纯粹数学与应用数学专著　第13号

线性算子谱理论

I

亚正常算子与半亚正常算子

夏道行 著

科学出版社

1983

内 容 简 介

本书着重介绍近十多年来在国内外发展起来的线性算子谱理论及作者在这方面的研究成果．本书第一册的主要内容是关于亚正常算子和半亚正常算子的基本性质、谱的直角投影和分割、角状投影和分割、记号算子和极记号算子、奇异积分模型、谱的决定、谱映照、预解式的估计，表征函数、精刻函数与 Toeplitz 算子的联系等．

读者对象为数学、物理专业的大学高年级学生、研究生、教师和研究人员．

纯粹数学与应用数学专著 第 13 号

线性算子谱理论

I

亚正常算子与半亚正常算子

夏道行 著

责任编辑 张启男 张鸿林

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1983 年 4 月第一版 开本：850×1168 1/32

1983 年 4 月第一次印刷 印张：7 1/2

印数：精 1—2,630 插页：精 3 平 2

平 1—3,400 字数：194,000

统一书号：13031·2165

本社书号：2968·13—1

定价：布面精装 2.50 元

平 装 1.50 元

科技新书目：42-精 19 平 20

目　　录

第一章 亚正常算子和半亚正常算子的初等性质

§1 序和定义

1. 序 单个算子的谱分析始终是泛函分析(包括算子理论)中引人兴趣的、活跃的课题之一. 关于自共轭算子(包括无界的情况)、酉算子以至正常算子的谱分析理论现在已成为泛函分析基础书的重要内容之一. 自五十年代起，许多数学家转而考察更一般的线性算子,有各种理论出现,如推广正常算子谱分解式的谱算子理论(Dunford & Schwartz [1])或广义谱算子理论(Foias [1]).考察接近于自共轭算子的非自共轭算子理论(Бродский, Лившиц[1], Gohberg & Krein[1,2]), 接近于酉算子的压缩算子的有关调和分析(Foias & sz Nagy [1]),不变子空间理论(Radjavi & Rosenthal [1])以及本书中所讨论的从某种意义上来说接近于正常算子的亚正常算子、半亚正常算子以及近似正常算子的理论，还有其它一些理论. 这些理论中有些分别是从自共轭算子、酉算子、正常算子的谱分析理论中得到某些启发并在一定的条件下把这些理论加以"推广". 所有这些新的发展都是不平凡的，有必要的，都是提出了新的方法,克服了新的矛盾,取得了新的应用. 当然其应用范围也都受到一定的限制. 而且这些理论全都是开始不久，尚待进一步发展,也期待着新的理论出现.

本书中，我们就从正常算子谱理论为起点来陈述一类算子的谱理论.

2. 亚正常算子的定义 本书中我们用 $\mathscr{H}$ 表示一个复的可折 Hilbert 空间,用$(\cdot,\cdot)$表示其中的内积,用算子这个词表示 $\mathscr{H}$ 中的有界线性算子，用 $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ 表示 $\mathscr{H}$ 中算子全体按照通常的代数运算所成的算子代数. 用 I 表示恒等算子，当 $A, B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$

时，称

$$[A, B] = AB - BA$$

是A与B的交换子. 称$[A^*, A]$是A的自换子或导算子. 简记为D_A或D. 当$N \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$时，$N$是正常算子的充要条件是$N$的导算子为零. 当$S \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$时，如果$D_S$是半定的(即$D_S \geq 0$或$D_S \leq 0$)，就称$S$是半正常（semi-normal）算子. 当$D_S \geq 0$时，算子$S$称为亚正常(hyponormal）算子，其全体记为$HN(\mathscr{H})$或HN. 当$D_S \leq 0$时，算子S称为协亚正常（cohyponormal）算子. 虽然协亚正常算子族仅是亚正常算子的共轭算子族，但在某些理论中例如局部预解式理论（参看 Clancey [5]），又如定理 2.6，它们之间有很大的差别.

