现代数学基础丛书

代数体函数与常微分方程

何育赞　萧修治　著

科学出版社

现代数学基础丛书

代数体函数与常微分方程

何育赞　萧修治　著

科学出版社

1988

内 容 简 介

本书系统地介绍了亚纯函数、代数体函数 Nevanlinna 理论和整函数 Wiman-Valiron 理论，以及它们与复域的常微分方程理论相结合的基本内容和若干新研究．本书可供大学数学系高年级学生、研究生、数学和其他科技工作者阅读和参考．

现代数学基础丛书

代数体函数与常微分方程

何育赞　萧修治　著

责任编辑　张晓凌　夏墨英

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1988年2月第一版　开本：850×1168 1/32

1988年2月第一次印刷　印张：9 3/4

印数：0001—3,850　字数：255 000

ISBN 7-03-000149-4/O 44

定价：2.80 元

序　言

早在十八世纪数学家们已经发现，用已知初等函数的有限组合来表示大范围通解的常微分方程非常罕见．但是，A. Cauchy曾证明，在极为广泛的假设下，复域中常微分方程的解是复变数的解析函数．因此，把微分方程的解视为由方程定义的一类解析函数，应用复变函数的一般理论直接从微分方程出发研究解的性质，或者对解的性质提出某些要求后研究相应微分方程的性状，便成为复域中微分方程理论的基本内容，亦称为常微分方程解析理论．它与复变函数的一般理论的发展互相平行、密切相关，常常是其中一个理论的发展影响着另一个理论的发展．

本世纪二十年代由著名芬兰数学家 R. Nevanlinna 创立的亚纯函数值分布理论是本世纪最重大的数学成就之一，它是现代亚纯函数论的基础，它对数学的其它分支产生重大的影响，如今已不仅仅停留在单个变数亚纯函数的研究上．值得指出的是，在 1930 年前后，G. Valiron, E. Ullrich 和 H. Selberg 等人分别用不同的方法对代数体函数建立了相当于亚纯函数的 Nevanlinna 基本定理．代数体函数是一类多值解析函数．在 H. Poincaré 最初引入时，G. Darboux 即认为它是一类重要函数，后 P. Painlevé 在研究常微分方程时也遇到这一函数，其理论至今仍为许多人所研究．Nevanlinna 理论对常微分方程解析理论的发展亦产生了重大的影响．在亚纯函数与代数体函数 Nevanlinna 理论建立的初期，日本数学家吉田耕作便应用此理论于一类非线性微分方程的研究，他对于 J. Malmquist 提出的重要定理给出了一个简明的证明，并大大推广了原先的结果．这一研究引起了广泛的注意．本世纪五十年代联邦德国数学家 H. Wittich 及其学生系统地研究了 Nevanlinna 理论对常微分方程理论的意义，使得这一理论成为研究复域中常微分方程大范围解析解的重要工具．其后，苏联、美国、芬兰、

联邦德国和日本等国的数学家进一步发展了这个方向的研究，取得一系列重要的进展.五十年代末以来，作者在老师熊庆来教授的指导下开展亚纯函数与代数体函数 Nevanlinna 理论及其在常微分方程中的应用研究，并得到若干较为理想的结果.

本书仅就亚纯函数、代数体函数 Nevanlinna 理论和整函数 Wiman-Valiron 理论以及它们与常微分方程相结合的基本内容和若干新研究作一系统介绍. 本书共五章. 第一章介绍 Wiman-Valiron 理论，它在常微分方程的研究中有重要的作用，应用它常能得到精细的结果.第二章介绍 Nevanlinna 理论，着重介绍代数体函数值分布理论的基本内容和某些进一步的结果，其中包括熊庆来、何育赞关于第二基本定理的推广以及重值和唯一性定理的结果；亚纯函数值分布理论将作为特殊情形作一概述. 第三章讲述常微分方程解析理论的初步内容. 第四、五章介绍 Nevanlinna 理论在常微分方程中的应用，内容有 Malmquist-Yosida-Wittich 定理及其推广，常微分方程大范围解析解某些性质的研究，其中还有作者得到的对于一般高阶代数微分方程亚纯解和代数体解的精确形式的 Malmquist 型定理和解的增长性估计、值分布性质等结果.

