◎ 林正炎 白志东 编著

概率不等式

科学出版社
www.sciencep.com

概率不等式

林正炎　白志东　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

在数学科学的几乎所有的分支中，不等式常常起着重要的甚至是关键的作用。本书搜集整理了概率论中一批常用的基本不等式，并对其中的绝大多数不等式给出了证明。除了一些熟知的不等式以外，书中对某些不等式还提供了相关的参考文献。

本书可供概率统计和相关学科的研究人员、教师和研究生参考、查阅。

图书在版编目(CIP)数据

概率不等式/林正炎，白志东编著. —北京：科学出版社，2006
ISBN 7-03-017421-6

I. 概… II. ①林… ②白… III. 概率论-不等式 IV. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 061736 号

责任编辑：吕 虹 赵彦超/责任校对：张 琪
责任印制：安春生/封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

天津彩色印刷有限公司印刷

科学出版社编务公司排版制作
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006 年 7 月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2006 年 7 月第一次印刷 印张：11 1/4
印数：1—4 000 字数：212 000

定价：29.00 元

前　言

在数学科学的几乎所有的分支中，不等式常常起着重要的甚至是关键的作用. 在很多场合，它的重要性甚至超过等式. 对概率统计学科而言，情况也是如此. 在该学科的论文和著作中，一些基本的概率不等式频繁地出现并被利用. 选取和(或)创建有效的概率不等式常常是解决问题的关键步骤.

对于概率统计的研究人员和教学人员，特别是对那些涉足该领域时间不长的人来说，选择一个合适的概率不等式(最好能知道它的出处或给出它的证明的文献)是十分重要的. 据作者所知，目前还没有一本较完整地介绍基本的概率不等式的著作，本书的目的就在于提供这样的一份资料. 书中收集整理了概率论中一批常用的基本不等式，并对其中的绝大多数不等式给出了证明. 除了一些熟知的不等式以外，书中还对某些不等式提供了相关的参考文献.

限于作者的知识范围以及对词语“常用的基本的”理解，肯定有不少重要的、也属于“常用的基本的”范围的不等式没有被收集进来，此外也难免有错误或疏忽之处，恳望读者不吝指教. 如果本书有幸再版，作者将进行必要的修改增删，特别是增加一些被遗漏的常用的基本不等式.

在本书的写作和出版过程中，严加安院士和陈木法院士给予了大力的支持；邵启满教授、张立新教授对书稿提出了许多有益的建议；庞天晓博士和博士生李德柜做了大量的校订和录入工作，在此一并表示衷心感谢. 另外，还要特别感谢吕虹编审对本书的最终出版所做的努力和国家自然科学基金(10571159)的资助.

在本书完稿之际，传来了我们敬爱的陈希孺院士逝世的噩耗，这是中国概率统计界的巨大损失. 谨以本书敬献给我们最尊敬的陈希孺老师.

林正炎　白志东

2005 年 10 月

目　录

1. 有关事件的概率的初等不等式

令 Ω 为一基本事件空间，$\mathcal{F}$ 为 Ω 的子集生成的 σ 代数，P 为定义在 $\mathcal{F}$ 上的概率测度．$(\Omega,\mathcal{F},P)$ 称为概率空间．我们用 $A_1,A_2,\cdots$ 或者 $A,B,\cdots$ 表示 $\mathcal{F}$ 中的事件．$A\bigcup B$、AB (或 $A\bigcap B$)、$A-B$ 与 $A\triangle B$ 分别表示事件 A 和 B 的并、交、差和对称差．A^c 表示 A 的补事件，ϕ 表示不可能事件．

1.1 (进出公式)

令 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件，则

$$\begin{aligned}P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)&=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\cdots\\&\quad+(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}P(A_{i_1}\cdots A_{i_k})\\&\quad+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1\cdots A_n).\end{aligned}$$

证明 如果 $n=2$, 显然有

$$P(A_1\bigcup A_2)=P(A_1)+P(A_2-A_1A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2).\quad(1)$$