设$A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$，作$A$的卡狄生分解$A = X + iY$，其中

$$X = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad Y = \frac{1}{2i}(A - A^*),$$

分别称为A的实部和虚部. 设$z = x + iy$是一个复数，x, y是z的实部和虚部. 记

$$A_z = (A - zI), \quad X_x = X - xI, \quad Y_y = Y - yI,$$

那么

$$A_z^* A_z = X_x^2 + Y_y^2 + i[X, Y] \tag{1.1}$$

$$A_z A_z^* = X_x^2 + Y_y^2 - i[X, Y]. \tag{1.2}$$

所以

$$D_{A_z} = 2i[X, Y] \tag{1.3}$$

它实际上与z无关.

3. 半亚正常算子的定义 我们再来考察算子的极分解. 设$A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$，作半正定算子

$$|A|_r = (A^*A)^{1/2}, \quad |A|_l = (AA^*)^{1/2}.$$

我们再作$|A|_r\mathscr{H}$到$A\mathscr{H}$的映象

$$U: (A^*A)^{1/2}y \to Ay,$$

这显然是一个等距映象，因此我们把它唯一地延拓成$\overline{|A|_r\mathscr{H}}$[1)]到

1) 这里$\overline{M}$表示集M的包（closure）.

$\overline{A\mathscr{H}}$ 上的等距算子，我们这里规定当 $x \perp |A|_r\mathscr{H}$ 时 $Ux = 0$，这样 U 成为部分等距算子，它以 $\overline{|A|_r\mathscr{H}}$ 为始域，以 $\overline{A\mathscr{H}}$ 为终域. 我们有

$$A = U|A|_r. \tag{1.4}$$

称之为算子 A 的极分解. 显然

$$|A|_l^2 = AA^* = U|A|_r^2U^*.$$

由于 U 的等距性，当 U^*U 限制在 $\overline{|A|_r\mathscr{H}}$ 上时是恒等算子，所以

$$|A|_l^2 = U|A|_rU^*U|A|_rU^* = (U|A|_rU^*)^2,$$

由非负算子开平方根的唯一性知道

$$|A|_l = U|A|_rU^*. \tag{1.5}$$

由此可知 $AU^*U = |A|_lU$. 因此当 $x \in \overline{|A|_r\mathscr{H}}$ 时，

$$Ax = |A|_lUx,$$

当 $x \perp \overline{|A|_r\mathscr{H}}$ 时，由规定 $Ux = 0$，而另一方面 $|A|_rx = 0$，所以

$$Ax = U|A|_rx = 0;$$

所以仍然有

$$Ax = |A|_lUx,$$

这样就得到另一种极分解

$$A = |A|_lU. \tag{1.6}$$

又由 (1.4) 可知 U 的值域为 $\overline{A\mathscr{H}} = \overline{|A|_l\mathscr{H}}$，又由于

$$A^* = |A|_rU^*,$$

所以 U 的始域为 $\overline{|A|_r\mathscr{H}} = \overline{A^*\mathscr{H}}$. 由于 (1.5) 还可以证明

$$|A|_r = U^*|A|_lU. \tag{1.7}$$

当 $\dim((|A|_r\mathscr{H})^\perp) \leqslant \dim((|A|_l\mathscr{H})^\perp)$ 时，我们可以任意地把 U 延拓成 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}$ 中的等距算子，这时 (1.4) 与 (1.6) 仍然成立. 特别当 $\dim((|A|_r\mathscr{H})^\perp) = \dim((|A|_l\mathscr{H})^\perp)$ 时，我们称 A 为等亏维的. 当 A 是等亏维时，我们总是把 U 延拓成 $\mathscr{H}$ 中的酉算子. 我们注意如果 $A^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$，那么 $A\mathscr{H} = A^*\mathscr{H} = \mathscr{H}$，此时 A 的极分解 $A = U|A|_r$ 中的 U 是酉算子. 以后为简单起见记 $|A|_r$ 为 $|A|$.

当

$$Q_A=(A^*A)^{1/2}-(AA^*)^{1/2}\geqslant 0 \tag{1.8}$$

时，称 A 是半亚正常（semi-hyponormal）算子，Q_A 为其极差算子. 半亚正常算子全体记为 $SH(\mathscr{H})$ 或 SH. 而当 $Q_{A^*}\geqslant 0$ 时，称 A 为半协亚正常（semi-cohyponorınnl）算子.

