肖 峰 编著

人造地球卫星轨道摄动理论

国防科技大学出版社

人造地球卫星轨道摄动理论

肖　峰　编著

南京航空航天大学
藏书
图书馆

一九九八年十月廿二日

30775356

国防科技大学出版社

775356

图书在版编目(CIP)数据

人造地球卫星轨道摄动理论/肖峰编著—长沙:国防科技大学出版社,1997.9

ISBN 7—81024—410—8

Ⅰ 人造地球卫星轨道摄动理论

Ⅱ 肖峰

Ⅲ ① 人造地球卫星 ② 轨道 ③ 摄动理论

Ⅳ V411.4

责任编辑:卢天贶

责任校对:何 晋

封面设计:陆荣斌

国防科技大学出版社出版发行

电话:(0731)4555681 邮政编码:410073

新华书店总店北京发行所经销

长沙交通学院印刷厂印装

*

开本:787×1092 1/16 印张:19 字数:439 千

1997 年 9 月第 1 版第 1 次印刷 印数:1—1000 册

*

ISBN 7—81024—410—8

V·14 定价:23.00 元

内容提要

本书是作者根据多年给飞行力学专业研究生讲授专业课的讲稿，加以充实和修改，编写而成的. 书中以系统阐述线性摄动法求解人造地球卫星轨道摄动为重点，主要内容有：建立摄动运动方程，讨论地球非球形摄动，大气阻力摄动，日月摄动和太阳光压摄动. 为方便起见，书中涉及到的一些特殊函数的推导及其变换，放在本书的附录中.

本书可作为飞行力学专业的研究生教材，也可作为航天动力学、航天测控、航天工程、航天控制、卫星轨道设计与计算、卫星导航和卫星测地等有关专业本科高年级学生和科技工作者的参考书.

前　言

本书是根据作者多年给飞行力学专业研究生讲授专业课的讲稿，加以充实和修改，编写而成的.

摄动理论本是天体力学的一个重要分支，也是经典天体力学的基本内容. 这一理论主要是应用分析方法，研究各类天体的受摄运动，并求出其轨道要素的近似摄动值. 随着新技术的发展，天体力学出现了两类课题：一类是讨论共同性问题，即各类天体的受摄运动都要解决的关键性问题，或共同性的研究方法，如摄动函数的展开、中间轨道理论、变换理论等；另一类是讨论具体的天体摄动问题，如行星运动理论、小行星运动理论、月球运动理论等. 本书所讨论的“人造地球卫星轨道摄动理论”即属于后一类课题.

在天体力学中讨论自然天体的运动时，由于自然天体彼此相距十分遥远，因此可以将天体当作质点看待；但人造地球卫星离地球是比较近的，故要精确计算地球引力对人造卫星的作用时，就不能再将地球看作一个质点，而至少应将地球看作是一个密度分布并不十分均匀，形状也不十分规则的非球形刚体. 此外，人造卫星绕地球转动的速度也比较快，而且其所承受的各种摄动力的性质也各不相同，故人造地球卫星轨道变化是十分复杂的.

虽然人造地球卫星的运动与自然天体的运动之间有这么多差异，但从基本原理来说，人造地球卫星也遵循天体运行的基本规律. 所以我们仍可应用分析方法求解，以获得在各种摄动力作用下，人造卫星轨道的变化规律.

为此，在本书的第一章，介绍以轨道要素为基本变量的摄动运动方程，这是由拉格朗日(J. L . Lagrange)在讨论行星运动时，于 1808 年首先提出来的，故又称拉格朗日行星运动方程. 由于该方程是一非线性常微分方程，形式比较复杂，它的解一般不能用初等函数表示，而只能将其展开为小参数的幂级数，以求得其近似的分析解. 但讨论人造地球卫星的轨道摄动，一般不能直接应用这种古典的摄动法，而必须对古典摄动法加以改进. 自从 20 世纪 50 年代第一颗人造地球卫星上天以来，摄动理论又有较大发展. 为适应研究人造地球卫星轨道摄动的实际需要，人们对古典摄动法提出了各种改进方法. 其中线性摄动法和平均要素法都是很有效的方法. 本书将重点讨论用线性摄动法求摄动运动方程的分析解. 这种方法不仅比较简捷，而且便于用数字计算机进行公式推演和数值运算. 平均要素法的优点是物理意义比较清晰. 因此，我们在第二章讨论地球非球形摄动时，先介绍用平均要素法求解摄动运动方程，然后讨论用线性摄动法求摄动量的分析解. 读者通过对两种方法的学习，不仅可以从比较中更好地理解线性摄动法的物理意义，而且能体会出线性摄动法的优越性.

