工程数学自学参考用书

工程数学自学参考用书

# 工程数学提要与解题范例

甘以炎　李远聆　胡家延 编

水利电力出版社

工程数学自学参考用书
**工程数学提要与解题范例**
甘以炎 李远聆 胡家延 编
*
水利电力出版社出版、发行
(北京三里河路6号)
各地新华书店经售
水利电力出版社印刷厂印刷
*
787×1092毫米 32开本 21印张 466千字
1988年11月第一版 1988年11月北京第一次印刷
印数0001—3800册 定价8.20元
ISBN 7-120-00386-0/TV·127

## 内 容 提 要

本书内容包括线性代数、矢量分析与场论、复变函数、概率论与数理统计、积分变换以及数学物理方程共六篇。每篇由三部分组成：内容提要、范例与习题(附参考答案)。内容提要可供复习用，并可帮助读者明确学习要点；范例可帮助读者综合运用所学知识；习题参考答案着重交代解题思路，少量题给出了多种解题方法，以提高读者分析问题、解决问题的能力。书中86年、87年硕士研究生入学考试的工程数学试题可供自学检测参考。

本书可供高等工科院校，函授大学，电视大学师生及工程技术人员参考。

# 前　言

随着我国社会主义四个现代化的需要，电视大学生，函授大学生及自学者日益增多，为了便于这些同志自学，特编这本书。

本书内容包括线性代数、矢量分析与场论、复变函数、概率论与数理统计、积分变换以及数学物理方程共六篇。每篇的开头有内容提要，可以供复习时查阅，并帮助读者明确基本概念、基本理论与计算方法；第二部分是范例，例题主要选自近几年招考硕士研究生入学试题（在题中注明校名及年代），以帮助读者在综合运用所学知识方面开扩眼界；也选了个别例子，用以说明在学习中易犯的错误；第三部分是习题与解题过程。解题过程有详有略，在交代解题思路方面较详，具体计算则较略。为便于核对，给出了参考答案。有少量题给出了多种解题方法，希望能起到举一反三、提高分析问题解决问题能力的作用。

读者应先复习教材，在基本搞懂所学内容，对定理、公式初步了解适用条件及用法后，再动手做题。经过认真思考并动手做题之后，翻阅本书有关部分，作为校核或答疑。希望通过本书读者能无师自通，而不是妨碍独立思考。