当 $A\in SH(\mathscr{H})$ 时，由 (1.8) 易知

$$\mathscr{N}(|A|_r)^{1)}\subset\mathscr{N}(|A|_l),$$

所以

$$(|A|_r\mathscr{H})^{\perp}\subset(|A|_l\mathscr{H})^{\perp}$$

由此可得

$$\overline{A\mathscr{H}}\subset\overline{A^*\mathscr{H}} \tag{1.9}$$

因此在 A 的极分解 $A=U|A|_r$ 中，可以把 U 任意地延拓成 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}$ 的等距算子. 记 $SHU(\mathscr{H})$ 或 SHU 为 SH 中等亏维算子全体，当 $A\in SHU$ 时，A 的极分解 $A=U|A|_r$ 中，U 总延拓成酉算子.

4. 亚正常算子的半亚正常性 令 $\mathscr{N}$ 为 $\mathscr{H}$ 中正常算子全体，我们有关系

定理 1.1 亚正常算子必是半亚正常的. 因此有

$$\mathscr{N}\subset HN\subset SH.$$

为此我们证明一个引理.

引理 1.2 设 $A, B\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$，而且

$$0\leqslant A\leqslant B \tag{1.10}$$

那么对一切 $\alpha\in[0,1]$ 成立

$$A^{\alpha}\leqslant B^{\alpha}. \tag{1.11}$$

注 这是 Löwner [1] 定理的特殊情况，这里我们避免介绍 Löwner 的较复杂的一般理论. 但当 $\alpha=1/2$ 时，此证明仍可再化简. 然而 $\alpha\neq 1/2$ 的情况对后面也是有用的.

证 设 $E=\{\alpha|\alpha$ 为实数，从 $B\geqslant A\geqslant 0$ 可推出 $B^{\alpha}\geqslant A^{\alpha}\}$.

---

1) 这里 $\mathscr{N}(B)$ 表示 B 的零空间.

易知E是闭集，$0, 1 \in E$. 下面我们证E是凸集. 这里可设$B \geqslant A \geqslant \varepsilon I > 0$，否则可在$A, B$分别加上$\varepsilon I$，最后令$\varepsilon \to 0$. 这时$A, B$可逆. 若$\alpha, \beta \in E$，今证$(\alpha+\beta)/2 \in E$. 由于

$$B^{\alpha} \geqslant A^{\alpha}.$$

因此

$$B^{-\alpha/2}A^{\alpha}B^{-\alpha/2} \leqslant I,$$

从而$\|A^{\alpha/2}B^{-\alpha/2}\| \leqslant 1$，同样有$\|A^{\beta/2}B^{-\beta/2}\| \leqslant 1$. 当$A_1, B_1, B_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$时，$\sigma(A_1B_1) = \sigma(B_1A_1)$，所以

$$r_{sp}(A_1B_1)^{1)} = r_{sp}(B_1A_1) \leqslant \|A_1B_1\| \leqslant \|A_1\|\|B_1\|.$$

从而有

$$\begin{aligned} & r_{sp}(B^{-(\alpha+\beta)/4}A^{(\alpha+\beta)/2}B^{-(\alpha+\beta)/4}) \\ & \quad = r_{sp}(B^{(\alpha-\beta)/4}B^{-(\alpha+\beta)/4}A^{(\alpha+\beta)/2}B^{-(\alpha+\beta)/4}B^{(\beta-\alpha)/4}) \\ & \quad = r_{sp}(B^{-\beta/2}A^{\beta/2}A^{\alpha/2}B^{-\alpha/2}) \leqslant 1. \end{aligned}$$

但$B^{-(\alpha+\beta)/4}A^{(\alpha+\beta)/2}B^{-(\alpha+\beta)/4}$是自共轭的，因此有

$$B^{-(\alpha+\beta)/4}A^{(\alpha+\beta)/2}B^{-(\alpha+\beta)/4} \leqslant I,$$

即有

$$A^{(\alpha+\beta)/2} \leqslant B^{(\alpha+\beta)/2}.$$

即$(\alpha+\beta)/2 \in E$. 因此E为联络集，从而$[0, 1] \subset E$.