假设对某个 n 公式成立，我们要证明对 $n+1$ 公式也成立．实际上由 (1) 和归纳假设，有

$$\begin{aligned}P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1}A_i\right)&=P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)+P(A_{n+1})-P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_iA_{n+1}\right)\\&=\sum_{i=1}^{n+1}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1\cdots A_n)\end{aligned}$$

$$
-\left\{\sum_{i=1}^{n} P(A_iA_{n+1}) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_iA_jA_{n+1}) + \cdots + (-1)^{n-1}P(A_1\cdots A_nA_{n+1})\right\}
$$

$$
=\sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} P(A_iA_j) + \cdots + (-1)^n P(A_1\cdots A_{n+1}).
$$

1.2 (进出公式的特例)

1.2a 如果 $A_1,\cdots,A_n$ 是可交换的，则

$$
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\binom{n}{i}P\left(A_1,\cdots,A_i\right).
$$

注 如果对于满足 $1\leqslant i_1<\cdots<i_j\leqslant n$ 的所有取法和一切 $1\leqslant j\leqslant n$, 有 $P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_j})=p_j$ 成立，则称 $A_1,\cdots,A_n$ 是可交换的.

1.2b 如果 $A_1,\cdots,A_n$ 是独立的且 $P(A_i)=p$, 则

$$
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\binom{n}{i}p^i.
$$

1.3 (下列不等式是进出公式的推论)

1.3a $\sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_iA_j) \leqslant P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n P(A_i)$.

注 上式右边的不等式可改进为

$$
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=2}^{n} P(A_1A_i).
$$

证明 $n=2$ 时，结论是显然的. 假设对某个 n 不等式成立，则

$$
P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\bigcap A_{n+1}\right)
$$

$$
\leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=2}^{n} P(A_1A_i) + P(A_{n+1}) - P(A_1A_{n+1}).
$$

1.3b $|P(AB)-P(A)P(B)| \leqslant \frac{1}{4}$.

证明

$$\begin{aligned}|P(AB)-P(A)P(B)| &= |P(A)P(AB)+P(A^c)P(AB)-P(A)P(AB)\\&\quad -P(A)P(A^cB)|\\&=|P(A^c)P(AB)-P(A)P(A^cB)|.\end{aligned}$$

因为 A^c 和 AB 是不相交的，$P(A^c)P(AB) \leqslant 1/4$ (注意到 $\max\limits_{0<p<1} p(1-p)=1/4$). 同理，$P(A)P(A^cB) \leqslant 1/4$. 结合这两个不等式即得待证之结论.

1.3c $|P(A)-P(B)| \leqslant P(A \triangle B) \quad (A \triangle B=(A-B)\bigcup(B-A))$

证明 由 1.3a,

$$P(A\triangle B) \geqslant P(A-B) \geqslant P(A)-P(AB) \geqslant P(A)-P(B).$$

由 A 和 B 的对称性，1.3c 成立.

1.3d(Boole 不等式) $P(AB) \geqslant 1-P(A^c)-P(B^c)$.

证明 $P(AB)+P(B^c) \geqslant P(A)=1-P(A^c)$.

1.3e 令 $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n=\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n, \liminf\limits_{n\to\infty} A_n=\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty} A_n$. 则

$$\begin{aligned}P(\liminf_{n\to\infty} A_n) &\leqslant \liminf_{n\to\infty} P(A_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} P(A_n)\\&\leqslant P(\limsup_{n\to\infty} A_n) \leqslant \lim_{N\to\infty}\sum_{n=N}^{\infty} P(A_n).\end{aligned}$$

证明 对于整数 N, 我们有

$$\bigcap_{n=N}^{\infty} A_n \subset A_N \subset \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n,$$

由此推出

$$P\left(\bigcap_{n=N}^{\infty} A_n\right) \leqslant P(A_N) \leqslant P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} P(A_n).$$

令 $N\to\infty$, 即可得待证的不等式.

1.3f 对于 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, 如果 $P(A) \geqslant 1-\varepsilon, P(B) \geqslant 1-\varepsilon$ 成立，则 $P(AB) \geqslant 1-2\varepsilon$.

证明 $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \bigcup B) \geqslant 1 - 2\varepsilon$.

