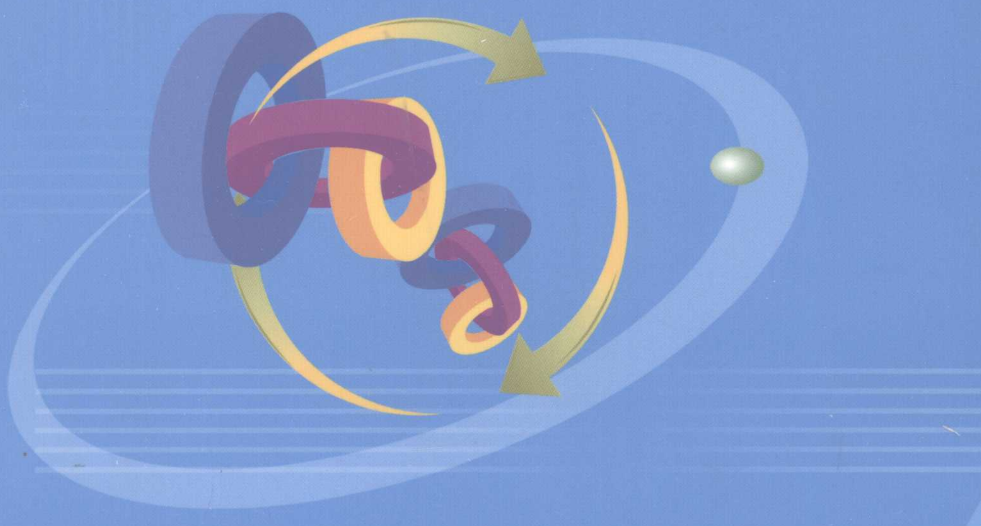
应用型本科理工类基础课程规划教材

线性代数学习指导

白同亮　高桂英　张　鹤　孙晓坤　编



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

应用型本科理工类基础课程规划教材

线性代数学习指导

白同亮　高桂英　张　鹤　孙晓坤　编

北京邮电大学出版社
·北京·

内容简介

本书是与白同亮、高桂英编写的《线性代数及其应用》配套的学习指导书。内容共五章，包括行列式，矩阵，线性方程组和 n 维向量，特征值、特征向量与二次型，以及应用问题。内容按知识点分类确定，其顺序与原教材一致。每章都划分成四个板块：基本知识点、典型例题解答、巩固练习和综合训练。本书的编写遵照知识结构完整、内容重点突出、例题新颖独特的原则。突出解题思路，归纳解题方法，注重对学生解题方法和解题能力的培养。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导/白同亮等编．—北京：北京邮电大学出版社，2008

ISBN 978-7-5635-1835-7

Ⅰ. 线… Ⅱ. 白… Ⅲ. 线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 155426 号

书　　名：线性代数学习指导

编　　者：白同亮　高桂英　张鹤　孙晓坤

责任编辑：张珊珊

出版发行：北京邮电大学出版社

社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号(邮编：100876)

发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578

E-mail：publish@bupt.edu.cn

经　　销：各地新华书店

印　　刷：北京忠信诚胶印厂

开　　本：787 mm×960 mm　1/16

印　　张：10.25

字　　数：221 千字

版　　次：2008 年 11 月第 1 版　2008 年 11 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-1835-7　　　　定　价：17.00 元

前　　言

本书与白同亮、高桂英主编的《线性代数及其应用》教材同步，进一步体现了"精讲多练"教学法，笔者结合长期从事大学数学教学的经验，以及长期对历年考研数学试题的分析和研究，编写此书.

本书共 5 章，内容包括行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、特征值和特征向量、二次型.

内容顺序与教材一致. 每章都划分成 4 个板块：基本知识点、典型例题解答、巩固练习、综合训练.

基本知识点对各章节的知识进行回顾；典型例题解答针对每个知识点精选例题，进一步巩固各知识点，同时将前面的知识进行综合，使前后知识融会贯通；巩固练习、综合训练主要针对各节知识点，加深学生对基本知识点的理解和掌握，进一步训练学生综合运用和掌握知识的能力.

每一章节后面均配有参考答案，对于难度比较大的题目相应地给出了提示或者详细的解答，便于读者查阅.

本书由白同亮、高桂英、张鹤、孙晓坤编写. 本书的出版得到了北京邮电大学出版社的大力支持. 在此深表谢意.