本书前三章的内容都自成系统，读者可以独立进行阅读. 此外，如果读者只要求了解亚纯函数理论和微分方程单值解的内容，则可跳过代数体函数理论和方程多值解析解的部分. 凡具有大学复变函数和常微分方程课程知识的读者都能够阅读本书.

本书的主要内容曾分别由何育赞在华东师范大学、北京大学和福建师范大学数学系，以及萧修治在武汉大学数学系为高年级学生、研究生和青年教师讲授过. 本书是在这些讲义的基础上写成的，其中第一、二、四章和第五章第六节由何育赞撰写，第三、五章由萧修治撰写.

本书的编写曾得到北京大学庄圻泰教授的亲切关怀、鼓励和指导，作者在此表示衷心的感谢. 福建师范大学谢晖春教授仔细审阅了本书的初稿，并提出许多宝贵的意见，作者也在此表示衷心的感谢.

目　　录

第一章　Wiman-Valiron 理论

整函数是整个复平面 C 内的全纯函数。根据 Weierstrass 的观点，一个这样的函数能表为全平面内收敛的幂级数 $w(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，它在全平面代表此函数而无须进行解析开拓。若此幂级数仅具有限多项，则 $w(z)$ 为一多项式；若有无穷多项，则 $w(z)$ 称为超越整函数。本章我们主要从整函数的幂级数表示式出发，概述整函数的若干基本性质，着重论述 Wiman-Valiron 理论，后者描述整函数 $w(z)$ 在其达到最大模的点附近的性质。此理论在复域的常微分方程研究中具有重要的作用。

§1.1　最大模

设 $w(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 为一整函数，令 $M(r,w)=\max_{|z|\leqslant r}\{|w(z)|\}$ 表示 $w(z)$ 在闭圆 $\overline{D}_r=\{z,|z|\leqslant r\}$ 上的最大模。由于 $|w(z)|$ 在 $\overline{D}_r$ 上连续，因此必在 $\overline{D}_r$ 的某些点处达到最大值。最大模原理进一步断言：这些点必在圆周 $\partial D_r=\{z,|z|=r\}$ 上，即 $M(r,w)=\max_{|z|=r}\{|w(z)|\}$。最大模原理能由全纯函数实现的映照的几何性质得到直接的说明，亦能用分析的方法加以证明。由最大模原理立即导出 $M(r,w)$ 是 r 的增函数，并且容易得出 $M(r,w)$ 是 r 的连续函数。J. Hadamard[1] 更进一步指出，$\log M(r,w)$ 是 $\log r$ 的凸函数。这一结果被称为 Hadamard 三圆定理，叙述如下：

定理 1.1　设 $w(z)(\not\equiv 0)$ 在 $|z|<R$ 内全纯，则对于 $0<r_1<r<r_2<R$ 有

$$\log M(r,w) \leqslant \frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1} \log M(r_1, w)$$

$$+ \frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1} \log M(r_2, w). \tag{1.1.1}$$

证明 设 p, q 为两整数，且 $q > 0$. 令

$$h(z) = z^p\{w(z)\}^q.$$

此时，$h(z)$ 在 $r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2$ 上全纯. 由最大模原理，

$$\operatorname*{Max}_{|z|=r}\{|h(z)|\} \leqslant \operatorname{Max}\{\operatorname*{Max}_{|z|=r_1}\{|h(z)|\}, \operatorname*{Max}_{|z|=r_2}\{|h(z)|\}\}.$$

由此

$$r^p\{M(r,w)\}^q \leqslant \operatorname{Max}\{r_1^p[M(r_1,w)]^q, r_2^p[M(r_2,w)]^q\}.$$

