高等学校经济数学应用教程

教育部高等理工教育数学教学研究与改革课题

经济运筹方法

张从军　李　辉
鲍远圣　孙春燕　编著

博学 · 经济数学系列

復旦大學出版社
www.fudanpress.com.cn

高等学校经济数学应用教程

教育部高等理工教育数学教学研究与改革课题

经济运筹方法

张从军　李　辉
鲍远圣　孙春燕　编著

博学·经济数学系列

复旦大学出版社
www.fudanpress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

经济运筹方法/张从军等编著. —上海:复旦大学出版社,2009.3
(复旦博学·经济数学系列)
高等学校经济数学应用教程
ISBN 978-7-309-06485-8

Ⅰ. 经… Ⅱ. 张… Ⅲ. 经济管理-运筹学-高等学校-教材 Ⅳ. F224.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 016003 号

经济运筹方法

张从军 李 辉 鲍远圣 孙春燕 编著

出版发行 复旦大学出版社 上海市国权路 579 号 邮编 200433
86-21-65642857(门市零售)
86-21-65100562(团体订购) 86-21-65109143(外埠邮购)
fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com

责任编辑 范仁梅
出 品 人 贺圣遂

印 刷 上海肖华印务有限公司
开 本 787×960 1/16
印 张 19
字 数 351 千
版 次 2009 年 3 月第一版第一次印刷

书 号 ISBN 978-7-309-06485-8/F·1468
定 价 32.00 元

"博学而笃志，切问而近思。"

(《论语》)

博晓古今，可立一家之说；
学贯中西，或成经国之才。

内容提要

本书是“博学·经济数学系列”教材之五：高等学校经济数学应用教程——经济运筹方法.

所谓经济运筹方法，就是在经济管理领域内，运用数学工具，对需要进行管理的问题统筹规划，作出最优决策的方法．本书主要介绍线性规划方法、目标规划方法、整数规划方法、动态规划方法、非线性规划方法、网络分析方法、存贮优化方法、排队优化方法、决策方法、博弈方法等各种具体方法，并相应地介绍了有关经济案例和有关软件使用实例．书后还有3个附录，对这些方法做出综述和简介.

本书可作为高等学校经济管理类各专业高年级本科生的选修课教材和研究生教材．读者在学习微积分、线性代数、概率论与数理统计课程后，通过本教材学习，可进一步提高自己的数学应用能力；本书也可供自学者、经济工作者及有关教师参考.

前 言

经济学是一门研究人类经济行为和经济现象及人们如何进行权衡取舍的学问.正是由于资源的稀缺与人的欲望的无止境这一对基本冲突才产生了经济学,逼迫人们作出权衡取舍的选择,尽可能有效地利用资源,用有限的资源最大限度地满足人们的欲望.现代经济学是按照科学方法系统探索人类经济行为和社会经济现象的一门学科.本书介绍的运筹方法是现代经济学最常用的科学方法之一.

所谓经济运筹方法,就是在经济管理领域,运用数学工具,对需要进行管理的问题统筹规划,作出最优决策的方法.它是"管理系统的人为了获得关于系统运行的最优解而必须使用的一种科学方法".经济运筹方法应用许多数学工具和逻辑推理,研究系统中人、财、物的组织管理、筹划调度等问题,以期发挥最大效益.

随着现代经济学的教育和研究在中国迅速发展和深入,越来越多的人感到数学在经济学中的重要性.但面对数学纷繁复杂的类目,对高等学校财经类各专业培养人才来说,数学应该学什么?换句话说,怎样使经济数学课程体系更趋符合财经类专业培养的目标体系?怎样兼顾经济数学课程的理论性与应用性、思想性与工具性?怎样实现经济数学课程在经管类专业的作用?这是我们主持承担的全国高等教育科学"十五"规划重点研究课题(19138149)、中国高等教育学会"十一五"教育科学研究规划课题(06AIJ0090112)、教育部高等理工教育数学教学研究与改革课题(教高司 2007-143 号)等专题的研究内容之一.多年来我们结合一线教学实践,一直进行着探索,现在的这本《经济运筹方法》就是我们所做的尝试.