定理 1.1 的证明 设$T \in HN$，那么由定义$D_T \geqslant 0$即得

$$|T|_l^2 = TT^* \leqslant T^*T = |T|_r^2$$

由引理 1.2，取$\alpha = \frac{1}{2}$即得

$$|T|_l \leqslant |T|_r$$

这就是(1.8).

后面将举例说明$\mathscr{N} \neq HN$，$HN \neq SH$，本书中主要考察HN及SH中算子的谱理论，将充分利用$D_T \geqslant 0$及$Q_T \geqslant 0$.

5. Cayley 变换 我们用L表示 Cayley 变换$Lx = (x+i)(x-i)^{-1}$，它的逆变换为$L^{-1}(e^{i\theta}) = i(e^{i\theta}+1)(e^{i\theta}-1)^{-1}$

---

1) 这里$r_{sp}(A)$表示A的谱半径.

对于 $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ 中的自共轭算子 A，我们记

$$M(A)=\sup_{\|h\|=1}(Ah,h),\quad m(A)=\inf_{\|h\|=1}(Ah,h).$$

我们可以作 $HN(\mathscr{H})$ 到 $SHU(\mathscr{H})$ 中算子的变换 τ 如下：当 $T=X+iY\in HN(\mathscr{H})$，而且 X，Y 为自共轭算子时，

$$\tau(T)=e^{i\alpha}L(X)(Y-m(Y)I),\tag{1.12}$$

那么 $\tau(T)\in SHU(\mathscr{H})$. 事实上，如果记 $A=\tau(T)$，那么

$$|A|_r=Y-mI,\quad U=e^{i\alpha}L(X).$$

而且

$$\begin{aligned}|A|_r-|A|_l&=|A|_r-U|A|_lU^*\\&=2(X-iI)^{-1}i[X,Y](X+iI)^{-1}\geqslant 0.\end{aligned}$$

后面经常利用上述变换——也称为 Cayley 变换——把亚正常算子和半亚正常算子联系起来.

§2 亚正常算子、半亚正常算子的一些初等性质

1. 关于亚正常算子族和半亚正常算子族的一些经常用的初等性质

(1) 设 $T\in HN$，α，β 为数，则 $\alpha T+\beta I\in HN$.

事实上这由 $D_{\alpha T+\beta I}=|\alpha|^2D_T$ 立即可知.

(2) 设 $T\in SH$ (或 SHU)，α 为数，则 $\alpha T\in SH$ (相应地 SHU).

事实上这由 $|\alpha T|_r=|\alpha||T|_r$，$|\alpha T|_l=|\alpha||T|_l$ 立即可知.

(3) 设 $T\in HN$ (或 SH)，而且 $0\bar{\in}\sigma(T)$ (这里 $\sigma(T)$ 表示 T 的谱)，那么 $T^{-1}\in HN$ (相应地 SH).

证 设 $T=U|T|_r$ 是 T 的极分解，由于 $0\bar{\in}\sigma(T)$，易知 U 是酉算子，这时有

$$T^{-1}=|T|_r^{-1}U^*=U^*|T|_l^{-1},$$

所以

$$|T^{-1}|_r=|T|_l^{-1},\quad |T^{-1}|_l=|T|_r^{-1}.$$

当 $T\in HN$ 时，作 $\phi(t)=t^2$，当 $T\in SH$ 时，作 $\phi(t)=t$. 从而

$$\phi(|T|_l)\leqslant\phi(|T|_r),$$

因此

$$B=\psi(|T|_l)^{1/2}\psi(|T|_r)^{-1/2}$$

是压缩算子. 又由于 $\psi(|T^{-1}|_r)=\psi(|T|_l)^{-1}$, $\psi(|T^{-1}|_l)=\psi(|T|_r)^{-1}$, 我们得到

$$\begin{aligned}&\psi(|T^{-1}|_r)-\psi(|T^{-1}|_l)\\&\quad=\psi(|T|_l)^{-1/2}(I-BB^*)\psi(|T|_l)^{-1/2}\geqslant 0,\end{aligned}$$

即 $T^{-1}\in HN$(相应地 SH).

