系统与控制科学应用数学丛书

近代概率引论

——测度、鞅和随机微分方程

袁震东 编著

科学出版社

系统与控制科学应用数学丛书

近代概率引论

——测度、鞅和随机微分方程

袁震东 编著

科学出版社

1991

内 容 简 介

本书是系统与控制科学应用数学丛书之一．该丛书是为适应系统与控制科学的发展而组织编写的一套旨在提高该领域各类人员数学素养的应用数学参考书．

本书系统地介绍测度论、鞅和随机微分方程的基本结果．内容包括测度空间，积分，各种收敛关系，Radon-Nikodym 定理，条件数学期望，鞅和鞅收敛定理，鞅型序列中心极限定理，维纳过程和随机微分方程初步，以及近代概率论在控制中的某些应用．本书叙述由浅入深，以使从事应用科学的读者能较快地掌握近代概率论的知识．

本书可作为高等院校系统与控制专业的教学用书，也可作为信息科学、工程科学、管理科学、力学与应用数学专业的师生以及工程技术人员的数学参考书．

系统与控制科学应用数学丛书

近代概率引论

—测度、鞅和随机微分方程

袁震东 编著

责任编辑 李淑兰

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1991 年 9 月第 一 版 开本：787×1092 1/32

1991 年 9 月第一次印刷 印张：11 3/8

印数：0001—2 000 字数：255 000

ISBN 7-03-002405-2/TP · 177

定价：11.80 元

系统与控制科学应用数学丛书

编辑委员会

主　编

黄　琳

副主编

张志方　郑应平

编辑委员

冯德兴　郑大钟　张朝池

毛剑琴　李淑兰

序　　言

系统与控制科学的发展始终与数学密切相关．一方面它从丰富的数学宝库中吸取营养以解决所面临的日益复杂的问题，离开现代数学的支持，系统与控制科学是寸步难行的；另一方面，系统与控制科学又有其自身的研究特点，复杂的研究对象，明确的工程背景与独特的问题提法以及方法上的多样性与综合性．这些特点向数学提出了一系列复杂而又新颖的问题．长期从事系统与控制科学的研究人员都深刻地感受到系统与控制科学需要能适应自己发展要求的数学．也正因为如此，在这个领域内始终吸引了大量的数学家特别是应用数学家的研究兴趣．可以说系统与控制科学本身是工程科学家、数学家和近 10 多年来新加入的计算机科学家共同培育的丰腴土地．

由于近代科学技术发展的需要和推动，计算机的大量应用和现代数学的支持，系统与控制科学在近 30 年里发生了令人吃惊的变化．单就数学工具的使用而言，在 50 年代控制理论与系统工程的成果中，线性空间与线性变换的使用尚不多见，而在今天的系统与控制科学的工作中，不仅实分析、拓扑、泛函、微分几何等方面的结果常被引用，而且甚至会碰到近世代数、代数几何、微分拓扑等数学内容．在研究生所用的教材中，也常遇到甚为高深的数学概念和知识．这种情况的出现并不是偶然的，也绝非少数人的偏爱，而是形势发展的必然．这是由于仅仅依靠微积分、微分方程与矩阵运算这些经典的数学工具，已不可能完成系统与控制科学当前面临的日益

12VA20/21

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

复杂而困难的任务。

60 年代建立起来的现代控制理论，在其发展的过程中，曾受到不少责难。有些人认为在这种理论与应用之间存在着难以逾越的"鸿沟"。但在 20 多年的发展中，经过数学与工程两方面科学工作者的努力，不仅这种主要建立在线性空间结构上的理论在诸如阿波罗登月等项目中取得了令人瞩目的成功，就连建立在微分流形之上的非线性控制理论，也很快在直升机、受控机械手等方面得到了应用。事实告诉我们，有益的作法应是在新理论与应用的"鸿沟"之间架起各种桥梁，以推进系统与控制科学的发展。这种变化使自动化的教育无论在大学生还是在研究生的层次上均产生了巨大的影响。落根于50年代的工程数学教育和系统与控制科学的要求之间存在着巨大的差距，若简单地把数学发展的有关材料不加改动地搬过来要求系统与控制界接受，可能事倍功半甚至引起"消化不良"。这是由于在理论数学与应用科学之间还存在着研究兴趣与方法和习惯的巨大区别。因此，一套适合系统与控制界特点的数学丛书的出版自然就成了一种十分迫切的需要。本丛书的编辑出版可以说是应运而生的。