配合我们的教学观念更新、教学改革实践、教学项目研究,我们早年编写了"高等学校经济数学基础教程"系列——《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》.作为上述工作的继续和深入,我们继而编写了"高等学校经济数学应用教程"系列,本书是其中之一.

本书由张从军教授提出编写思想和编写提纲、列出章节目录、编写附录部分,最后对全书进行修改补充、统稿、定稿.李辉副教授编写了第一章至第四章,

鲍远圣副教授编写了第五章至第七章，孙春燕副教授编写了第八章至第十章.

南京财经大学应用数学学院有关教师在长期教学实践中试用了本书内容，有关校领导和管理部门负责人对本书的编写工作给予了许多指导和帮助.复旦大学出版社特别是理科学科总监范仁梅女士不辞劳苦、精心编辑，对该书的出版给予了大力支持.编者在此向他们表示衷心感谢！

本书在编写过程中，参考了大量的相关资料，选用了其中的有关内容和例子，在此谨向有关编者、作者一并表示谢意.

编写一本教材似乎不难，但编写一本适用的教材绝非易事.编写此类经济应用教程更不是一劳永逸、一蹴而就的事.作为一项教学研究课题，我们还在探索之中.诚恳期望有关专家、学者不吝赐教，诚恳期望使用该教材的教师和学生，提出并反馈你们的宝贵意见.

电子邮箱：yysxx@njue.edu.cn

编　者

于南京财经大学

2008年11月26日

目　录

第一章　线性规划方法

线性规划(简称为(LP))问题是指目标函数和约束条件都是线性函数的数学规划问题,它是运筹学的一个重要分支.线性规划最早由旦茨格(G. B. Dantzig)在 1947 年提出,1949 年旦茨格提出了求解线性规划问题的一个有效的方法——单纯形方法,它被列为 20 世纪 10 大算法之一.借助线性规划软件在计算机上能处理成千上万个约束条件和决策变量的线性规划问题.目前线性规划在工业、农业、商业、交通运输业、军事、管理决策等领域都发挥着重要作用.本章主要介绍常见的线性规划方法及其经济应用,最后介绍常用的解线性规划的计算机软件.

§1.1　图　解　法

具有两个变量的线性规划问题可用图解法求解.

一、图解法的步骤

步骤 1: 在平面直角坐标系中,画出可行解区域.可行解区域是各约束条件所表示的半平面的公共部分.

步骤 2: 求最优解.将目标函数中的 Z 看作参数,作出等值线.选取一条等值线,使它与可行解区域有公共点,并取得最大值或最小值.

例 1.1　用图解法求解下列线性规划问题,并指出这些问题是具有唯一最优解、无穷多最优解、无界解还是无可行解?

(1) $\max Z = 3x_1 + 4x_2$;

$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 12, \\ x_2 \leqslant 2, \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

(2) $\max Z = x_1 + 2x_2$;

$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 12, \\ x_2 \leqslant 2, \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

(3) $\max Z = x_1 + x_2$;

(4) $\min Z = 3x_1 - 2x_2$;

$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geqslant 2, \\ x_1 - x_2 \geqslant -1, \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0. \end{cases} \qquad \text{s. t.}\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \geqslant 6, \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

解　(1) 图 1-1 中的阴影区域为可行域，目标函数 $Z = 3x_1 + 4x_2$ 在点 $B\left(3,\ \frac{3}{2}\right)$ 处达到最大. 该线性规划问题的最优解为 $x_1 = 3$，$x_2 = \frac{3}{2}$；最优值为 $\max Z = 15$，且最优解是唯一的.