(4) 设 $T=X+iY\in HN(\mathscr{H})$, 则 X 的特征子空间和 Y 的特征子空间都约化 T.

证 我们只须证 X 的特征子空间 $N_x=\{f|f\in\mathscr{H},\ Xf=xf\}$ 约化 Y. 当 $f\in N_x$, 即 $Xf=xf$, 那么

$$(i[X,Y]f,f)=0.$$

但由于 $T\in H\mathscr{N}$, 从而 $i[X,Y]\geqslant 0$, 因此导出

$$i[X,Y]f=0,$$

从而

$$XYf=YXf=xYf,$$

即 $Yf\in N_x$. 从而 N_x 约化 Y.

(5) 设 $T=U|T|\in SH(\mathscr{H})$, 那么 U 的特征子空间约化 T.

证 U 的特征 λ 或是 0 或是适合 $|\lambda|=1$. 当 $|\lambda|=1$ 时, 记 $M_\lambda=\{f|f\in\mathscr{H},\ Uf=\lambda f\}$. 这时 M_λ 必落在 U 的始域 $\overline{T^*\mathscr{H}}$ 中, 因而当 $f\in M_\lambda$ 时, $f=U^*Uf=\lambda U^*f$, 即 $U^*f=\bar{\lambda}f$. 这样由(1.8)知

$$\begin{aligned}(Q_Tf,f)&=(|T|_rf,f)-(|T|_rU^*f,U^*f)\\&=(|T|_rf,f)-(|T|_r\bar{\lambda}f,\bar{\lambda}f)=0\end{aligned}$$

但 $Q_T\geqslant 0$, 从而有 $Q_Tf=0$, 即有

$$|T|_rf=U|T|_rU^*f=\bar{\lambda}U|T|_rf,$$

所以

$$U|T|_rf=\lambda|T|_rf,$$

因此 $|T|_rf\in M_\lambda$, 从而 M_λ 约化 $|T|_r$, 因而也约化 T.

当 $\lambda=0$, $M_0=\{f|Uf=0\}$, 那么 $M_0=(T^*\mathscr{H})^\perp=\mathscr{N}(T)$,

因此当 $f\in M_0$ 时，

$$Tf=0,$$

即 M_0 为 T 的不变子空间，又因 $T\in SH$，$M_0\subset\mathcal{N}(|T|_l)$，从而当 $f\in M_0$ 时，

$$T^*f=U^*|T|_lf=0,$$

即 M_0 对 T^* 也不变，因此 M_0 约化 T.

(6) 设 $T=U|T|\in SHU$，U 为酉算子，而且 $\sigma(U)\neq\{z||z|=1\}$，那么 $|T|$ 的特征子空间也约化 U.

证 不妨设 $1\bar{\in}\sigma(U)$，作 U 的 Cayley 变换

$$B=i(U+I)(U-I)^{-1},$$

那么立即可得

$$i[B,|T|]=2(U-I)^{-1}Q_T(U^*-I)^{-1}\geqslant 0.$$

所以 $B+i|T|$ 是亚正常算子，由 (4) 知 $|T|$ 的特征子空间约化 B，从而约化 U.

这儿条件"$\sigma(U)$ 不充满单位圆"不能除去.

例 2.1 令 $C_1=\{e^{i\theta}|\theta$ 为实数$\}$ $\mathfrak{B}_{C_1}$ 为 C_1 中 Borel 集全体所成的 σ 代数，m 为如下的测度

$$dm(e^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}d\theta.$$

$\mathscr{H}$ 为测度空间 $(C_1,\mathfrak{B}_{C_1},m)$ 上平方可积函数全体按通常线性运算及内积

$$(f,g)=\int f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}dm(e^{i\theta})$$

所成的 Hilbert 空间，设 U 为"双向平移算子"，即

$$(Uf)(e^{i\theta})=e^{i\theta}f(e^{i\theta}),\quad f\in\mathscr{H}.$$

设 $\{\lambda_n\}$ 是任意一列正的严格单调增加的有界数列，今定义 $|T|_r$ 如下:

当 $f(e^{i\theta})\sim\sum f_ne^{ni\theta}$ 时，

$$(|T|_rf)(e^{i\theta})\sim\sum\lambda_nf_ne^{ni\theta}.$$

那么 $T=U|T|_r\in SHU$，但 $|T|_r$ 的特征子空间 $\{ce^{in\theta}|c$ 为复数$\}$ (n 为固定的非负整数)并不约化 U.