1.3g(Bonferroni 不等式) 令 $P_{[m]}(P_m)$ 为 $A_1, \cdots, A_n$ 中恰好 (至少) 有 m 个事件同时发生的概率. 记

$$S_m = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant n} P(A_{i_1} \cdots A_{i_m}).$$

则

$$S_m - (m+1)S_{m+1} \leqslant P_{[m]} \leqslant S_m, \qquad S_m - mS_{m+1} \leqslant P_m \leqslant S_m.$$

证明 由下面的等式可以推得待证的不等式:

$$P_{[m]} = S_m - \binom{m+1}{m} S_{m+1} + \binom{m+2}{m} S_{m+2} + \cdots + (-1)^{n-m} \binom{n}{m} S_n,$$

$$P_m = S_m - \binom{m}{m-1} S_{m+1} + \binom{m+1}{m-1} S_{m+2} + \cdots + (-1)^{n-m} \binom{n-1}{m-1} S_n,$$

$$S_m = \sum_{i=m}^{n} \binom{i}{m} P_{[i]} \quad \text{和} \quad S_m = \sum_{i=m}^{n} \binom{i-1}{m-1} P_i.$$

根据定义, 我们有

$$P_{[i]} = \sum_{F \in \mathcal{F}_i} P\left(\bigcap_{j \in F} A_j \bigcap_{\ell \in F^c} A_\ell^c \right),$$

其中 $\mathcal{F}_i$ 是集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 中所有 i 个元素的子集的全体. 注意到对每个 $\tilde{F} \in \mathcal{F}_m$, 对所有的 $i \geqslant m$, $F \in \mathcal{F}_i$ 且 $F \subset \tilde{F}$, 集合 $\bigcap_{t \in \tilde{F}} A_t$ 可以写成不相交子集 $\bigcap_{j \in F} A_j \bigcap_{\ell \in F^c} A_\ell^c$ 的并. 这就证明了

$$S_m = \sum_{i=m}^{n} \binom{i}{m} P_{[i]}.$$

注意到 $P_{[i]} = P_i - P_{i+1}$, 由上式可知 $S_m = \sum_{i=m}^{n} \binom{i-1}{m-1} P_i$.

把 S_m 用 $P_{[i]}$ 表示成的表达式代入第一个等式的右边, 我们可以得到

$$S_m - \binom{m+1}{m} S_{m+1} + \binom{m+2}{m} S_{m+2} + \cdots + (-1)^{n-m} \binom{n}{m} S_n$$

$$= \sum_{j=m}^{n} (-1)^{j-m} \binom{j}{m} \sum_{i=j}^{n} \binom{i}{j} P_{[i]}$$

$$= \sum_{i=m}^{n} \binom{i}{m} P_{[i]} \sum_{j=m}^{i} \binom{i-m}{j-m} (-1)^{j-m} = P_{[m]}.$$

用同样的方法，我们可以证明第二个等式.

1.4 (关于对称差的不等式)

1.4a $P\{(\bigcup_n A_n)\triangle(\bigcup_n B_n)\} \leqslant P\{\bigcup_n (A_n \triangle B_n)\} \leqslant \sum_n P(A_n \triangle B_n)$.

证明 根据对称差的定义，左边的不等式可以由 $(\bigcup_n A_n)\triangle(\bigcup_n B_n) \subset \bigcup_n (A_n \triangle B_n)$ 得到，右边的不等式可从 1.3a 推得.

1.4b $P\{(A_1 - A_2)\triangle(B_1 - B_2)\} \leqslant P(A_1 \triangle B_1) + P(A_2 \triangle B_2)$.

证明 不等式由 $(A_1 - A_2)\triangle(B_1 - B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \bigcup (A_2 \triangle B_2)$ 得到.

1.5 (关于独立事件的不等式)

1.5a 令 $\{A_n\}$ 为一列相互独立的事件序列，那么

$$1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \exp\left\{-\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\right\},$$

$$1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} \exp\left\{-\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\right\}.$$

证明 对等式

$$1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} (1 - P(A_k))$$

的右边应用不等式 $1 - x \leqslant e^{-x}$, 即可得所要的结论.