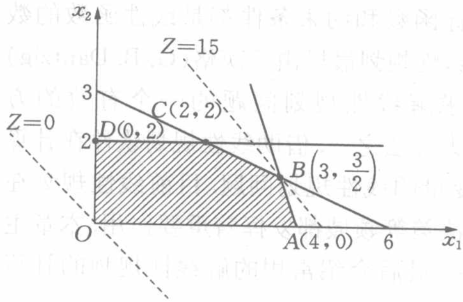

图 1-1

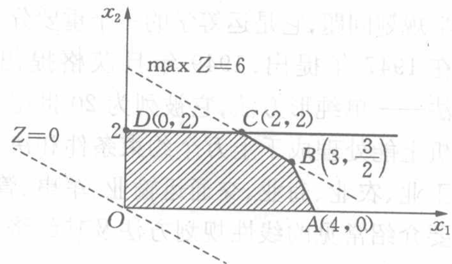

图 1-2

(2) 图 1-2 中的阴影区域为可行域，目标函数 $Z = x_1 + 2x_2$ 在点 $B\left(3,\ \frac{3}{2}\right)$ 与点 $C(2,\ 2)$ 连线上的任一点处达到最大值. 该线性规划问题的最优解为 $\boldsymbol{x} = \lambda \cdot \left(3,\ \frac{3}{2}\right) + (1-\lambda) \cdot (2,\ 2)$，$0 \leqslant \lambda \leqslant 1$；最优值 $\max Z = 6$，且有无穷多个最优解.

(3) 图 1-3 中的阴影区域为可行域，可行域为无界域，目标函数可以增加到无穷大. 此时该线性规划问题无最优解或为无界解. 如果将该问题的目标函数改为求最小值，即 $\min Z = x_1 + x_2$，则有唯一最优解 $x_1 = 0$，$x_2 = 1$，最优值为 $\min Z = 1$.

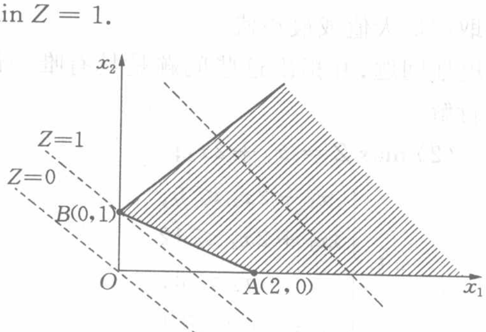

图 1-3

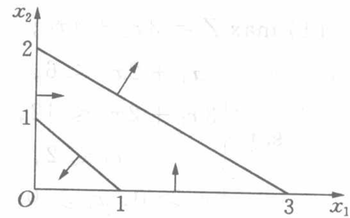

图 1-4

(4) 如图 1-4 所示，该问题的可行域为空集，即无可行解，也不存在最优解.

二、图解法评析

图解法简单直观，有助于初学者了解线性规划问题的几何意义及求解的基本原理. 求解线性规划问题时不需将问题化为标准型，可以直接在平面上作图，但此法只适用于解两个变量的线性规划问题，对于 3 个以上变量的线性规划问题，图解法失效，故该方法有一定的局限性.

§1.2 单纯形法

考虑标准形式的线性规划问题：

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n;$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_j \geqslant 0\ (j = 1, 2, \cdots, n). \end{cases}$$

令

$$c = (c_1, c_2, \cdots, c_n),\ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}},\ A = (a_{ij})_{m\times n}.$$

于是标准形式的线性规划问题可表示为

$$\max Z = c\boldsymbol{x};$$

$$(\mathrm{LP})\qquad \text{s.t.}\begin{cases} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{x} \geqslant 0. \end{cases}$$

设矩阵 A 为满秩矩阵且 A 的秩为 m，则称 A 的任一 m 阶可逆子阵为(LP)的一个基. 若变量 x_j 所对应的列 $\boldsymbol{p}_j$ 包含在基 B 中，则称 x_j 为 B 的基变量，否则称 x_j 为 B 的非基变量.

设 $B = (\boldsymbol{p}_{J_1}, \boldsymbol{p}_{J_2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{J_m})$ 为 A 的一个基，以及

$$\boldsymbol{x}_B = (x_{J_1}, x_{J_2}, \cdots, x_{J_m})^{\mathrm{T}},\ B^{-1}\boldsymbol{b} = (b_{10}, b_{20}, \cdots, b_{m0})^{\mathrm{T}},$$

称方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的解：$x_{J_1} = b_{10}, x_{J_2} = b_{20}, \cdots, x_{J_m} = b_{m0}$，其余的 $x_j = 0$ 为对应于 B 的基本解. 将满足 $B^{-1}\boldsymbol{b} \geqslant 0$(即 $x_{J_i} \geqslant 0,\ i = 1, 2, \cdots, m$) 的基本解叫

做(LP)的基本可行解，而 B 称为(LP)的可行基.