由于编者水平有限，难免有不足之处，敬请指正.

编　者

目　录

第 1 章　行列式

第 2 章　矩阵

第1章 行列式

1.1 二阶行列式

1.1.1 基本知识点

1. 二阶行列式的概念

由 2^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2)$所构成的二阶行列式记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

其值为 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，其中 $a_{ij}(i,j=1,2)$称为行列式的元素.

2. 二元一次线性方程组的解法

设有二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases}$$

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

则当 $D\neq 0$ 时，方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}, \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}. \end{cases}$$

1.1.2 典型例题解答

例 1.1 计算二阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$.

解 由定义

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=2\times4-7\times(-1)=15.$$

例 1.2 求解线性方程组 $\begin{cases} x_1-3x_2=2, \\ 2x_1+x_2=-1. \end{cases}$

解

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1-(-6)=7\neq0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2-3=-1, D_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-1-4=-5,$$

故方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=-\dfrac{1}{7}, \\ x_2=-\dfrac{5}{7}. \end{cases}$$

1.1.3 巩固练习

1-1-1 计算下列二阶行列式.

(1) $D=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$; (2) $D=\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$;

(3) $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$; (4) $D=\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}$.

1-1-2 求解下列线性方程组.

(1) $\begin{cases} 2x_1-x_2=1, \\ 3x_1+x_2=2; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x_1+4x_2=0, \\ 2x_1-3x_2=4. \end{cases}$

1.2 三阶行列式

1.2.1 基本知识点

1. 三阶行列式的概念

由 3^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 所构成的三阶行列式记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 称为行列式的元素，其含义为一数值，其值由后面的知识点给出.

将行列式 D 的各行与同序号的列互换，所得到的行列式称为行列式 D 的转置行列式，记为 D^{T}.

2. 余子式及代数余子式的概念

在三阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，剩下的元素按原来的相对位置不变构成的二阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}；记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

称其为元素 a_{ij} 的代数余子式.

3. 三阶行列式的计算

三阶行列式的值等于它的任意一行（或列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}(i=1,2,3),$$

或

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}(j=1,2,3).$$

此即为行列式的拉普拉斯(Laplace)展开定理.

4. 三阶行列式的性质

(1) 行列式与它的转置行列式相等.

(2) 互换行列式的任意两行（或列），行列式的值变号.

(3) 若行列式的任意行（或列）的各元素同乘以同一数 k，则行列式也被该数 k 相乘.

(4) 若行列式的某一行（或列）中均含有公因子 k，则 k 可以提到行列式记号的外面.

(5) 若行列式有两行（或列）的对应元素相同（或成比例），则此行列式值等于 0.

(6) 若行列式的某一行（或列）的元素均表示为两个数之和，则行列式可以表示为两个同阶的行列式之和.

(7) 行列式的某行（或列）的每个元素与另一行（或列）的对应元素的代数余子式乘积之和为 0.

(8) 行列式的某行（或列）的各元素乘以数 k 加到另一行（或列）的对应元素上，则行列式的值不变.

1.2.2 典型例题解答

例 1.3 设 $D=\begin{vmatrix}3&4&1\\4&1&x\\1&2&3\end{vmatrix}$，求元素 x 的余子式及代数余子式.

解 元素 x 的余子式为 $M_{23}=\begin{vmatrix}3&4\\1&2\end{vmatrix}=6-4=2$，

代数余子式为 $A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-2$.

例 1.4 已知 $D=\begin{vmatrix}1&2&-2\\0&-2&3\\0&0&4\end{vmatrix}$，求

(1) $A_{11}+A_{12}+A_{13}$；

(2) $A_{11}+2A_{12}-2A_{13}$；

(3) $-2A_{12}+3A_{13}$.

解 (1) $A_{11}+A_{12}+A_{13}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-2&3\\0&4\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0&3\\0&4\end{vmatrix}+$

$$(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0&-2\\0&0\end{vmatrix}=-8;$$

(2) 该式相当于将行列式 D 按第一行展开，故等于 D 的值，即

$$A_{11}+2A_{12}-2A_{13}=D=1\times(-2)\times4=-8;$$

(3) 该式相当于用行列式第二行各元素与第一行对应元素的代数余子式乘积之和，因此

$$-2A_{12}+3A_{13}=0.$$

例 1.5 设三阶行列式 D 第一行元素分别为 1,3,4，且第一行元素所对应的余子式的值分别为 2,−1,3，求行列式 D 的值.