本书第三章讨论大气阻力摄动. 考虑到人造地球卫星一般是在距地面 200km 以上的外层空间运行，空气是极其稀薄的. 卫星在运行中所受到的气流，是自由分子流，这与飞机

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

在稠密大气中飞行时的情况是不同的.所以在讨论大气阻力摄动前,先介绍稀薄气体动力学,使读者对稀薄气体动力学的基本概念有初步了解.然后再讨论用线性摄动法求大气阻力摄动引起的轨道要素变化的近似值.

第四章讨论日月摄动,由于太阳和月球的引力都是有势力,因此日、月摄动函数的展开与地球非球形的摄动函数的展开相类似,这就为用线性摄动法讨论日月摄动带来方便.

第五章讨论太阳光压摄动,由于太阳光压强度与距离平方成反比,所以光压也是一种有心力,其力心就在太阳中心.而作用于人造地球卫星上的光压合力与引力相似,只是方向相反,故亦存在位函数.利用勒让德函数将位函数展成多项式,这为用线性摄动法讨论光压摄动提供有利条件.

为了讲解方便起见,我们将某些公式的冗长推演放在附录中,供读者在学习时参考.

在阅读本书时,要求读者具有球面天文学和天体力学方面的基础知识,若尚未具备这方面的基础,读者可先学习《球面天文学与天体力学基础》(肖峰编.国防科技大学出版社,1989).

本书在编写过程中,得到任萱教授和胡小平教授的大力支持和热情帮助,特在此表示衷心感谢.

编者

1995 年 5 月

目　录

第一章　摄动运动方程

第二章　地球非球形摄动

第三章 大气阻力摄动

第四章 日月摄动

第五章　太阳光压摄动

第一章 摄动运动方程

以轨道要素为基本变量的摄动运动方程，是由拉格朗日(J－L. Lagrange)在1808年首先提出来的，故又称拉格朗日摄动方程，它是一种建立在二体问题基础上的摄动理论.在这个理论中，引进了一个重要的概念，即密切轨道.

当人造地球卫星绕地球运行时，若看作二体问题(也即将卫星和地球都看作质点，卫星除受地球中心力作用外，不受其他力的干扰)，则卫星是沿一椭圆轨道运行.我们在任何瞬时由卫星的位置 $\boldsymbol{r}$ 和速度 $\boldsymbol{v}$，可以唯一地确定一组六个轨道要素，而这些轨道要素是常数，它们不随时间而变化.也就是说，无论在什么时候选取卫星的位置和速度矢量，所获得的轨道要素总是相同的.

但实际上，人造地球卫星在绕地球运行中会遇到许多干扰，其中主要有：地球非球形摄动，大气阻力摄动，日、月摄动，太阳光压摄动等等.所以卫星是沿着一条复杂的曲线运动的，这曲线既不在一个平面内，也不是封闭的.但为了研究方便，我们将卫星实际轨道上的每一点看成是某相应的椭圆轨道上的点，这种椭圆轨道称为密切轨道，并且在该点卫星的实际速度等于密切轨道上相应点的速度，故实际轨道与密切轨道相切.如果从该点起所有摄动都突然消失，则卫星将沿着密切轨道运动.当然，实际上摄动是不会消失的，因此密切轨道是连续变化的椭圆轨道，而密切轨道要素也不再是常数，应是时间的函数.

密切轨道的概念是非常有用的，用密切轨道要素描述卫星的受摄运动，其优点是几何意义明晰而简单，同时变化又小.