令

$$\alpha = \frac{\log M(r_2,w) - \log M(r_1,w)}{\log r_1 - \log r_2}.$$

对任意给定的 $\varepsilon > 0$，可选取 p 和 q，使得

$$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{\log r_2 - \log r_1},$$

即有

$$\frac{p}{q} \leqslant \frac{\varepsilon}{\log r_2 - \log r_1} + \alpha,$$

$$-\frac{p}{q} \leqslant \frac{\varepsilon}{\log r_2 - \log r_1} - \alpha.$$

如果 $\operatorname*{Max}_{r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2}\{|h(z)|\} = r_1^p\{M(r_1,w)\}^q$，则有

$$\log M(r,w) \leqslant -\frac{p}{q}(\log r - \log r_1) + \log M(r_1,w)$$

$$\leqslant \log M(r_1,w) \frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1} + \log M(r_2,w)$$

$$\times \frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1} + \varepsilon.$$

如果 $\operatorname*{Max}_{r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2}\{|h(z)|\} = r_2^p\{M(r_2,w)\}^q$，则同样可证明上式成立.

令 $\varepsilon \to 0$ 即得所要求的不等式 (1.1.1).

定理 1.2 设 $P(z)=\sum_{n=0}^{p}a_nz^n$ 是 p 次多项式，则有

$$\lim_{r\to\infty}\frac{M(r,P)}{r^p}=|a_p|; \tag{1.1.2}$$

反之，对任一整函数 $w(z)$，若存在 $q\geqslant 0$，使得

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{M(r,w)}{r^q}=a<\infty, \tag{1.1.3}$$

则 $w(z)$ 必为次数不大于 q 的多项式。

证明 首先，有

$$|P(z)|=|z|^p|\{a_p+R_p(z)\}|,$$

其中 $R_p(z)=\sum_{n=0}^{p-1}a_nz^{n-p}$。于是对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正数 r_0，使得当 $|z|=r\geqslant r_0$ 时，有

$$|R_p(z)|\leqslant\sum_{n=0}^{p-1}|a_n|r^{n-p}<\varepsilon.$$

因此，当 $r\geqslant r_0$ 时，有

$$|a_p|-\varepsilon<\frac{M(r,P)}{r^p}<|a_p|+\varepsilon,$$

由此即得 (1.1.2)。

其次，若 (1.1.3) 成立，则存在 $r_j\to\infty$，使得

$$\frac{M(r_j,w)}{r_j^q}<a+1.$$

由 $w(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的系数的表式 $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{w(z)dz}{z^{n+1}}$，立即得到 Cauchy 不等式

$$|a_n|\leqslant\frac{M(r,w)}{r^n}, \tag{1.1.4}$$

于是有

$$|a_n|<(a+1)r_j^{q-n}.$$

令 $j\to\infty$，便导出当 $n>q$ 时，有 $a_n=0$。命题证毕。

推论 若 $w(z)$ 为超越整函数，则对任意 $q>0$，有

$$\lim_{r\to\infty}\frac{M(r,w)}{r^q}=\infty.$$

众所周知，一解析函数 $w(z)=u(z)+iv(z)$ 本质上为其实部 $u(z)$（或虚部 $v(z)$）所确定．故由 Schwarz 公式

$$w(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}d\theta+iv(0),\ \zeta=Re^{i\theta}$$

立即可得 $M(r,w)$ 的估计，它能由 $u(\zeta)$ 在 $|\zeta|=R(>r)$ 上的最大模和 $|w(0)|$ 所界囿．下面的定理将给出较精细的结果．

设 $w(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 为非常数整函数，$A(r,w)=\operatorname*{Max}_{|z|\leqslant r}\{u(z)\}$．由于 $M(r,e^{w(z)})=e^{A(r,w)}$ 是 r 的严格增函数，因此 $A(r,w)$ 也是 r 的严格增函数．我们有

定理 1.3 (**Hadamard-Borel-Carathéodory**) 设 $w(z)$ 为非常数整函数，则对于 $0\leqslant r<R$，有

$$M(r,w)\leqslant\frac{2r}{R-r}A(R,w)+\frac{R+r}{R-r}|w(0)|,\tag{1.1.5}$$

并且对所有 n，有

$$|a_n|r^n\leqslant\operatorname{Max}\{4A(r,w),0\}-2\operatorname{Re}w(0).\tag{1.1.6}$$