为了保证本丛书既在数学上严谨，使读者能掌握正确的数学理论与方法而不仅仅满足于了解名词，又能较好地为应用服务而不是完全数学化，我们制定了一个原则，即每本书都必须经过数学和工程两方面专家的审查与认可。我们相信这样做将可以尽量减少片面性并保证书稿的质量。

考虑到目前已经出版了不少为应用目的而写的数学书，其中不乏符合本丛书目的者，因此我们编写本丛书的原则是不求其全而首先考虑急需，以满足读者的要求。又由于系统与控制科学和众多的应用性学科诸如信息科学、工程科学、管理科学、力学与应用数学等联系密切，这些学科和系统与控制

科学在相当大范围内具有共同的或相近的兴趣和需要，因此我们相信本丛书对这些领域同样是有益的.

由于这是一项带尝试性的工作，我们的水平与经验十分有限，不当乃至失误之处难免，热诚欢迎广大读者批评指正.

“系统与控制科学应用数学”丛书编委会

1990 年 9 月 6 日

前　　言

我们在教授“系统辨识”，“自适应控制”，“随机控制”以及“随机运筹学”等专业课的过程中，向学生讲解了以下内容：

（1）鞅（martingale）收敛定理在系统参数估计一致性证明中的应用；

（2）几乎上鞅收敛定理在随机自适应控制算法渐近分析中的应用；

（3）在推导参数估计和传递函数估计的渐近分布时，用到的鞅差中心极限定理和相依随机序列的中心极限定理；

（4）在随机控制理论中用到的随机微分方程和伊藤微分公式。

由于刚入学的研究生，只学过大学本科中的直观概率论，因此学习上发生了困难。

为此，我们先后开设了“测度论”和以 Liptser 和 Shiryayev 的书[7]为教材的课程，其结果均不理想。学生只学测度论，仍然没有鞅与随机积分的概念，而学习 Liptser 和 Shiryayev 的书花时多且难学。因此，我们深感需要一本既用测度论工具，又能学到鞅与随机微分方程的教材。于是，我们编写了这本书，并在 1986 年至1991年的应用数学助教进修班以及 1987 年至 1990 年的研究生课程中使用，获得了比较理想的教学效果。学生反映，学过近代概率引论之后，再学系统辨识、自适应控制或随机控制课程就比较顺利了。而且在教学活动中我们还吸收了许多有益的改进意见，使原先模糊之处得以澄清。

本书实际上包括了四部分内容：(i)测度论基础；(ii)鞅论初步；(iii)随机积分和随机微分方程初步；(iv)鞅论(包括随机微积分)在控制论中的某些应用.

关于本书的内容，有两个问题需要说明：(i)为什么要采用测度论的观点来讲，不用测度论行不行？(ii)为什么不把测度论与概率论穿插起来讲，而要独立成章？

我们的回答是：目前世界上确有少数学校不用测度论来讲解鞅. 然而，现有的大量文献资料都是用测度论观点来叙述鞅与随机微分方程的. 如果我们有意避开测度论，那么：(i)学生即使学习了近代概率论内容，将来看文献仍然困难重重；(ii)不用测度论，学习近代概率论就无法再深入. 因此，从发展的观点看，学习测度论势在必行.

把测度论与概率论内容分开来讲是因为测度论与概率论侧重点不同. 测度论主要研究抽象集的测度、可测函数的积分与极限性质，它是近代概率论的工具. 而近代概率论的重点则在于研究随机过程的轨道性质. 从教育学的观点看，分开来学，可以分散难点，使学生更好地掌握.

当然，现在也出现了一些把测度论与概率论穿插起来叙述的概率论书籍，但我们认为这仅仅是一种尝试.

本书是为运筹学与控制论等非概率专业的研究生编写的，为使工科大学有关专业的研究生也能够阅读本书，编写时我们在注意数学理论系统性、严密性的同时，也注意到学生的可接受性. 在不严重损害数学严密性的情况下，采用了一些较为直观的或不十分严格的讲法. 但我们相信，这样处理不会影响学生对近代概率论的掌握.