注 在证明 Borel-Cantelli 引理的时候这个不等式是很有用的.

1.5b 假设 A 和 B 独立， $AB \subset D$ 且 $A^c B^c \subset D^c$. 则 $P(AD) \geqslant P(A)P(D)$.

证明

$$P(AD) = P(ADB) + P(ADB^c) = P(AB) + P(AB^c) - P(AD^c B^c)$$

$$
\begin{aligned}
&= P(A)P(B) + P(AB^c) - P(D^cB^c) + P(A^cD^cB^c) \\
&= P(A)P(B) + P(AB^c) - P(D^cB^c) + P(A^cB^c) \\
&= P(A)P(B) + P(B^c) - P(D^cB^c) \\
&\geqslant P(A)P(BD) + P(A)P(B^cD) = P(A)P(D).
\end{aligned}
$$

1.5c(Feller-Chung) 令 $A_0=\phi, \{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 为两个事件序列. 假设:

(i) 对所有的 $n\geqslant 1$, B_n 和 $A_nA_{n-1}^c\cdots A_0^c$ 独立; 或者

(ii) 对所有的 $n\geqslant 1$, B_n 和 $\{A_n, A_nA_{n+1}^c, A_nA_{n+1}^cA_{n+2}^c, \cdots\}$ 独立.

则

$$
P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_nB_n\right) \geqslant \inf_{n\geqslant 1} P(B_n)P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).
$$

证明 如果 (i) 成立, 则

$$
\begin{aligned}
P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_nB_n\right\} &\geqslant P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_nA_n\bigcap_{j=0}^{n-1}(B_jA_j)^c\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{B_nA_n\bigcap_{j=0}^{n-1}(B_jA_j)^c\right\} \\
&\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{B_nA_n\bigcap_{j=0}^{n-1}A_j^c\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)P\left\{A_n\bigcap_{j=0}^{n-1}A_j^c\right\} \\
&\geqslant \inf_{n\geqslant 1} P(B_n)P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right);
\end{aligned}
$$

如果 (ii) 成立, 则

$$
\begin{aligned}
P\left\{\bigcup_{j=1}^{n} A_jB_j\right\} &\geqslant \sum_{j=1}^{n} P\left\{A_jB_j\bigcap_{i=j+1}^{n}(A_iB_i)^c\right\} \geqslant \sum_{j=1}^{n} P\left\{A_jB_j\bigcap_{i=j+1}^{n}A_i^c\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{n} P(B_j)P\left\{A_j\bigcap_{i=j+1}^{n}A_i^c\right\} \geqslant \inf_{1\leqslant j\leqslant n} P(B_j)P\left\{\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right\}.
\end{aligned}
$$

1.6 (Chung-Erdös)

$$
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\right)^2 \Bigg/ \left\{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_iA_j)\right\}.
$$

证明 定义随机变量 $X_k(\omega), \omega \in \Omega$:

$$X_i(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{若} \quad \omega \notin A_i, \\ 1, & \text{若} \quad \omega \in A_i. \end{cases}$$

则

$$2 \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} P(A_i A_j) = E(X_1 + \cdots + X_n)^2 - E(X_1^2 + \cdots + X_n^2).$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式 (见 8.4b), 得

$$(E(X_1 + \cdots + X_n))^2 \leqslant P(X_1 + \cdots + X_n > 0) E(X_1 + \cdots + X_n)^2.$$

根据定义, 又有 $EX_i = EX_i^2 = P(A_i), P(X_1 + \cdots + X_n > 0) = P(\bigcup_{i=1}^n A_i)$. 结合上面这些关系式即得证不等式.

2. 关于常用分布的不等式

令 ξ 为随机变量 (r.v.). 定义它的分布函数 (d.f.) 为 $F(x) = P(\xi < x)$. 如果 $F(x)$ 的导数存在，我们定义 ξ 的概率密度函数 (p.d.f.) 为 $p(x) = F'(x)$.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

分别为标准正态 r.v. 的 d.f. 和 p.d.f.;

$$b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \cdots, n, \quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p$$

为参数为 n 和 p 的二项分布;

$$p(k; \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \qquad k = 0, 1, \cdots, \quad \lambda > 0,$$

为参数为 λ 的 Poisson 分布.