2. 联合点谱 对算子的卡狄生分解 $T=X+iY$ 我们有等式(1.1)，下面我们给出极分解情况下的一个重要等式：

引理 2.1 设 $T=U|T|_r$ 是 T 的极分解，$Q=|T|_r-|T|_l$，复数 $z=\rho e^{i\theta}$，$\rho>0$，$|e^{i\theta}|=1$. 那么

$$
\begin{aligned}
T_z^*T_z = (|T|_r-\rho)^2 + \rho(U-e^{i\theta})|T|_r\cdot \\
(U-e^{i\theta})^*+\rho Q.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

此式又等价于对一切 $f\in\mathscr{H}$，成立

$$
\begin{aligned}
\|T_zf\|^2 = \|(|T|_r-\rho)f\|^2+\rho\||T|_r^{1/2}(U-e^{i\theta})^*f\| \\
+\rho(Qf,f).
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

证明由计算直接可知.

设 $T\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$，我们用 $\sigma_p(T)$ 表示 T 的点谱，即全部特征值所成之集. 设 $T=X+iY$ 是 T 的卡狄生分解，令 $\sigma_{jp}(T)$ 表示满足下述条件的复数 $z=x+iy$ (x, y 是实数)的全体：存在 X 与 Y 的公共特征向量 $f\neq 0$ 使

$$Xf=xf,\quad Yf=yf.$$

称 $\sigma_{jp}(T)$ 为 T 的联合点谱. 又 $z\in\sigma_{jp}(T)$ 的充要条件是存在非零向量 f 使

$$Tf=zf,\quad T^*f=\bar{z}f. \tag{2.3}$$

显然有

$$\sigma_{jp}(T)\subset\sigma_p(T),$$

而且当 T 为正常算子时，

$$\sigma_{jp}(T)=\sigma_p(T).$$

引理 2.2 设 $T\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$，其极分解为 $T=U|T|$，复数 $z=|z|e^{i\theta}$，$|z|>0$，$|e^{i\theta}|=1$. 那么 $z\in\sigma_{jp}(T)$ 的充要条件是存在 $f\neq 0$，使

$$Uf=e^{i\theta}f,\quad |T|f=|z|f. \tag{2.4}$$

证 当(2.3)满足时，显然有

$$T^*Tf=|z|^2f.$$

于是可以对任一多项式 P 有

$$P(T^*T)f=P(|z|^2)f,$$

取多项式 $P(t)$ 在 $[0, \|T\|^2]$ 一致逼近于 $t^{1/2}$，就知道

$$|T|f = |z|f,$$

再由

$$Tf = zf, \quad T = U|T|, \quad |z| \neq 0.$$

立即导出

$$Uf = e^{i\theta}f.$$

即 (2.4) 成立. 反之当 (2.4) 成立时 (2.3) 显然成立.

定理 2.3 设 T 是半亚正常算子，则

$$\sigma_{jp}(T) = \sigma_p(T).$$

证 如果 $\rho e^{i\theta} \in \sigma_p(T)$, $\rho > 0$, θ 为实数，对应 $\rho e^{i\theta}$ 的 T 的特征向量为 $f \neq 0$，即

$$\|(T - \rho e^{i\theta} I)f\| = 0.$$

代入 (2.2) 并且注意由于 $T \in SH$ 而有 $(Qf, f) \geqslant 0$，立即得到

$$(|T|_r - \rho I)f = 0, \quad |T|_r^{1/2}(U - e^{i\theta})^* f = 0, \quad Qf = 0.$$

因此得到

$$|T|_r f = \rho f, \quad Uf = e^{i\theta}f.$$

即 (2.4) 成立. 从而 $\rho e^{i\theta} \in \sigma_{j\rho}(T)$.