证明 令 $a_n=\alpha_n+i\beta_n,z=re^{i\theta}$，则

$$u(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n\cos n\theta-\beta_n\sin n\theta)r^n.$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n$ 收敛，故上述级数一致收敛．分别乘上式两边以 $\cos n\theta$ 和 $\sin n\theta$ 并逐项积分便得

$$\left.\begin{aligned}\alpha_nr^n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})\cos n\theta d\theta,\\ \beta_nr^n&=\frac{-1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})\sin n\theta d\theta,\end{aligned}\right\}\quad n\geqslant1$$

和

$$\alpha_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})d\theta.$$

于是当 $n \geqslant 1$ 时，有

$$|a_n|r^n = \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta\right| \leqslant \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|d\theta.$$

因此

$$|a_n|r^n + 2\alpha_0 \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \{|u(re^{i\theta})| + u(re^{i\theta})\}d\theta. \quad (1.1.7)$$

现分两种情形加以讨论. 若 $A(r,w) \leqslant 0$，则

$$|u(re^{i\theta})| + u(re^{i\theta}) = 0,$$

由 (1.1.7) 即得 (1.1.6)；若 $A(r,w) > 0$，则 (1.1.7) 成为

$$|a_n|r^n + 2\alpha_0 \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 2A(r, w)d\theta = 4A(r, w),$$

由此亦得 (1.1.6).

下面证明 (1.1.5). 若 $w(0) = 0$，从而 $A(0,w) = 0$. 注意到 $A(r, w)$ 是 r 的严格增函数，因此当 $R > 0$ 时，$A(R, w) > 0$，于是由 (1.1.7) 可得

$$|a_n| \leqslant \frac{2A(R, w)}{R^n}, \quad (1.1.8)$$

由此得

$$M(r, w) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|r^n \leqslant 2A(R, w) \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n = \frac{2r}{R-r}A(R,w).$$

今若 $w(0) \neq 0$，则应用上式于 $w(z) - w(0)$ 便得

$$|w(z) - w(0)| \leqslant \frac{2r}{R-r}\operatorname*{Max}_{|\zeta|<R}\{\mathrm{Re}(w(\zeta) - w(0))\}$$

$$= \frac{2r}{R-r}A(R,w) - \frac{2r}{R-r}\mathrm{Re}w(0).$$

注意到 $-\mathrm{Re}w(0) \leqslant |w(0)|$，即得 (1.1.5).

应用 (1.1.8)，类似于定理 1.2 的证明可得

推论 设 $w(z)$ 为一整函数，若存在 $q \geqslant 0$ 使得

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{A(r,w)}{r^q} = a < \infty,$$

则 $w(z)$ 为次数不大于 q 的多项式。

§1.2 增长级和收敛指数

增长性是函数的基本性质之一，它是函数的一个大范围性质，许多其它的性质都与它有关。本节我们将讨论整函数增长级的概念。首先对一般实函数给出如下的定义：

定义 1.1 设 $s(r)$ 是定义于正实轴 R^+ 上的非负增函数，则

$$\rho = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log s(r)}{\log r}$$

和

$$\lambda = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\log s(r)}{\log r}$$

分别称为 $s(r)$ 的级和下级。若 $0 < \rho < +\infty$，则称 $s(r)$ 为有穷正级；若 $\rho = 0$ 和 $\rho = \infty$，则分别称为零级和无穷级。

定义 1.2 若 $s(r)$ 为有穷正级 ρ，则

$$\sigma = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{s(r)}{r^\rho}$$

称为型。并区分为下列的型类：1° 若 $\sigma = \infty$，则称 $s(r)$ 为 ρ 级最大型；2° 若 $0 < \sigma < \infty$，则称为中型；3° 若 $\sigma = 0$，则称为最小型；4° 若积分 $\int_{r_0}^{\infty} \frac{s(r)dr}{r^\rho}$ 收敛（或发散），则称为收敛类（或发散类）。