本书由彭旭麟教授、周鸿印教授审阅。他们对内容提要的编写、范例的选择以及习题的解法，都提出了许多宝贵意见，对提高本书的质量起了重要的作用，谨向他们表示衷心的感谢。

在编写过程中，张元林、黄康、陆宝珊、黄承绪等同志

对有关内容提出了许多有益的意见，我们考虑、采纳了这些同志的意见，谨向这些同志致以谢意。

本书由甘以炎教授主编,李远聆（第一、三、五、六篇）、胡家延（第二篇）参加编写。由于水平有限，书中缺点和错误在所难免，希望读者批评、指正，以便再版时修正。

编　者

1987年1月

# 目　录


前　言

**第一篇　线性代数** …… 1

第一章　内容提要及范例 …… 1

第一节　内容提要 …… 1

第二节　范例 …… 16

第二章　习题及参考答案 …… 24

习题一　行列式及其性质 …… 24

习题二　向量空间 …… 31

习题三　线性变换与矩阵 …… 38

习题四　矩阵的秩和线性方程组 …… 57

习题五　内积与正交变换 …… 67

习题六　二次型 …… 73

**第二篇　矢量分析与场论** …… 85

第一章　内容提要及范例 …… 85

第一节　内容提要 …… 85

第二节　范例 …… 97

第二章　习题及参考答案 …… 103

习题一　矢量分析 …… 103

习题二　场 …… 105

习题三　数量场的方向导数和梯度 …… 106

习题四　矢量场的通量与散度 …… 111

习题五　矢量场的环量与旋度 …… 114

习题六　几个重要的矢量场 …… 118

习题七　▽算子（哈米尔顿算子） …… 124

习题八　梯度、散度、旋度与调和量在正交曲线坐标系中的表示式 ……126
**第三篇　复变函数** ……130
第一章　内容提要及范例 ……130
第一节　内容提要 ……130
第二节　范例 ……140
第二章　习题及参考答案 ……148
习题一　复数与复变函数 ……148
习题二　解析函数 ……171
习题三　复变函数的积分 ……190
习题四　级数 ……204
习题五　留数 ……217
习题六　保角映射 ……235
**第四篇　概率论与数理统计** ……257
第一章　内容提要及范例 ……257
第一节　内容提要 ……257
第二节　范例 ……283
第二章　习题及参考答案 ……307
习题一　概率论的基本概念 ……307
习题二　随机变量及其分布 ……330
习题三　多维随机变量及其分布 ……354
习题四　随机变量的数字特征 ……379
习题五　大数定律和中心极限定理 ……398
习题六　随机过程的基本知识 ……404
习题七　平稳随机过程 ……408
习题八　线性系统对随机输入的响应 ……420
习题九　样本及其分布 ……430
习题十　参数估计 ……433

习题十一　假设检验 ……………………………………446
习题十二　方差分析和回归分析 ………………………461

**第五篇　积分变换** ………………………………………468
第一章　内容提要及范例 ……………………………………468
第一节　内容提要……………………………………………468
第二节　范例 ………………………………………………472
第二章　习题及参考答案 ……………………………………480
第一节　傅里叶变换…………………………………………480
习题一　傅氏积分 ……………………………………………480
习题二　傅氏变换 ……………………………………………482
习题三　傅氏变换的性质 ……………………………………492
习题四　卷积与相关函数 ……………………………………497
第二节　拉普拉斯变换………………………………………505
习题一　拉氏变换的概念 ……………………………………505
习题二　拉氏变换的性质 ……………………………………509
习题三　拉氏逆变换 …………………………………………526
习题四　卷积 …………………………………………………533
习题五　拉氏变换的应用 ……………………………………539

**第六篇　数学物理方程** …………………………………550
第一章　内容提要及范例 ……………………………………550
第一节　内容提要 ……………………………………………550
第二节　范例 …………………………………………………556
第二章　习题及参考答案 ……………………………………565
习题一　一些典型方程和定解条件的推导 …………………565
习题二　分离变量法 …………………………………………569
习题三　行波法与积分变换法 ………………………………600
习题四　拉普拉斯方程的格林函数法 ………………………608
习题五　贝塞尔函数 …………………………………………617

习题六　勒让德多项式 ……………………………………633
习题七　数学物理方程的差分解法 ……………………644
附录……………………………………………………………655
一、试题 ……………………………………………………655
二、答案 ……………………………………………………659

# 第一篇 线 性 代 数

## 第一章 内容提要及范例

### 第一节 内 容 提 要

（一）行列式及其性质

1. $n$ 阶行列式的定义❶

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\Sigma(-1)^{J}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中，$J$是数列$j_1j_2\cdots j_n$的逆序数，“$\Sigma$”是对所有$n$级排列求和。当$n=2$（或3），就得到二（或三）阶行列式。

2. $n$ 阶行列式的性质

1）行列式与它的转置行列式相等。

2）交换行列式的任意两行或两列，行列式仅改变符号。

3）把一个行列式的某行（列）的所有元素乘上某数$k$，等于用$k$乘行列式。

4）行列式中有两行（列）的对应元素相等，则行列式等于零。

---

❶ 一般的$n$阶行列式，也可以用逐次递推的方式定义。

5 ）如果行列式的某行（列）的各元素是两项之和，那么这个行列式等于两个行列式的和。

例如二阶行列式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

6 ）把行列式的任一行（列）的元素乘以同一个数后，加到另一行（列）的对应元素上去，行列式不变。

7 ）行列式$D$等于其中任一行（列）的各个元素与其代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}$$

