+ib)|=|c_n-c|=\sqrt{(a_n-a)^2+(b_n-b)^2}_{+}<\varepsilon$，这就是说 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=c$.

因此，关系式 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+ib_n)=a+ib$ 和两个关系式 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ 是等价的. 这一事实使得实数序列极限的一切理论都可以转移到复数序列的情形. 例如，我们得到下列收敛的必要和充分条件（Cauchy 准则）：对于每个 $\varepsilon>0$ 有 $N(\varepsilon)$ 存在，使当 $n>N(\varepsilon)$ 而 p 是任意自然数的时候 $|c_{n+p}-c_n|<\varepsilon$.　此外，若 $\lim\limits_{n\to\infty}c'_n=c'$，$\lim\limits_{n\to\infty}c''_n=c''$，那末

$$\lim_{n\to\infty}(c'_n\pm c''_n)=c'\pm c'',\quad \lim_{n\to\infty}(c'_n\cdot c''_n)=c'\cdot c'',\quad \lim_{n\to\infty}\frac{c'_n}{c''_n}=\frac{c'}{c''}$$

[最后这个式子在 $c''_n\neq0\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ 而且 $c''\neq0$ 的条件下成立].

我们把以点 c 为中心以任意的 ρ 为半径的圆的内部叫做点 c 的 ρ-邻域. 显然，点 z 当且只当 $|z-c|<\rho$ 的时候属于这一邻

域. 现在对序列$\{c_n\}$的极限的定义可以给予下列的几何说法: 若对于任意的 $\varepsilon>0$, 序列中从某一个号码开始的一切点皆属于点 c 的 ε-邻域, 则称序列$\{c_n\}$收敛于极限 c.

请读者证明, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=c$ 总可以推出 $\lim\limits_{n\to\infty}|c_n|=|c|$, 此外, 如果 $c\neq 0$, 那末, 有 $\mathrm{Arg}\,c_n$ 的值的序列存在, 它的极限等于 $\mathrm{Arg}\,c$ 的一个值; 可以取辐角的主值的序列为这样的序列, 但当 c 是负实数时, 而 c_n 中既有无限多个点在实轴之上又有无限多个在实轴之下的情形除外. 我们约定将上述序列 $\{c_n\}$ 的辐角的性质写作: $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{Arg}\,c_n=\mathrm{Arg}\,c$. 反之, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{Arg}\,c_n=\mathrm{Arg}\,c$ 而且 $\lim\limits_{n\to\infty}|c_n|=|c|$, 那末 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=c$.

4. 无限大和球极投影 为了解析函数论的需要在上述的正常的(有限的)复数以外还要补充一个非正常的(无限的)复数, 用符号 ∞ 表示; 叫做无限大或无限远点. 无限远点的处理以下列定义和法则为基础. 以坐标原点为中心, 以 ρ 为半径的圆的外部叫做点 ∞ 的 ρ-邻域. 显然, 点 z 当且只当 $|z|>\rho$ 时属于这一邻域.

若对于任意的 $\rho>0$ 序列 $\{c_n\}$ 从某个号码开始的一切点都属于无限远点的邻域 $|z|>\rho$, 换句话说, 若对于任意的 $\rho>0$ 有 $N(\rho)>0$ 存在使得 $n>N(\rho)$ 时 $|c_n|>\rho$; 那末序列 $\{c_n\}$ 叫做收敛于 ∞ (记作 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$). 因此, $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$ 的条件与 $\lim\limits_{n\to\infty}|c_n|=+\infty$ 的条件等价. 还要注意, 在 $c_n\neq 0$ 的情形, $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$ 的条件与 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{c_n}=0$ 的条件等价.

对于非正常的复数没有引入实部和虚部的概念以及辐角的概念, 精确地说, 这些概念都认为没有意义(注意, 辐角的概念对于数 0 也没有意义). 至于复数 ∞ 的模, 则使用记号 $+\infty$: $|\infty|=$ $=+\infty$.