例 设 $s(r) = r^\rho(\log r)^\mu$，其中 $0 \leqslant \rho < \infty$，$\mu < \infty$。由定义可知 $s(r)$ 为 ρ 级。并且，当 $\mu > 0$ 时为最大型，$\mu = 0$ 时为中型，$\mu < 0$ 时为最小型，$-1 \leqslant \mu < 0$ 时为发散类，$\mu < -1$ 时为收敛类。

定义 1.3 整函数 $w(z)$ 的增长级 ρ（或简称级）和下级 λ 定义为

$$\rho = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r, w)}{\log r} \text{ 和}$$

$$\lambda = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r, w)}{\log r}.$$

若 $0<\rho<\infty$,则其型定义为

$$\sigma=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log M(r,w)}{r^{\rho}}.$$

下面的定理表明整函数的级能由其 Taylor 展式的系数来确定.

定理 1.4 (Lindelöf, Pringsheim) 设 $w(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 为 ρ 级整函数,则有

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n\log n}{\log\frac{1}{|a_n|}}=\rho. \tag{1.2.1}$$

证明 令上式左端极限为 $\hat{\rho}$, 我们先证明 $\hat{\rho}\leqslant\rho$. 不妨设 $0<\hat{\rho}\leqslant\infty$,并任取 ε 合于 $0<\varepsilon<\hat{\rho}$, 继而当 $\hat{\rho}<\infty$ 时, 命 $k=\hat{\rho}-\varepsilon$;当 $\hat{\rho}=\infty$ 时,命 $k=1/\varepsilon$. 则由上极限定义存在无穷多个 n_j,使得

$$n_j\log n_j\geqslant k\log\frac{1}{|a_{n_j}|}.$$

根据 Cauchy 不等式,对于这些 n_j 和所有 r

$$\log M(r,w)\geqslant\log|a_{n_j}|+n_j\log r\geqslant n_j\left(\log r-\frac{\log n_j}{k}\right).$$

我们取 $r_j=(en_j)^{\frac{1}{k}}$,则对无穷多个 $\{r_j\}$ 有

$$\log M(r_j,w)\geqslant r_j^k/ke,$$

于是

$$\rho\geqslant\varlimsup_{j\to\infty}\frac{\log\log M(r_j,w)}{\log r_j}\geqslant k.$$

令 $\varepsilon\to0$,即得 $\rho\geqslant\hat{\rho}$.

下面将指出 $\rho\leqslant\hat{\rho}$. 不妨设 $\hat{\rho}<\infty$. 对任意 $\varepsilon>0$,当 $n\geqslant n_0$ 时

$$0\leqslant\frac{n\log n}{\log\frac{1}{|a_n|}}<\hat{\rho}+\varepsilon.$$

因此,当 $n\geqslant n_0$ 时

$$|a_n| \leqslant n^{-\frac{n}{\hat{\rho}+\varepsilon}}.$$

然则当 $r \geqslant r_0 \geqslant 1$ 时,

$$M(r, w) \leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| r^n + \sum_{n=n_0}^{\infty} n^{-\frac{n}{\hat{\rho}+\varepsilon}} r^n$$

$$\leqslant c_1 r^{n_0-1} + \left(\sum_{n_0 \leqslant n < m(r)} + \sum_{m(r) \leqslant n}\right) n^{-\frac{n}{\hat{\rho}+\varepsilon}} r^n$$

$$= c_1 r^{n_0-1} + I_1 + I_2,$$

其中 $m(r) = (2r)^{\hat{\rho}+\varepsilon}$。现进一步估计 I_1 和 I_2。

$$I_1 = \sum_{n_0 \leqslant n < m(r)} n^{-\frac{n}{\hat{\rho}+\varepsilon}} r^n \leqslant r^{(2r)^{\hat{\rho}+\varepsilon}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{n}{\hat{\rho}+\varepsilon}} = c_2 r^{(2r)^{\hat{\rho}+\varepsilon}},$$