一、单纯形法的基本思想

单纯形法的基本思想是从一个基本可行解出发，寻找使目标函数上升的另一个基本可行解.

二、单纯形表

设 $B=(\boldsymbol{p}_{J_1},\ \boldsymbol{p}_{J_2},\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_{J_m})$ 为可行基，$c_B=(c_{J_1},\ c_{J_2},\ \cdots,\ c_{J_m})$，其中 $c_{J_i}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 为目标函数中基变量的系数，称

$$T(B)=\left(\begin{array}{c:c} B^{-1}\boldsymbol{b} & B^{-1}A \\ \hdashline c_B B^{-1}\boldsymbol{b} & c-c_B B^{-1}A \end{array}\right)$$

为对应于可行基 B 的单纯形表. $c-c_B B^{-1}A$ 称为检验数. 令

$$\boldsymbol{x}_B=(x_{J_1},\ x_{J_2},\ \cdots,\ x_{J_m})^{\mathrm{T}},\ B^{-1}\boldsymbol{b}=(b_{10},\ b_{20},\ \cdots,\ b_{m0})^{\mathrm{T}},$$

$$B^{-1}A=(b_{ij})_{m\times n},\ c-c_B B^{-1}A=(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \cdots,\ \sigma_n),$$

则单纯形表可以具体表示为表 1-1 所示.

表 1-1

$c_j\rightarrow$			c_1	c_2	$\cdots$	c_n
c_B	$\boldsymbol{x}_B$	$B^{-1}\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
c_{J_1}	x_{J_1}	b_{10}	b_{11}	b_{12}	$\cdots$	b_{1n}
c_{J_2}	x_{J_2}	b_{20}	b_{21}	b_{22}	$\cdots$	b_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
c_{J_m}	x_{J_m}	b_{m0}	b_{m1}	b_{m2}	$\cdots$	b_{mn}
检验数 $\sigma_j=c_j-Z_j$			σ_1	σ_2	$\cdots$	σ_n

三、单纯形程序

假设已知(LP)的可行基 $B=(\boldsymbol{p}_{J_1},\ \boldsymbol{p}_{J_2},\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_{J_m})$，其单纯形表为表 1-1，由 B 的可行性知：

$$b_{i0}\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

步骤 1：若检验数 $\sigma_j\leqslant 0\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，则(LP)有基本最优解

$$x_{J_i}=b_{i0},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ x_j=0,\ j\neq J_1,\ J_2,\ \cdots,\ J_m.$$

运算终止.

步骤 2：若不满足 $\sigma_j \leqslant 0\ (j=1,2,\cdots,n)$，则至少存在一个 j，使 $\sigma_j > 0$，以及

$$\sigma_s = \max\{\sigma_j \mid \sigma_j > 0,\ j \geqslant 1\}.$$

若 $b_{is} \leqslant 0\ (i=1,2,\cdots,m)$，则(LP)无最优解. 运算终止.

步骤 3：若不满足 $b_{is} \leqslant 0\ (i=1,2,\cdots,m)$，则至少存在一个 i，使 $b_{is} > 0$，这时，先求

$$\theta = \min\left\{\frac{b_{i0}}{b_{is}} \middle| b_{is} > 0,\ 1 \leqslant i \leqslant m\right\}.$$

注意这样的正数 i 可能不唯一，据此要求，有

$$J_r = \min\left\{J_i \middle| \theta = \frac{b_{i0}}{b_{is}},\ b_{is} > 0\right\}.$$

由此得到 r，旋转元为 b_{rs}.

步骤 4：作(r,s)旋转变换，把 x_s 所对应的列变换为单位列向量(旋转元 b_{rs} 变为 1). 旋转变换具体运算如下：

① 把旋转元 b_{rs} 所在的第 r 行都除以 b_{rs}，得新表.