如果 $0 \in \sigma_p(T)$，那么必有 $f \neq 0$，使 $Tf = 0$，由此可得

$$T^*Tf = 0,$$

从而有

$$|T|_r f = 0.$$

但是 T 为半亚正常的，因而 $(|T|_l f, f) = 0$，即 $|T|_l f = 0$. 因此有

$$T^* f = U^* |T|_l f = 0.$$

所以 $0 \in \sigma_{j\rho}(T)$. 证毕.

3. 联合近似点谱 设 $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$，我们用 $\sigma_a(T)$ 表示 T 的近似点谱，即满足下述条件的复数 λ 的全体：对于 λ，存在 $\mathscr{H}$ 中一列单位向量 $\{f_n\}$ 使

$$\lim_{n \to \infty} \|(T - \lambda I)f_n\| = 0.$$

显然 $\sigma_p(T) \subset {}_a(T)$.

设T的卡狄生分解为$T=X+iY$. 我们用$\sigma_{ja}(T)$表示满足如下条件的复数$\lambda=x+iy$(x, y为实数)全体，存在$\mathscr{H}$中一列单位向量$\{f_n\}$使

$$\lim_{n\to\infty}\|(X-xI)f_n\|=\lim_{n\to\infty}\|(Y-yI)f_n\|=0.$$

这时称$\sigma_{ja}(T)$是T的联合近似点谱. 显然$z\in\sigma_{ja}(T)$的充要条件是存在一列单位向量$\{f_n\}$使

$$\lim_{n\to\infty}\|(T-zI)f_n\|=\lim_{n\to\infty}\|(T^*-\bar{z}I)f_n\|=0. \qquad (2.5)$$

它显然对一切$T\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$成立

$$\sigma_{ja}(T)\subset\sigma_a(T).$$

易知存在$T\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$使$\sigma_{ja}(T)\neq\sigma_a(T)$，但对正常算子$T$有

$$\sigma_{ja}(T)=\sigma_a(T)=\sigma(T).$$

引理 2.4 设$T\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$而且$T$的极分解是$T=U|T|$.又设$\rho>0$, $|e^{i\theta}|=1$. 则复数$\rho e^{i\theta}\in\sigma_{ja}(T)$的充要条件是存在$\mathscr{H}$中一列单位向量$\{f_n\}$使

$$\lim_{n\to\infty}\|(|T|-\rho I)f_n\|=0, \quad \lim_{n\to\infty}\|(U-e^{i\theta}I)f_n\|=0. \quad (2.6)$$

证 条件的必要性是显然的，因为如果$z=\rho e^{i\theta}\in\sigma_{ja}(T)$，那么必有一列单位向量$\{f_n\}$使(2.5)成立，因此由

$$\|T^*Tf_n-\bar{z}zf_n\|\leqslant\|T^*Tf_n-zT^*f_n\|$$
$$+\|zT^*f_n-z\bar{z}f_n\|,$$

而知

$$\lim_{n\to\infty}\|(|T|^2-|z|^2I)f_n\|=0,$$

从而可知

$$\lim_{n\to\infty}\|(|T|-|z|)f_n\|=0.$$

由上式与(2.5)立即可得(2.6)中另一式.

反之若(2.6)成立，令P为$\mathscr{H}$到$\overline{|T|\mathscr{H}}$上的投影，那么由(2.6)的第一式及$\rho>0$可知

$$\|(I-P)f_n\|\to 0,$$

因此不妨设(2.6)中的$f_n\in\overline{|T|\mathscr{H}}$，这样一来，由

$$\|(U^* - e^{-i\theta}I)f_n\| = \|U^*(U - e^{i\theta}I)f_n\|$$

和 (2.6) 的第二式可知

$$\|(U^* - e^{-i\theta})f_n\| \to 0,$$

再由

$$\|(T - zI)f_n\| \leqslant \|(|T| - \rho I)f_n\| + \rho\|(U - e^{i\theta}I)f_n\|$$

和

$$\|(T^* - \bar{z}I)f_n\| \leqslant \||T|\| \cdot \|(U^* - e^{-i\theta}I)f_n\| + \|(|T| - \rho I)f_n\|,$$

可知 (2.5) 成立. 证毕.