解 因 $M_{11}=2,M_{12}=-1,M_{13}=3$，从而 $A_{11}=2,A_{12}=1,A_{13}=3$，依行列式的定义

$$D=1\times2+3\times1+4\times3=17.$$

例 1.6 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1\\4&6&8\\5&7&10\end{vmatrix}$.

解法一

依行列式的拉普拉斯展开定理，有

$$\begin{aligned}D&=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}\\&=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}6&8\\7&10\end{vmatrix}+1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4&8\\5&10\end{vmatrix}+1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4&6\\5&7\end{vmatrix}\\&=4+0-2=2.\end{aligned}$$

为简化计算,一般情况下,行列式的展开选择按零元素最多的行或列进行.

解法二

将第一列各元素同乘以-1分别加到第二列和第三列的对应元素上,再按第一行展开,即

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\4&6&8\\5&7&10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\4&2&4\\5&2&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&4\\2&5\end{vmatrix}=2.$$

通常情况下,行列式的计算需要将行列式的性质和拉普拉斯展开定理结合起来使用.

例 1.7 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&-1\\199&396&-97\\-1&-4&3\end{vmatrix}$.

解 该行列式的第二行元素均可看成是两个元素之和,即

$$D=\begin{vmatrix}1&2&-1\\199&396&-97\\-1&-4&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&-1\\-1+200&-4+400&3+(-100)\\-1&-4&3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&2&-1\\200&400&-100\\-1&-4&3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2&-1\\-1&-4&3\\-1&-4&3\end{vmatrix}=100\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&4&-1\\-1&-4&3\end{vmatrix}$$

$$=100\begin{vmatrix}1&2&-1\\0&0&1\\0&-2&2\end{vmatrix}=-100\begin{vmatrix}1&2&-1\\0&-2&2\\0&0&1\end{vmatrix}=200.$$

例 1.8 已知 $f(x)=\begin{vmatrix}1&2&4\\1&5&25\\1&x&x^2\end{vmatrix}$,证明至少存在一点 $\xi\in(2,5)$,使得 $f'(\xi)=0$.

证明 因为

$$f(x)=\begin{vmatrix}1&2&4\\1&5&25\\1&x&x^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&4\\0&3&21\\0&x-2&x^2-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&21\\x-2&x^2-4\end{vmatrix}=3(x^2-7x+10),$$

显然函数 $f(x)$ 在 $[2,5]$ 上连续,在 $(2,5)$ 内可导,且 $f(2)=f(5)=0$,故由罗尔定理,至少存在一点 $\xi\in(2,5)$,使得 $f'(\xi)=0$.

例 1.9 已知 $\begin{vmatrix}a_1+3b_1&b_1&2c_1\\a_2+3b_2&b_2&2c_2\\a_3+3b_3&b_3&2c_3\end{vmatrix}=2$,计算 $D=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$.

解 由已知条件可得

$$\begin{vmatrix} a_1+3b_1 & b_1 & 2c_1 \\ a_2+3b_2 & b_2 & 2c_2 \\ a_3+3b_3 & b_3 & 2c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 2c_1 \\ a_2 & b_2 & 2c_2 \\ a_3 & b_3 & 2c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3b_1 & b_1 & 2c_1 \\ 3b_2 & b_2 & 2c_2 \\ 3b_3 & b_3 & 2c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 2c_1 \\ a_2 & b_2 & 2c_2 \\ a_3 & b_3 & 2c_3 \end{vmatrix} = 2D = 2,$$

因此所求行列式值为

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 1.$$

1.2.3 巩固练习

1-2-1 设 $D=\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ -3 & -2 & 1 \\ 2 & y & 1 \end{vmatrix}$,求元素 x 和 y 的余子式和代数余子式.

1-2-2 设 $D=\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$,

(1) 求第一行各元素的余子式之和;

(2) 求第一行各元素的代数余子式之和.

1-2-3 设三阶行列式 D 的第一列元素分别为 2,1,−2,它们对应的余子式的值分别为 3,−1,4,求行列式 D 的值.

1-2-4 计算下列行列式.

(1) $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;　　(2) $D=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$;

(3) $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;　　(4) $D=\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$;

(5) $D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x \\ x & x & 0 \end{vmatrix}$.