本书在测度论方面花了相当大的篇幅，这是教学经验告诉我们的. 因为不学好测度论的基本内容，掌握近代概率论将成为一句空话. 但在这里，我们比较重视概念的具体含义，

并举出了各种例子来帮助读者进行理解。本书在内容的取舍和编排方面也尽量注意使学生易于掌握。例如，在测度论方面，我们先讲可测函数、测度、积分等主要内容，而把教学上的难点——测度扩张放在最后。在鞅论方面，我们着重介绍停时、上穿不等式、鞅收敛定理等内容，以离散鞅为主体，对连续鞅只作简要的介绍。同时还增加了一些一般鞅论书中没有的，但在控制论中有用的内容，如周元燊的鞅收敛定理、几乎上鞅收敛定理以及鞅型序列等。在随机积分与随机微分方程方面我们着重介绍了维纳过程、随机积分概念以及伊藤微分公式，我们用了许多例子讲解伊藤公式的应用，以帮助读者理解其抽象的概念。本书的最后一章专门介绍鞅在系统辨识、自适应控制方面的应用，以及随机微分方程和伊藤公式在随机控制和最优滤波中的应用。书中部分章节(有"＊"的)可跳过暂时不读。

在本书的编写过程中，我们得到了下列诸公的大力帮助：郑伟安教授为我们提供了许多资料，并与作者进行了有益的讨论；汪振鹏教授审阅了本书第二章的全部文稿，提供了鞅型序列和有关材料；阮荣耀教授审阅了本书第三章的全部文稿，并结合教学实践提出了有益的修改意见；谢贤亚副教授为我们提供了测度论方面的资料；张志方教授、郑大钟教授对本书的写作提出了有益的建议；黄存智先生帮助作者校阅了本书，在此一并致谢。

笔者才疏学浅，不妥之处，欢迎读者批评指正。

袁震东

目　　录

序言

前言

第一章　测度论基础 ························ 1

1.1　集与集的运算 ························ 1

1.2　可测函数 ························ 10

1.3　测度 ························ 23

1.4　积分 ························ 29

1.5　可积函数 ························ 42

1.6　L_p 空间—— Banach 空间 ························ 53

1.7　各种收敛关系 ························ 66

1.8　测度的分解 ························ 81

1.9*　测度的生成 ························ 102

1.10　乘积测度 ························ 112

第一章　测验题 ························ 123

第二章　鞅与鞅型序列 ························ 125

2.1　概率基础概念 ························ 126

2.2　分布函数与特征函数 ························ 134

2.3　随机向量及多维正态随机变量 ························ 146

2.4　条件数学期望与一致可积性 ························ 151

2.5　适应、停时和鞅 ························ 169

2.6　鞅与上鞅的不等式 ························ 181

2.7　鞅的收敛定理 ························ 188

2.8　几乎上鞅和新息序列的收敛定理 ························ 201

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

2.9 上鞅列的分解 …………………………………… 210
2.10 鞅差中心极限定理 …………………………… 216
2.11* 连续时间情形下的鞅 ……………………… 221
2.12* 鞅型序列及其性质 ………………………… 227
2.13* 鞅型序列的收敛定理 ……………………… 235
第二章 测验题 …………………………………… 239
第三章 随机积分与随机微分方程初步 ………… 241
3.1 随机过程的基本概念 ………………………… 243
3.2 布朗运动与维纳过程 ………………………… 246
3.3 阶梯函数的随机积分 ………………………… 251
3.4 有界循序可测函数的随机积分 ……………… 259
3.5 局部有界循序可测过程的积分 ……………… 266
3.6 伊藤微分公式 ………………………………… 270
3.7 随机微分方程的解法 ………………………… 278
3.8 随机微分方程解的存在性与唯一性 ………… 285
3.9 解过程的马氏性 ……………………………… 292
第三章 测验题 …………………………………… 294
第四章 鞅和随机分析在控制理论中的某些应用 ……… 296
4.1 鞅收敛定理在系统辨识中的应用 …………… 297
4.2 几乎上鞅收敛定理在自适应控制中的应用 … 307
4.3 随机最优控制问题 …………………………… 314
4.4 连续线性系统的最优估计——卡尔曼-布西滤波 ……………………………………………… 320
附录 ……………………………………………… 341
A. 无穷维测度空间 ……………………………… 341
B. 测验题答案 …………………………………… 344
参考文献 ………………………………………… 349