2.1 (关于正态分布的不等式)

2.1a $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(b-a)\exp\{-(a^2 \vee b^2)/2\} \leqslant \Phi(b) - \Phi(a) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(b-a) \quad (-\infty < a < b < \infty)$.

证明 注意到当 $x \in [a, b]$ 时, $\exp\{-(a^2 \vee b^2)/2\} < e^{-x^2/2} < 1$.

2.1b 对所有的 $x > 0$,

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \varphi(x) < \frac{x}{1+x^2} \varphi(x) < 1 - \Phi(x) < \frac{1}{x} \varphi(x).$$

证明 右边的不等式可以从下面的等式得到. 对所有的 $x > 0$,

$$\int_x^\infty e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{x} e^{-x^2/2} - \int_x^\infty \frac{1}{t^2} e^{-t^2/2} dt.$$

左边的不等式是初等的．中间的不等式可以用下面的方法证得．对所有的 $x>0$,

$$\frac{1}{x^2}\int_x^\infty e^{-t^2/2}dt > \int_x^\infty \frac{1}{t^2}e^{-t^2/2}dt = \frac{1}{x}e^{-x^2/2} - \int_x^\infty e^{-t^2/2}dt.$$

因此

$$\frac{1}{x}e^{-x^2/2} < \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\int_x^\infty e^{-t^2/2}dt,$$

由此即得所要证的结论．

2.1c 对所有的实数 $x, 1-\Phi(x) \geqslant \frac{1}{2}(\sqrt{x^2+4}-x)\varphi(x)$; 对所有的 $x > -1, 1-\Phi(x) \leqslant \frac{4}{3x+\sqrt{x^2+8}}\varphi(x)$.

证明 利用 Cauchy-Schwarz 不等式 (见 8.4b), 我们可知

$$\begin{aligned}(e^{-x^2/2})^2 &= \left(\int_x^\infty te^{-t^2/2}dt\right)^2 \leqslant \left(\int_x^\infty t^2e^{-t^2/2}dt\right)\left(\int_x^\infty e^{-t^2/2}dt\right) \\ &= \left(xe^{-x^2/2} + \int_x^\infty e^{-t^2/2}dt\right)\int_x^\infty e^{-t^2/2}dt,\end{aligned}$$

由此可得第一个不等式．令

$$\nu_x = e^{-x^2/2}\Big/\int_x^\infty e^{-t^2/2}dt \quad 和 \quad \varphi_x = (\nu_x - x)(2\nu_x - x).$$

对 $x>0$ 使用三次分部积分，得到

$$\int_x^\infty e^{-t^2/2}dt = \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^4}-\frac{15}{x^6}+o\left(\frac{1}{x^6}\right)\right)e^{-x^2/2}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}\nu_x &= x\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^4}-\frac{15}{x^6}+o\left(\frac{1}{x^6}\right)\right)^{-1} \\ &= x\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^4}+\frac{10}{x^6}+o\left(\frac{1}{x^6}\right)\right), \text{当 } x\to\infty\text{时}.\end{aligned}$$

因此，对于充分大的 x,

$$\varphi_x = \left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{10}{x^4}+o(x^{-4})\right)\left(1+\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^4}+o(x^{-4})\right) = 1+\frac{2}{x^4}+o(x^{-4}) > 1.$$

我们接下来证明 $\varphi_x > 1$ 对于所有的 x 成立. 否则, 由连续性, 存在一个 x_0 使得

$$\varphi_{x_0} = 1, \qquad \varphi'_{x_0} \geqslant 0.$$

但

$$\begin{aligned}\varphi'_{x_0} &= (\nu'_{x_0} - 1)(2\nu_{x_0} - x_0) + (\nu_{x_0} - x_0)(2\nu'_{x_0} - 1)\\ &= \nu_{x_0}(\varphi_{x_0} - 1) + 2(\nu_{x_0} - x_0)(\nu'_{x_0} - 1)\\ &= 2(\nu_{x_0} - x_0)(\nu'_{x_0} - 1),\end{aligned}$$