定理 2.5 设 T 是半亚正常算子,则

$$\sigma_{ja}(T) = \sigma_a(T).$$

证 设 $\rho_0 \geqslant 0, |e^{i\theta_0}| = 1$, 且 $\rho_0 e^{i\theta_0} \in \sigma_a(T)$, 那么存在 $\mathscr{H}$ 中一列单位向量 $\{f_n\}$ 使

$$\lim_{n\to\infty}\|(T - \rho_0 e^{i\theta_0}I)f_n\| = 0.$$

如果 $\rho_0 = 0$, 那么

$$\lim_{n\to\infty}\||T|f_n\| = \lim_{n\to\infty}\|Tf_n\| = 0,$$

由于 $(U|T|U^*f_n, f_n) \leqslant (|T|f_n, f_n)$, 所以

$$\||T|U^*f_n\|^2 \leqslant \|T\|(|T|U^*f_n, U^*f_n) \leqslant \|T\|(|T|f_n, f_n).$$

即得

$$\lim_{n\to\infty}\|T^*f_n\| = 0.$$

所以 $0 \in \sigma_{ja}(T)$. 如果 $\rho_0 > 0$, 由 (2.2)

$$\|(|T|_r - \rho_0 I)f_n\| \to 0, \quad \||T|_r^{1/2}(U - e^{i\theta})^*f_n\| \to 0,$$
$$\|Qf_n\| \to 0.$$

再由

$$\|\rho_0 Uf_n - e^{i\theta_0}\rho_0 f_n\| \leqslant \|\rho_0 Uf_n - U|T|f_n\| + \|U|T|f_n - \rho_0 e^{i\theta_0}f_n\| \leqslant \|(|T| - \rho_0 I)f_n\| + \|(T - \rho_0 e^{i\theta_0}I)f_n\|,$$

立即有

$$\|(U-e^{i\theta_0})f_n\|\to 0,$$

即 $\rho_0 e^{i\theta_0}\in\sigma_{ja}(T)$. 证毕.

我们注意当 T 是协亚正常算子或协半亚正常算子时，一般来说等式 $\sigma_{ja}(T)=\sigma_a(T)$ 是不成立的.

例 2.2 我们考察单位圆周 C_1 上的 Hardy 空间 $H^2(C_1)$，它是形如

$$f(e^{i\theta})\sim\sum_{n=0}^{\infty}f_n e^{in\theta},\quad \sum_{n=0}^{\infty}|f_n|^2<\infty$$

的 Fourier 级数全体，按通常的线性运算及内积

$$(f,g)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n\bar{g}_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}d\theta$$

所成的 Hilbert 空间. 我们作算子 T 如下：当

$$f(e^{i\theta})\sim\sum_{n=0}^{\infty}f_n e^{in\theta}$$

时，

$$(Tf)(e^{i\theta})=(f(e^{i\theta})-f(0))e^{-i\theta}\sim\sum_{n=1}^{\infty}f_n e^{(n-1)i\theta}.$$

这时 T^* 是所谓的单向平移算子，即

$$(T^*f)(e^{i\theta})=e^{i\theta}f(e^{i\theta}).$$

由于

$$(T^*T-TT^*)f=-f(0),$$

所以 T 是协亚正常算子. 我们注意对算子 T，成立

$$\sigma(T)=\sigma_a(T)=\{z\,|\,|z|\leqslant 1\}.$$

事实上，当 $|z|<1$ 时，函数

$$f(e^{i\theta})=\frac{c}{1-ze^{i\theta}}$$

为算子 T 的相应于 z 的特征向量，从而

$$\{z\,|\,|z|<1\}\subset\sigma_p(T).$$

而 $\{z\,|\,|z|=1\}$ 是 $\sigma(T)$ 的境界，所以含在 $\sigma_a(T)$ 中. 但是我们