1-2-5 设 a,b,c 为各不相同的实数,且 $a+b+c=0$,计算 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$.

1-2-6 证明:$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3$.

1.3 n 阶行列式

1.3.1 基本知识点

1. n 阶行列式的概念

由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 所构成的 n 阶行列式记为

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 称为行列式的元素.

针对三阶行列式所定义的余子式和代数余子式的概念、行列式的性质和拉普拉斯展开定理，对 n 阶行列式同样适用.

2. 特殊的行列式

(1) 上三角行列式

主对角线以下元素全为 0 的行列式称为上三角行列式，其值等于主对角线上各元素的乘积，即

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) 下三角行列式

主对角线以上元素全为 0 的行列式称为下三角行列式，其值等于主对角线上各元素的乘积，即

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(3) 对角行列式

主对角线以外的元素全为 0 的行列式称为对角行列式，其值等于主对角线上各元素的乘积，即

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

1.3.2 典型例题解答

例 1.10 设四阶行列式 D 的第三列元素分别为 $2,-1,3,0$，且第三列元素所对应的余子式分别为 $4,-3,5,2$，计算行列式 D 的值.

解 由已知

$$M_{13}=4,\quad M_{23}=-3,\quad M_{33}=5,\quad M_{43}=2,$$

则

$$A_{13}=4,\quad A_{23}=3,\quad A_{33}=5,\quad A_{43}=-2,$$

又

$$a_{13}=2,\quad a_{23}=-1,\quad a_{33}=3,\quad a_{43}=0,$$

依行列式的拉普拉斯展开定理有

$$D=2\times4+(-1)\times3+3\times5+0\times(-2)=20.$$

例 1.11 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{vmatrix}$.

解 该行列式为上三角行列式，则

$$D=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{vmatrix}=1\times2\times3\times4=24.$$

例 1.12 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{vmatrix}$.

解 将第一行各元素乘以 -1 后，分别加到第二、三、四行的对应元素上去，再按第一列进行展开，即

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&-2&-2\\0&-2&0&-2\\0&-2&-2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-2&-2\\-2&0&-2\\-2&-2&0\end{vmatrix};$$

再将第一列元素乘以 -1 后加到第三列的对应元素上，然后按第二行展开，则有

$$D=\begin{vmatrix}0&-2&-2\\-2&0&0\\-2&-2&2\end{vmatrix}=-2\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2&-2\\-2&2\end{vmatrix}=-16.$$

例 1.13 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&3&3&3\\3&2&3&3\\3&3&3&3\\3&3&3&4\end{vmatrix}$.

解 先提出第三行的公因子 3,再将第一列各元素乘以 -1 后加到第二、三、四列的对应元素上去,然后按第三行展开,即

$$D=\begin{vmatrix}1&3&3&3\\3&2&3&3\\3&3&3&3\\3&3&3&4\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1&3&3&3\\3&2&3&3\\1&1&1&1\\3&3&3&4\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1&2&2&2\\3&-1&0&0\\1&0&0&0\\3&0&0&1\end{vmatrix}$$

$$=3\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&2&2\\-1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}=6.$$

例 1.14 设 $f(x)=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4+x\\a_1&a_2&a_3+x&a_4\\a_1&a_2+x&a_3&a_4\\a_1+x&a_2&a_3&a_4\end{vmatrix}$,其中 a_1,a_2,a_3,a_4 为常数,求方程 $f(x)=0$ 的根.

解 将第一行各元素乘以 -1 后分别加到第二、三、四行的对应元素上去,再从第二、三、四行中都提出公因子 x,即

$$f(x)=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4+x\\0&0&x&-x\\0&x&0&-x\\x&0&0&-x\end{vmatrix}=x^3\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4+x\\0&0&1&-1\\0&1&0&-1\\1&0&0&-1\end{vmatrix}$$

$$=x^3\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3&a_1+a_2+a_3+a_4+x\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{vmatrix}=x^3(a_1+a_2+a_3+a_4+x)=0,$$

故方程的根为 $x=0$ 或 $x=-(a_1+a_2+a_3+a_4)$.

例 1.15 求解方程 $\begin{vmatrix}1&1&3&4\\3&x^2-1&6&12\\3&3&5&16\\3&3&5&x^2\end{vmatrix}=0$.

解法一 将第一行各元素乘以 -3 后分别加到第二、三、四行的对应元素上去,再按第一列展开,即