§1 轨道参数变换

我们已知，一组六个轨道要素可以确定人造地球卫星在轨道上的运动，除此之外，也可由卫星在直角坐标系中的瞬时位置分量 x,y,z 和速度分量 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t,\mathrm{d}y/\mathrm{d}t,\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ 来确定；或者由它的球坐标来确定.在这三组参数之间存在一一对应关系，虽然从某种意义上来说，前一组完全不同于后两组.因为对于开普勒轨道而言，六个轨道要素是常数(其中平近点角除外).

为了对上述三组参数相互之间进行变换，共需六组变换关系式，这些关系式是容易推导的.下面我们将着重讨论由轨道要素计算 x,y,z 和 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t,\mathrm{d}y/\mathrm{d}t,\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ 的变换关系式，对其他两个重要变换将只作介绍而不进行推导.这三组变换关系只是对椭圆轨道(当然还包括圆轨道)有效，对抛物线轨道和双曲线轨道的变换关系，推导方法从本质上讲是相类似的.另外还应注意，我们在讨论中都取非旋转的地心赤道坐标系作为参考系，X 轴指向给定日期(例如1990.0)的平春分点，Z 轴指向北天极，如图1所示.

试读结束：需要全本请在线购买：www.ertongbook.com

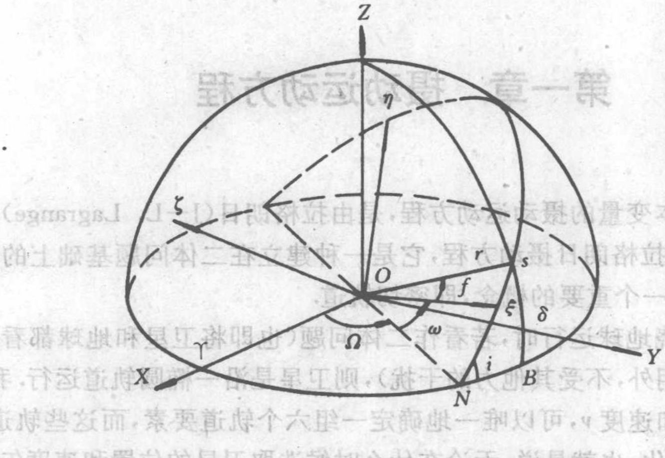

图 1.1　轨道坐标系与赤道直角坐标系

1. 从轨道要素求直角坐标

为确定卫星在椭圆轨道上的运动，取六个轨道要素，亦称开普勒(Kepler)要素如下：

a：椭圆的半长轴；

e：椭圆的偏心率；

i：轨道面的倾角；

Ω：升交点之赤经；

ω：近心点辐角，也称近心点角距；

M：平近点角.

则求解在某时刻 t_0 之开普勒方程，即

$$E - e\sin E = M \qquad (1-1.1)$$

可 给出在该时刻之偏近点角 E 值. 但由于上式是一个超越方程，一般采用迭代法求解. 当已知 M 值时，经迭代可求出 E 值，也可将上式展成如下级数形式：

$$E = M + e\left(1 - \frac{1}{8}e^2 + \frac{1}{192}e^4\right)\sin M + e^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}e^2\right)\sin 2M + e^3\left(\frac{3}{8} - \frac{27}{128}e^2\right)\sin 3M + \frac{1}{3}e^4\sin 4M + \frac{125}{384}e^5\sin 5M + \cdots \qquad (1-1.2)$$

求得 E 值后，再经真近点角 f 与偏近点角 E 的关系式，即

$$\mathrm{tg}\,\frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\mathrm{tg}\,\frac{E}{2} \qquad (1-1.3)$$

求得在 t_0 时刻的 f 值.