其中 $c_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{n}{\hat{\rho}+\varepsilon}} < +\infty$。在 I_2 中,由于 $r \leqslant \frac{1}{2} n^{\frac{1}{\hat{\rho}+\varepsilon}}$, 故有

$$I_2 = \sum_{n \geqslant m(r)} n^{-\frac{n}{\hat{\rho}+\varepsilon}} r^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$$

综上各式便得当 $r \geqslant r_1$ 时

$$M(r, w) \leqslant c_1 r^{n_0-1} + c_2 r^{(2r)^{\hat{\rho}+\varepsilon}} + 2 \leqslant r^{r^{\hat{\rho}+2\varepsilon}},$$

由此 $\rho \leqslant \hat{\rho} + 2\varepsilon$,再令 $\varepsilon \to 0$,即有 $\rho \leqslant \hat{\rho}$。

O. P. Juneja[1] 指出,整函数的下级 λ 亦能通过 Taylor 级数的系数来确定。他证明,若设 $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 是下级为 λ 的整函数,则有

$$\lambda = \operatorname*{Max}_{(n_j)} \varliminf_{j \to \infty} \frac{n_j \log n_j}{\log \frac{1}{|a_{n_j}|}}.$$

整函数的型亦能通过 Taylor 展式的系数来表示.

定理 1.5 (Lindelöf, Pringshein 定理) 设 $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 是有穷正级整函数,其级为 ρ 型为 σ, 则有

$$e\rho\sigma = \varlimsup_{n \to \infty} \left(n |a_n|^{\frac{\rho}{n}}\right). \tag{1.2.2}$$

证明 设上式右端极限为 l。先证明 $l \geqslant e\rho\sigma$。不妨设 $l <$

$+\infty$。由定义，对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 n_0，当 $n \geqslant n_0$ 时

$$n|a_n|^{\frac{\rho}{n}} < l+\varepsilon,$$

从而

$$|a_n| < \left(\frac{l+\varepsilon}{n}\right)^{\frac{n}{\rho}}.$$

因此，当 $r \geqslant r_0$ 时

$$M(r,w) \leqslant \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} + \sum_{n\geqslant n_0}\right)|a_n|r^n \leqslant c_1 r^{n_0-1}$$

$$+ \sum_{n\geqslant n_0}\left(\frac{l+\varepsilon}{n}\right)^{\frac{n}{\rho}} r^n = c_1 r^{n_0-1}$$

$$+ \left(\sum_{n\leqslant(l+2\varepsilon)r^\rho} + \sum_{n>(l+2\varepsilon)r^\rho}\right)\left(\frac{l+\varepsilon}{n}r^\rho\right)^{\frac{n}{\rho}}$$

$$= c_1 r^{n_0-1} + I_1 + I_2.$$

现分别估计 I_1 和 I_2。由于 $\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{b}}$ 在 $x = a/e$ 时达最大值，因此 I_1 中各求和项之值不超过当 $n = (l+\varepsilon)r^\rho/e$ 时的值，即

$$\left(\frac{l+\varepsilon}{n}r^\rho\right)^{\frac{n}{\rho}} \leqslant \exp\left\{\frac{(l+\varepsilon)r^\rho}{e\rho}\right\}.$$

但 I_1 至多有 $(l+2\varepsilon)r^\rho$ 项，因此

$$I_1 \leqslant (l+2\varepsilon)r^\rho \exp\left\{\frac{(l+\varepsilon)r^\rho}{e\rho}\right\}.$$

对于 I_2，注意到 $n > (l+2\varepsilon)r^\rho$，便得

$$I_2 = \sum_{n>(l+2\varepsilon)r^\rho}\left(\frac{l+\varepsilon}{n}r^\rho\right)^{\frac{n}{\rho}}$$

$$< \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{l+\varepsilon}{l+2\varepsilon}\right)^{n/\rho} = \frac{1}{1-\left(\frac{l+\varepsilon}{l+2\varepsilon}\right)^{1/\rho}} = c_2.$$

综上各式得到，当 r 足够大时，

$$M(r,w) \leqslant c_1 r^{n_0-1} + (l+2\varepsilon)r^\rho \exp\left\{\frac{(l+\varepsilon)r^\rho}{e\rho}\right\}$$