$$i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n。$$

8 ）行列式$D$中，任一行（列）各个元素与另一行（列）相应元素的代数余子式的乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\ i\neq j$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\ i\neq j$$

$$i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n。$$

3.行列式的计算

（ 1 ）二阶或三阶行列式的计算

1 ）对角线展开法；

2 ）按某一行（或列）展开法。

（2）$n$ 阶行列式的计算

1）按某一行（或列）展开法（并利用已知结果）；

2）用拉普拉斯（Laplace）定理：行列式

$$D=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_tA_t$$

其中$M_1$，$M_2$，…，$M_t$（$t=C_n^k$）是在行列式$D$中任选$k$（$k<n$）行（或$k$列）元素组成的$k$阶子式，它们的代数余子式对应为$A_1$，$A_2$，…，$A_t$。

一般计算高阶行列式时，利用前面 2 中所列的性质比直接用定义计算要简便。特别是利用 2 中所列的性质 6），使某一行（列）除一个或少数几个元素外，其余都化为零，然后按该行（列）展开，会简便得多。

（二）线性空间（向量空间）

1.向量的线性相关性

（1）线性相关与线性无关

给定向量$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$。若存在不全为零的数$k_1$，$k_2$…，$k_m$，能使关系式

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=0$$

成立，则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$为线性相关的；若上述等式**只能**在$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_m$全是零时才能成立，则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$为线性无关的。

（2）线性相关的充分必要条件

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$（$m\geqslant 2$）线性相关的充分必要条件为其中至少有一个向量是其余向量的线性组合。

2.线性空间（向量空间）

1）设$\boldsymbol{V}$是一个非空集合，$\boldsymbol{R}$为实数的全体。对于集合$\boldsymbol{V}$内的元素规定了加法及乘以实数两种运算，且集合$\boldsymbol{V}$对这两种运算封闭（即：若$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{V}$，$\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{V}$，$\lambda\in\boldsymbol{R}$，则和$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in$

$\boldsymbol{V}$，数乘$\lambda\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{V}$），并且满足以下八条运算规律：

①交换律$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$；②结合律$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$；③存在零元素0，对任何$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{V}$，有$\boldsymbol{x}+0=\boldsymbol{x}$；④对任何$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{V}$，存在负元$-\boldsymbol{x}$，使$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=0$；⑤$1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$；⑥$\lambda(\mu\boldsymbol{x})=(\lambda\mu)\boldsymbol{x}$；⑦$(\lambda+\mu)\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{x}$；⑧$\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\lambda\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}$。

则称$\boldsymbol{V}$为$\boldsymbol{R}$上的线性空间（或向量空间、矢量空间），$\boldsymbol{V}$内的元素不论其本来的性质如何，统称向量。

线性空间是具有特定结构的向量集合（即：定义了满足上述八条规律的线性运算的非空集合），其中的元素（称为向量）是普通向量（有序数组）概念的推广，但线性空间的向量不一定是有序数组，线性空间中的运算不一定是有序数组的加法及数乘运算。

2）设有线性空间$\boldsymbol{V}_1$，$\boldsymbol{V}_2$，若$\boldsymbol{V}_1\subset\boldsymbol{V}_2$，就称$\boldsymbol{V}_1$是$\boldsymbol{V}_2$的子空间。

3）设线性空间$\boldsymbol{V}$中的$n$个向量$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关，且$\boldsymbol{V}$中任一向量$\boldsymbol{x}$都可由它们线性表示

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

则$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$称为线性空间$\boldsymbol{V}$的一个基（或基底），实数$x_1$，$x_2$，…，$x_n$叫做向量$\boldsymbol{x}$关于此基的坐标，记作（$x_1$，$x_2$，…，$x_n$）。

4）非零线性空间$\boldsymbol{V}$的基所含向量的个数$n$，称做线性空间$\boldsymbol{V}$的维数，记为$\dim\boldsymbol{V}$，这时$\boldsymbol{V}$叫做$n$维线性空间，可记作$\boldsymbol{V}_n$。规定零空间的维数是零。