现再令 $O-\xi\eta\zeta$ 为卫星轨道直角坐标系，其原点与地心赤道直角坐标系 $O-XYZ$ 之原点相重合，如图 1.1 所示，则在 $O-\xi\eta\zeta$ 坐标系中，卫星之坐标可由下式给出：

$$\left.\begin{aligned} \xi &= r\cos f \\ \eta &= r\sin f \\ \zeta &= o \end{aligned}\right\} \qquad (1-1.4)$$

其中 r 为卫星距坐标原点的距离，可由下式求得

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f} \tag{1-1.5}$$

这样可以求得卫星在轨道坐标系中之坐标 ξ、η 和 ζ. 至于卫星在赤道直角坐标系中的位置，可利用轨道坐标系与赤道直角坐标系之间的关系式求得.

我们由图 1.1 可知，将卫星的坐标从赤道直角坐标系 $O-XYZ$ 变换至卫星轨道直角坐标系 $O-\xi\eta\zeta$，可将坐标系经三次相对转动而获得它们之间的关系式，即先绕 OZ 轴旋转一个 Ω 角，再绕 ON 轴旋转一个 i 角，最后绕 $O\zeta$ 轴旋转一个 ω 角，得

$$(x,y,z)=(\xi,\eta,\zeta)A \tag{1-1.6}$$

式中

$$A=A_\omega A_i A_\Omega$$

其中 A_Ω, A_i, A_ω 为旋转矩阵，可分别由下式给出.

$$A_\Omega=\begin{bmatrix}\cos\Omega & \sin\Omega & 0\\ -\sin\Omega & \cos\Omega & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A_i=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos i & \sin i\\ 0 & -\sin i & \cos i\end{bmatrix}$$

$$A_\omega=\begin{bmatrix}\cos\omega & \sin\omega & 0\\ -\sin\omega & \cos\omega & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

因此

$$A=\begin{bmatrix}l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\\ l_3 & m_3 & n_3\end{bmatrix} \tag{1-1.7}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
l_1 &= \cos\omega\cos\Omega-\sin\omega\sin\Omega\cos i\\
m_1 &= \cos\omega\sin\Omega+\sin\omega\cos\Omega\cos i\\
n_1 &= \sin\omega\sin i\\
l_2 &= -\sin\omega\cos\Omega-\cos\omega\sin\Omega\cos i\\
m_2 &= -\sin\omega\sin\Omega+\cos\omega\cos\Omega\cos i\\
n_2 &= \cos\omega\sin i\\
l_3 &= \sin\Omega\sin i\\
m_3 &= -\cos\Omega\sin i\\
n_3 &= \cos i
\end{aligned}\right\} \tag{1-1.8}$$

因卫星是在轨道平面内，即在 $\xi\eta$ 平面内，所以卫星在地心赤道直角坐标系中的位置为

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1\xi + l_2\eta \\ y &= m_1\xi + m_2\eta \\ z &= n_1\xi + n_2\eta \end{aligned}\right\} \qquad (1-1.9)$$

这样，我们可以从已知的轨道要素计算出在给定瞬时的直角坐标 x,y,z. 下面我们再来推导由轨道要素求速度分量 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t,\mathrm{d}y/\mathrm{d}t,\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ 的计算公式. 为此，先将（1－1.4）和（1－1.9）式对时间 t 求导数，得

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= l_1\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\cos f - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}r\sin f\right) + l_2\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\sin f + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}r\cos f\right) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= m_1\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\cos f - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}r\sin f\right) + m_2\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\sin f + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}r\cos f\right) \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= n_1\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\cos f - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}r\sin f\right) + n_2\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\sin f + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}r\cos f\right) \end{aligned}\right\} \qquad (1-1.10)$$

其中径向速度 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ 可由（1－1.5）式对时间 t 求导数而获得，即

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}}e\sin f \qquad (1-1.11)$$

而周向速度 $r\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$ 可由单位质量之动量矩的定义而求得，即

$$r\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}}(1+e\cos f) \qquad (1-1.12)$$

再将(1－1.11)和(1－1.12)式代入方程(1－1.10)并经整理后得

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}}[-l_1\sin f + l_2(e+\cos f)] \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}}[-m_1\sin f + m_2(e+\cos f)] \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}}[-n_1\sin f + n_2(e+\cos f)] \end{aligned}\right\} \qquad (1-1.13)$$

这样，根据上式就可由已知的轨道要素计算出在给定瞬时的三个速度分量.