第一章 测度论基础

近代概率论建立在测度论的基础上. 测度论中的重要概念,测度、积分、各种收敛关系对应着概率论中的概率、数学期望、概率论中的收敛关系. 掌握测度论的基本概念与方法,对学习和掌握近代概率论有很大帮助. 反过来,不用测度论,那么近代概率论的某些表述就可能是不精确的. 不学测度论,要掌握近代概率论是困难的. 因此,从科学发展的观点看,在学习近代概率论之前,学习测度论是必要的.

在本书中，我们介绍可测函数、测度、积分、乘积测度、重积分等重要概念，阐述各种收敛关系及著名收敛定理. 最后引入广义测度与 Radon-Nikodym 定理，为下面学习条件概率与鞅论铺平道路.

为了讲解可测函数,这里先从集及集的运算讲起.

1.1 集与集的运算

提要 本节介绍集的概念,集的运算规律,上限集,下限集,集的极限以及 De Morgan 定律.

集是一个不能精确定义，只能描述的基本概念. 所谓集或集合，是指由一些对象组成的总体. 组成集的对象称为集的元素. 例如

(1) 骰子的 6 个面组成一个集,每个面是集的一个元素.

(2) n 次代数方程所有的根组成一个集，每个根是集的

一个元素.

(3) 设 $y(t)$, $u(t)$ 分别表示 t 时刻某系统的输出、输入,例如

$$y(t)+a_1y(t-1)+\cdots+a_ny(t-n)$$
$$=b_1u(t-1)+\cdots+b_mu(t-m)$$

表示所有线性模型组成一个集. 这里不同的系数值 $(a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_m)$, 对应不同的线性模型. 每一组系数值对应的模型是集的元素.

在本书中,我们用大写字母 A, B, C,…等表示集.

如果集 A 的每一个元素都是集 B 的一个元素, 则称 A 是 B 的子集,并记作

$$A\subset B \quad 或 \quad B\supset A$$

读作"B 包含 A"或"A 被 B 包含".

例如,设 Q 是全体有理数的集; N 是全体自然数的集; R 是全体实数的集,那么

$$N\subset Q,\quad Q\subset R$$

或记作

$$N\subset Q\subset R$$

不含任何元素的集称为空集, 恒用 $\varnothing$ 表示. 我们规定空集是任何集的子集,即对任何 A, $\varnothing\subset A$.

在许多问题中, 我们所考虑的集常常是某个给定集的子集. 由问题中涉及的全部元素组成的集称为空间,记作 Ω,其元素记作 ω.

定义 1.1.1 设 A, B 是两个集, 由 A 与 B 的所有元素合并在一起所构成的集,称为 A 与 B 的和集(或并集),简称为联或并,记作

$$A\cup B=\{\omega\,|\,\omega\in A \ 或\ \omega\in B\}$$

由 A 与 B 的所有公共元素所构成的集称为 A 与 B 的交集,简称为交,记作 $A\cap B$, 即

$$A\cap B=\{\omega|\omega\in A \text{ 且 } \omega\in B\}=\{\omega:\omega\in A \text{ 且 } \omega\in B\}$$

上述表示式中，ω 表示元素，而竖线后给出了元素应满足的条件。

类似地可以定义任意个集的和集及交集. 设

$$\{A_t|t\in T\}$$

是任意的一组集，其中 t 是指标，它在某个指标集 T 中变化，由一切 $A_t(t\in T)$ 的所有元素合并在一起所组成的集，称为这组集的和集，记作 $\bigcup\limits_{t\in T}A_t$，即

$$\bigcup_{t\in T}A_t=\{\omega|\omega \text{ 至少属于某一个 } A_t, t\in T\}$$

由同时属于每个集 $A_t(t\in T)$ 的所有元素组成的集，称为这组集的交集，记作 $\bigcap\limits_{t\in T}A_t$，即

$$\bigcap_{t\in T}A_t=\{\omega|\omega\in A_t, \text{ 对每个 } t \text{ 同时成立}\}$$

如果 $T=N$（自然数集），则上述的联与交分别称为可列联与可列交。

由定义易知，集的和与交运算具有下列性质：

(1) $A\cap B\subset A$, $A\cap B\subset B$;