5）设$\boldsymbol{V}$与$\boldsymbol{U}$是两个线性空间，如果它们之间的元素有一一对应关系，且这个对应关系保持线性组合的对应，则称**$\boldsymbol{V}$与$\boldsymbol{U}$同构**。任何$n$维线性空间都与$R^n$（$n$维数组向量空间）

同构。

3.坐标变换

设$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$与$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_n$分别是$\boldsymbol{V}$的两个基，且

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 = c_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + c_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + c_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\beta}_2 = c_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + c_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + c_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{\beta}_n = c_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1 + c_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + c_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n \end{cases}$$

则上述方程组右边系数矩阵的转置矩阵[1]

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \cdots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \cdots c_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ c_{n1} & c_{n2} \cdots c_{nn} \end{bmatrix}$$

叫做由原基$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$变换为新基$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_n$的演化矩阵或过渡矩阵。

如果一向量在原基底的坐标为

$$\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

在新基底的坐标为

$$\boldsymbol{y} = (y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)$$

则新旧坐标的关系为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$$

（三）矩阵与线性方程组

1.概念

（1）矩阵

由$m \times n$个数$a_{ij}$（$i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$）

[1] 参阅后面的(三)。

排成$m$行$n$列的数表

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

叫做$m$行$n$列矩阵，记为

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{mn} \quad 或 \quad \boldsymbol{A}=(a_{ij})。$$

（2）一些特殊矩阵

1）当$m=n$时，$\boldsymbol{A}$称为$n$阶方阵；

2）只有一行的矩阵

$$\boldsymbol{A}=(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)$$

叫做行矩阵；只有一列的矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

叫做列矩阵；元素都是零的矩阵，称为零矩阵，记作$\boldsymbol{O}$；

3）如果$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$都是$m\times n$矩阵，就说$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$是**同型**的；两同型矩阵的对应元素若相等，即

$a_{ij}=b_{ij}$　（$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$）

就称两矩阵相等，记作

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B};$$

4）$n$阶方阵从左上角到右下角的直线叫做主对角线。如果一个方阵的非主对角线上元素全部为零，则这方阵叫做对角矩阵，记作

$$\operatorname{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

这时，如果又有

$$a_{ii}=1 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

就称做单位阵，记作

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix};$$

5）形如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \text{与} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

的矩阵，分别称为上三角形矩阵与下三角形矩阵。

6）把矩阵$\boldsymbol{A}$的行换成同序号的列，得到一个新矩阵，叫做$\boldsymbol{A}$的转置矩阵，记作$\boldsymbol{A}'$。易知

$$(\boldsymbol{A}')'=\boldsymbol{A}$$

如果$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}$，就称$\boldsymbol{A}$为对称矩阵，这时有

$$a_{ij}=a_{ji} \quad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

即元素关于主对角线对称。如果

$$a_{ij}=-a_{ji} \quad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

就称其为反对称矩阵。

2.矩阵的初等运算与逆矩阵

（1）矩阵的初等运算

1）设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$与$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$同型，则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij});$$

2）设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，则

$$\lambda\boldsymbol{A}=(\lambda a_{ij});$$

3）设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，则

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{c}_{ij})$$

其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

注意$\boldsymbol{A}$的列数与$\boldsymbol{B}$的行数相等，且一般

$$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$$

有时，对$n$阶方阵$\boldsymbol{A}$，规定

$$\boldsymbol{A}^1=\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{AA},\ \cdots,\ \boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{A};$$

（2）逆矩阵

对于$n$阶方阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$，如果

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$$

则称$\boldsymbol{A}$可逆，$\boldsymbol{A}$的逆矩阵记作

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$$

1）若矩阵$\boldsymbol{A}$的行列式$|\boldsymbol{A}|\neq0$（当$|\boldsymbol{A}|=0$时，称$\boldsymbol{A}$为奇异阵，否则为非奇异阵），则

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$$

其中$\boldsymbol{A}^*$称为$\boldsymbol{A}$的伴随阵，按下式计算