2. 从直角坐标求轨道要素

下面我们给出在给定瞬时由已知的直角坐标 x,y,z 和速度分量 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t,\mathrm{d}y/\mathrm{d}t,\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ 计算出轨道要素之关系式，这些关系式的推导留给读者自己来做.

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (1-1.14)$$

$$v^2 = \dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2 \qquad (1-1.15)$$

$$a = \frac{\mu r}{2\mu - rv^2} \qquad (1-1.16)$$

$$e\sin E = \sqrt{\frac{1}{\mu a}}(x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z}) \qquad (1-1.17)$$

$$e\cos E = 1-\frac{r}{a} \qquad (1-1.18)$$

由(1－1.14)至(1－1.18)式，可以确定 a，e 和 E.

$$M = E - e\sin E \tag{1 - 1.19}$$

$$h = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \tag{1 - 1.20}$$

$$\cos i = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{h}, \quad 0 \leqslant i \leqslant 180° \tag{1 - 1.21}$$

$$\sin\Omega = \frac{y\dot{z} - z\dot{y}}{h\sin i} \tag{1 - 1.22}$$

$$\cos\Omega = \frac{x\dot{z} - z\dot{x}}{h\sin i} \tag{1 - 1.23}$$

由以上关系式可以确定 M，i 和 Ω.

$$\mathrm{tg}\,\frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}\mathrm{tg}\,\frac{E}{2} \tag{1 - 1.24}$$

$$\sin(\omega + f) = \frac{z}{r\sin i} \tag{1 - 1.25}$$

$$\cos(\omega + f) = \frac{y}{r}\sin\Omega + \frac{x}{r}\cos\Omega \tag{1 - 1.26}$$

由以上三式可以确定 ω.

3. 从球坐标求六个轨道要素

循以下步骤可由球坐标计算出六个轨道要素. 首先由(1－1.16)式求得半长轴 a，再由下式:

$$e = \sqrt{1 - \frac{rv^2}{\mu}\left(2 - \frac{rv^2}{\mu}\right)\cos^2\nu} \tag{1 - 1.27}$$

求出偏心率 e，其中 ν 是速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 与当地水平面之间的夹角.

$$e\sin E = \frac{rv\sin\nu}{\sqrt{\mu a}} \tag{1 - 1.28}$$

由(1－1.18)和(1－1.28)式可求得 E，则 M 和 f 可由(1 － 1.19) 和(1 － 1.24) 式求得，再继续计算轨道倾角 i：

$$i = \arccos(\cos\delta\sin\psi), \quad 0 \leqslant i \leqslant 180° \tag{1 - 1.29}$$

其中 δ 为卫星的赤纬，ψ 为速度矢量在当地水平面上之投影与该地的正北方向之夹角.

$$\sin(\alpha - \Omega) = \frac{\mathrm{tg}\delta}{\mathrm{tg}i} \tag{1 - 1.30}$$

$$\cos(\alpha - \Omega) = \frac{\cos\psi}{\sin i} \tag{1 - 1.31}$$

从以上两式可以确定 Ω，其中 α 是卫星的赤经.

$$\sin(\omega + f) = \frac{\sin\delta}{\sin i} \tag{1 - 1.32}$$

$$\cos(\omega + f) = \frac{\cos\delta\cos\psi}{\sin i} \tag{1 - 1.33}$$

最后，由(1－1.24)，(1－1.32)和(1－1.33)式，可以求出ω.

§2 拉格朗日摄动运动方程

我们已知，若将人造卫星看成是一个质点时，其运动方程可表达成如下形式：

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}&=-\frac{\mu}{r^3}x+X\\ \ddot{y}&=-\frac{\mu}{r^3}y+Y\\ \ddot{z}&=-\frac{\mu}{r^3}z+Z\end{aligned}\right\}\qquad(1-2.1)$$