(2) $A\subset A\cup B$, $B\subset A\cup B$;

(3) $A\cup\varnothing=A$, $A\cup\Omega=\Omega$;

(4) $A\cap\varnothing=\varnothing$, $A\cap\Omega=A$;

(5) 等幂律: $A\cup A=A$, $A\cap A=A$;

(6) 交换律: $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

(7) 分配律

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

(8) 吸收律

$$A\cup(A\cap B)=A$$
$$A\cap(A\cup B)=A$$

(9) 结合律

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$$
$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$$

定义 1.1.2 设Ω是一空间，$A\subset\Omega$，则Ω中不属于A的所有元素构成的集称为A的补集(简称补)，记作 A'，即

$$A'=\{\omega\mid\omega\in\Omega\ 且\ \omega\notin A\}$$

补运算具有下列性质：

(1) 互补性：$A\cup A'=\Omega$，$A\cap A'=\varnothing$，$\varnothing'=\Omega$，$\Omega'=\varnothing$；

(2) 对合律：$(A')'=A$；

(3) $A\subset B$ 的充要条件是 $A'\supset B'$。

在集运算中经常要用到反映集之并与交之间对偶关系的重要定理，称为 De Morgan 定律. 现叙述如下：

定理 1.1.1 (De Morgan 定律) 设 A，B 是两个集，则

(1) $(A\cup B)'=A'\cap B'$；

(2) $(A\cap B)'=A'\cup B'$.

证明 (1) $\omega\in(A\cup B)'\Longleftrightarrow\omega\notin A\cup B\Longleftrightarrow\omega\notin A$ 且 $\omega\notin B\Longleftrightarrow\omega\in A'$ 且 $\omega\in B'\Longleftrightarrow\omega\in A'\cap B'$

所以

$$(A\cup B)'=A'\cap B'$$

(2) $\omega\in(A\cap B)'\Longleftrightarrow\omega\notin A\cap B\Longleftrightarrow\omega\notin A$ 或 $\omega\notin B\Longleftrightarrow\omega\in A'$ 或 $\omega\in B'\Longleftrightarrow\omega\in A'\cup B'$

所以

$$(A\cap B)'=A'\cup B'$$

例 设 $\Omega=\{1,2,3,4\}$，$A=\{1,3\}$，$B=\{2,4\}$，验证 De Morgan 定理。

解 因为 $(A\cup B)'=(\{1,3\}\cup\{2,4\})'=\varnothing$

$$A'=\{2,4\},\quad B'=\{1,3\}$$

故

$$A'\cup B'=\Omega,\quad A'\cap B'=\varnothing$$

由此可知

$$(A\cup B)'=\Omega'=\varnothing=A'\cap B'$$
$$(A\cap B)'=\varnothing'=\Omega=A'\cup B'$$

推论 1.1.1 (De Morgan 定律) 设 $\{A_\alpha\}$ 是一组集，则

$$\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right)'=\bigcap_\alpha A'_\alpha \tag{1.1.1a}$$

$$\left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right)'=\bigcup_\alpha A'_\alpha \tag{1.1.1b}$$

从式 (1.1.1a) 和 (1.1.1b) 可以看出，集的并与交之间存在对偶关系，即并之补等于补之交，交之补等于补之并。

定义 1.1.3 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是任意一列集. 属于上述集列中无限多个集的那种元素全体组成一个集，称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的上限集，记作 $\limsup A_n$ 或 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$，即

$$\limsup_{n\to\infty} A_n=\{\omega\mid\omega \text{ 属于无限多个 } A_n\}$$

例如，$A_{2n-1}=A$，$A_{2n}=B$，$n=1,2,\cdots$，那么 A 中的元素属于无限多个 A_k，$k=2n-1$，$n=1,2,\cdots$；B 中的元素属于无限多个 A_k，$k=2n$，$n=1,2,\cdots$.

所以

$$\limsup_{n\to\infty} A_n=A\cup B$$

定义 1.1.4 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是任意一列集，除去有限多个集之外，所有集 A_n 都含有的那种元素组成一个集，称为这一集列的下限集，记作 $\liminf A_n$ 或 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 即

$$\liminf_{n\to\infty} A_n=$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com