根据 2.1b 的右边, 可知对于所有的实数 x 有 $\nu_x - x > 0$ 成立. 根据假设 $1 = \varphi_{x_0} = 2\nu_{x_0}^2 - 3x_0\nu_{x_0} + x_0^2$, 我们有

$$\nu'_{x_0} - 1 = \nu_{x_0}^2 - x_0\nu_{x_0} - [2\nu_{x_0}^2 - 3x_0\nu_{x_0} + x_0^2] = -(x_0 - \nu_{x_0})^2 < 0,$$

由此推得 $\varphi'_{x_0} < 0$, 这和假设 $\varphi'_{x_0} \geqslant 0$ 矛盾. 因此, 对于有限值 x,

$$\varphi_x > 1.$$

考虑 ν_x 的二次方程形式, 可知对于所有的 x,

$$\nu_x > \frac{3x + \sqrt{x^2+8}}{4} \quad 或 \quad \nu_x < \frac{3x - \sqrt{x^2+8}}{4}.$$

显然上式中的第一个不等式对于所有的 $x \leqslant 0$ 都是成立的, 因为上式中的第二个不等式是不可能成立的. 由连续性, 我们可知第一个不等式对于所有的实数 x 都是成立的. 于是, 因为对所有的 $x > -1$, 有 $\frac{3x+\sqrt{x^2+8}}{4} > 0$ 成立, 可推得 2.1c 的第二个不等式成立.

2.1d $1 - \Phi(x) \sim \varphi(x)\{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{1\cdot 3}{x^5} - \cdots + (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{x^{2k+1}}\}$. 如果 k 是偶数且 $x > 0$, 那么这个等价式的右边高估了 $1 - \Phi(x)$ 的值; 如果 k 是奇数且 $x > 0$, 则这个等价式的右边低估了 $1 - \Phi(x)$ 的值.

证明 利用分部积分.

2.1e 令 (X, Y) 为正态随机向量, 其分布函数为

$$N\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & r\\ r & 1\end{pmatrix}\right).$$

如果 $0 \leqslant r < 1$, 那么对于任意的实数 a 和 b

$$(1-\Phi(a))\left(1-\Phi\left(\frac{b-ra}{\sqrt{1-r^2}}\right)\right) \leqslant P(X>a, Y>b)$$

$$\leqslant (1-\Phi(a))\left\{\left(1-\Phi\left(\frac{b-ra}{\sqrt{1-r^2}}\right)\right)+r\frac{\varphi(b)}{\varphi(a)}\left(1-\Phi\left(\frac{a-rb}{\sqrt{1-r^2}}\right)\right)\right\}.$$

如果 $-1 < r \leqslant 0$, 那么不等号反向.

证明 由分部积分可得

$$\begin{aligned} P(X>a, Y>b) &= \int_a^{\infty} \varphi(x)\left(1-\Phi\left(\frac{b-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right)\right)dx \\ &= (1-\Phi(a))\left(1-\Phi\left(\frac{b-ra}{\sqrt{1-r^2}}\right)\right) \\ &\quad + \int_a^{\infty}(1-\Phi(x))\varphi\left(\frac{b-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right)\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}dx. \end{aligned}$$

假设 $0 \leqslant r < 1$, 则下界立即可得. 注意到 $(1-\Phi(x))/\varphi(x)$ 是递减的, 因此

$$\begin{aligned} &\int_a^{\infty}(1-\Phi(x))\varphi\left(\frac{b-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right)\frac{dx}{\sqrt{1-r^2}} \\ &\leqslant \frac{1-\Phi(a)}{\varphi(a)}\int_a^{\infty}\varphi(x)\varphi\left(\frac{b-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right)\frac{dx}{\sqrt{1-r^2}} \\ &= \frac{1-\Phi(a)}{\varphi(a)}\int_a^{\infty}\varphi(b)\varphi\left(\frac{x-rb}{\sqrt{1-r^2}}\right)\frac{dx}{\sqrt{1-r^2}} \\ &= (1-\Phi(a))\frac{\varphi(b)}{\varphi(a)}\left(1-\Phi\left(\frac{a-rb}{\sqrt{1-r^2}}\right)\right), \end{aligned}$$

上界得证. 对于 $-1 < r \leqslant 0$ 情形, 由同样的讨论可得不等号反向成立.