以上方程组之右端的第一项是卫星受地球引力作用而产生的加速度分量．这里我们假设地球是一个匀质的圆球，其质量中心位于坐标之原点上．方程右端之第二项是卫星因受其他力的作用而产生的加速度分量．设矢量$\boldsymbol{F}$为其他力之合力，则

$$\boldsymbol{F}=(mX,mY,mZ)\qquad(1-2.2)$$

式中m为卫星之质量．我们称$\boldsymbol{F}$为作用于卫星上的摄动力，而(X,Y,Z)叫做卫星受到的摄动加速度分量，则当摄动力$\boldsymbol{F}$消失时，(1－2.1)式变成：

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}+\frac{\mu}{r^3}x&=0\\ \ddot{y}+\frac{\mu}{r^3}y&=0\\ \ddot{z}+\frac{\mu}{r^3}z&=0\end{aligned}\right\}\qquad(1-2.3)$$

上式就是二体问题的运动方程．其解可写成以下形式：

$$\left.\begin{aligned}x&=x(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_6,t)\\ y&=y(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_6,t)\\ z&=z(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_6,t)\\ \dot{x}&=\dot{x}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_6,t)\\ \dot{y}&=\dot{y}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_6,t)\\ \dot{z}&=\dot{z}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_6,t)\end{aligned}\right\}\qquad(1-2.4)$$

这是椭圆运动在直角坐标系中的表达式，它们是六个轨道要素和时间的函数．在二体问题中，轨道要素是常数，因此我们有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial x}{\partial t},\quad\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial y}{\partial t},\quad\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial t}\qquad(1-2.5)$$

为了讨论方便，我们假设摄动力为有势力，则摄动加速度可以表达成摄动函数R的导数，即

$$
\left.\begin{aligned}
X &= \frac{\partial R}{\partial x} \\
Y &= \frac{\partial R}{\partial y} \\
Z &= \frac{\partial R}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \tag{1-2.6}
$$

因此(1－2.1)式可改写成：

$$
\left.\begin{aligned}
\ddot{x} + \frac{\mu}{r^3}x &= \frac{\partial R}{\partial x} \\
\ddot{y} + \frac{\mu}{r^3}y &= \frac{\partial R}{\partial y} \\
\ddot{z} + \frac{\mu}{r^3}z &= \frac{\partial R}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \tag{1-2.7}
$$

根据常微分方程之常数变异法的原理，只要将六个轨道要素作为变量，即作为时间 t 的函数，则(1－2.4)式就是方程(1－2.7)的解. 为此，将方程(1－2.4)之前三式对时间 t 求导数，得

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial x}{\partial t} + \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial x}{\partial \alpha_j}\frac{\mathrm{d}\alpha_j}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial y}{\partial t} + \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial y}{\partial \alpha_j}\frac{\mathrm{d}\alpha_j}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial z}{\partial t} + \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial z}{\partial \alpha_j}\frac{\mathrm{d}\alpha_j}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}\right\} \tag{1-2.8}
$$

现在我们利用密切轨道的特性，即卫星在摄动力作用下，在其实际轨道上的任意点看成是相应的密切轨道上的点，并且在该点上实际轨道与密切轨道之速度相等. 据此，在上式中我们必须要求：

$$
\left.\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{6} \frac{\partial x}{\partial \alpha_j}\frac{\mathrm{d}\alpha_j}{\mathrm{d}t} &= 0 \\
\sum_{j=1}^{6} \frac{\partial y}{\partial \alpha_j}\frac{\mathrm{d}\alpha_j}{\mathrm{d}t} &= 0 \\
\sum_{j=1}^{6} \frac{\partial z}{\partial \alpha_j}\frac{\mathrm{d}\alpha_j}{\mathrm{d}t} &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{1-2.9}
$$

再将(1－2.8)式两端对时间 t 求导数，得

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha_j \partial t}\frac{\mathrm{d}\alpha_j}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha_j \partial t}\frac{\mathrm{d}\alpha_j}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha_j \partial t}\frac{\mathrm{d}\alpha_j}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}\right\} \tag{1-2.10}
$$

考虑到实际轨道在某点的加速度与相应的密切轨道在该点的加速度是不相同的，故将(1－2.10)和(1－2.3)式代入(1－2.7)式，得

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com