② 对于 $i \neq r$，有

$$\text{新表的第 } i \text{ 行} = \text{旧表的第 } i \text{ 行} - b_{is} \times (\text{新表的第 } r \text{ 行}).$$

③ 将 x_B 列中的 x_{J_r} 换为 x_s.

这样就得新基 $\bar{B} = (\boldsymbol{p}_{J_1},\cdots,\boldsymbol{p}_{J_{r-1}},\boldsymbol{p}_s,\boldsymbol{p}_{J_{r+1}},\cdots,\boldsymbol{p}_{J_m})$ 的单纯形表 $T(\bar{B})$，转步骤 1，并依次继续下去.

例 1.2　用单纯形法求解线性规划问题：

$$\max Z = 3x_1 + 4x_2;$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 12, \\ x_2 \leqslant 2, \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

解　将原线性规划化为标准形式：

$$\max Z = 3x_1 + 4x_2;$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 12, \\ x_2 + x_5 = 2, \\ x_j \geqslant 0\ (j=1,2,3,4,5). \end{cases}$$

约束条件的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&0&0\\3&2&0&1&0\\0&1&0&0&1\end{pmatrix},$$

可行基为

$$B=(\boldsymbol{p}_3,\ \boldsymbol{p}_4,\ \boldsymbol{p}_5)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

对应于基 B 的单纯形表 $T(B)$ 如表 1-2 所示.

表 1-2

$c_j \to$			3	4	0	0	0	θ_i
c_B	$\boldsymbol{x}_B$	$B^{-1}\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	6	1	2	1	0	0	3
0	x_4	12	3	2	0	1	0	6
0	x_5	2	0	[1]	0	0	1	2
检验数行			3	4	0	0	0	

于是

$$\max\{3,\ 4\}=4,\ \sigma_2=4,\ \min\left\{\frac{6}{2},\ \frac{12}{2},\ \frac{2}{1}\right\}=\frac{2}{1}.$$

旋转元为 $b_{32}=1$,将基变量 x_5 旋出,将 x_2 旋入作为基变量,得表 1-3.

表 1-3

$c_j \to$			3	4	0	0	0	θ_i
c_B	$\boldsymbol{x}_B$	$B^{-1}\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	2	[1]	0	1	0	−2	2
0	x_4	8	3	0	0	1	−2	$\frac{8}{3}$
4	x_2	2	0	1	0	0	1	—
检验数行			3	0	0	0	−4	

于是

$$\max\{3\}=3,\ \sigma_1=3,\ \min\left\{\frac{2}{1},\ \frac{8}{3}\right\}=\frac{2}{1}.$$

旋转元 $b_{11}=1$，将基变量 x_3 旋出，将 x_1 旋入作为基变量，得表 1-4.

表 1-4

$c_j \to$			3	4	0	0	0	θ_i
c_B	$\boldsymbol{x}_B$	$B^{-1}\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
3	x_1	2	1	0	1	0	-2	—
0	x_4	2	0	0	-3	1	[4]	$\frac{1}{2}$
4	x_2	2	0	1	0	0	1	2
检验数行			0	0	-3	0	2	

于是

$$\max\{2\}=2,\ \sigma_5=2,\ \min\left\{\frac{2}{4},\ \frac{2}{1}\right\}=\frac{2}{4}.$$

旋转元 $b_{25}=4$，将基变量 x_4 旋出，将 x_5 旋入作为基变量，得表 1-5.

表 1-5

$c_j \to$			3	4	0	0	0	θ_i
c_B	$\boldsymbol{x}_B$	$B^{-1}\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
3	x_1	3	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	
0	x_5	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	
4	x_2	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	
检验数行			0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	

从表 1-5 知，所有检验数均小于等于零，故最优解为 $x_1=3,\ x_2=\frac{3}{2},\ x_3=0,\ x_4=0,\ x_5=\frac{1}{2}$；目标函数的最大值为 $\max Z=15$.

例 1.3 用单纯形法求解线性规划问题：

$$\max Z=-5x_1+5x_2+13x_3;$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-x_1+x_2+3x_3\leqslant 20,\\ 12x_1+4x_2+10x_3\leqslant 90,\\ x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0.\end{cases}$$