2.2 (Slepian 型不等式)

2.2a(Slepian 引理) 令 $(X_1, \cdots, X_n)$ 为一正态随机向量且 $EX_j = 0$, $EX_j^2 = 1, j = 1, \cdots, n$. 令 $\gamma_{kl} = EX_kX_l$ 且 $\gamma = (\gamma_{kl})$ 为协方差矩阵. 令 $I_x^{+1} = [x, \infty), I_x^{-1} = (-\infty, x)$ 且 $A_j = \{X_j \in I_{x_j}^{\varepsilon_j}\}$, 其中 ε_j 或者是 $+1$ 或者是 -1. 那么如果 $\varepsilon_k\varepsilon_l = 1$, 则 $P\{\bigcap_{j=1}^n A_j; \gamma\}$ 是 γ_{kl} 的递增函数; 否则是递减的.

证明 $(X_1, \cdots, X_n)$ 的密度函数可以由它的 c.f. 给出，

$$p(x_1, \cdots, x_n; \gamma) = (2\pi)^{-n} \int \cdots \int \exp\left\{ \mathrm{i} \sum_{j=1}^{n} t_j x_j - \frac{1}{2} \sum_{k,l} \gamma_{kl} t_k t_l \right\} dt_1 \cdots dt_n. \text{①}$$

由此可得

$$\frac{\partial p}{\partial \gamma_{kl}} = \frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_l}, \qquad 1 \leqslant k < l \leqslant n.$$

因此我们可以把 p 看作是 $n(n-1)/2$ 个变量 $\gamma_{kl}, k < l$ 的函数．此外

$$P\left\{ \bigcap_{j=1}^{n} A_j; \gamma \right\} = \int_{I_{x_1}^{\varepsilon_1}} \cdots \int_{I_{x_n}^{\varepsilon_n}} p(u_1, \cdots, u_n; \gamma) du_1 \cdots du_n.$$

把它看成是 $\gamma_{kl}, k < l$ 的函数，我们考察它关于 γ_{kl} 的偏导数．例如，我们考虑 γ_{12}, 并且假设积分区间是 $I_{x_1}^{+1}$ 和 $I_{x_2}^{+1}$. 我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial P\left\{ \bigcap_{j=1}^{n} A_j; \gamma \right\}}{\partial \gamma_{kl}} &= \int_{I_{x_1}^{+1}} \int_{I_{x_2}^{+1}} \cdots \int_{I_{x_n}^{\varepsilon_n}} p(u_1, u_2, \cdots, u_n; \gamma) du_1 du_2 \cdots du_n \\ &= \int_{I_{x_3}^{\varepsilon_3}} \cdots \int_{I_{x_n}^{\varepsilon_n}} p(x_1, x_2, u_3, \cdots, u_n; \gamma) du_3 \cdots du_n \geqslant 0.\end{aligned}$$

因此 $P\{\bigcap_{j=1}^{n} A_j; \gamma\}$ 是一个关于 γ_{12} 的递增函数．

2.2b(Berman) 继续使用 2.2a 中的记号．我们有

$$\left| P\left\{ \bigcap_{j=1}^{n} A_j \right\} - \prod_{j=1}^{n} P(A_j) \right| \leqslant \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} |\gamma_{kl}| \varphi(x_k, x_l; \gamma_{kl}^*),$$

其中 $\varphi(x, y; \gamma_{kl}^*)$ 是一个标准的二元正态密度函数，其协方差为 γ_{kl}, γ_{kl}^* 是一个介于 0 和 γ_{kl} 之间的数．

证明 令 $I_j = I_{x_j}^{\varepsilon_j}$,

$$Q((I_1, \cdots, I_n); \gamma) = \int_{I_1} \cdots \int_{I_n} p(u_1, \cdots, u_n; \gamma) du_1 \cdots du_n.$$

①在本书中，"i" 表示足标，"i" 表示虚数单位．