

面向“十二五”高等院校应用型人才培养规划教材

运筹学 (第2版)

Operations Research

孙 萍 主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

面向“十二五”高等院校应用型人才培养规划教材

运筹学 (第二版)

■ Operations Research ■

孙 萍 主 编

苑清敏 安小会 副主编

图书在版编目 (CIP) 数据

运筹学 / 孙萍主编. —2 版. —北京: 中国铁道出版社, 2012. 9

面向“十二五”高等院校应用型人才培养规划教材
ISBN 978-7-113-14983-3

I. ①运… II. ①孙… III. ①运筹学—高等学校—教材 IV. ①022

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 140255 号

书 名: 面向“十二五”高等院校应用型人才培养规划教材
 运筹学 (第 2 版)
作 者: 孙 萍 主编

策 划: 夏 伟 读者热线: 400-668-0820
责任编辑: 夏 伟 何 佳
封面设计: 刘 颖
封面制作: 白 雪
责任校对: 孙 玫
责任印制: 李 佳

出版发行: 中国铁道出版社 (100054, 北京市西城区右安门西街 8 号)
网 址: <http://www.51eds.com>
印 刷: 北京市昌平开拓印刷厂
版 次: 2008 年 2 月第 1 版 2012 年 9 月第 2 版 2012 年 9 月第 1 次印刷
开 本: 787 mm×1 092 mm 1/16 印张: 17 字数: 413 千
印 数: 1~4 000 册
书 号: ISBN 978-7-113-14983-3
定 价: 36.00 元

版权所有 侵权必究

凡购买铁道版图书, 如有印制质量问题, 请与本社教材图书营销部联系调换。电话: (010) 63550836
打击盗版举报电话: (010) 63549504

面向“十二五”高等院校应用型人才培养规划教材

编审委员会

主任委员

李维安 东北财经大学校长

教育部工商管理专业教学指导委员会副主任委员

副主任委员（按姓氏汉语拼音为序）

安 忠	天津理工大学	管理学院教授
长 青	内蒙古工业大学	经济管理学院院长
陈爱祖	河北科技大学	经济管理学院教授
崔会保	山东理工大学	商学院副院长
董 原	兰州商学院	工商管理学院院长
关晓光	燕山大学	经济管理学院教授
李 健	天津理工大学	管理学院副院长
李长青	内蒙古工业大学	教授委员会主任
李向波	天津工业大学	管理学院教授
李永周	武汉科技大学	管理学院副院长
梁毅刚	石家庄铁道大学	经济管理学院院长
刘 岗	山东圣翰财贸职业学院	副校长
刘 克	长春工业大学	管理学院副院长
刘 树	中国地质大学长城学院	经济系主任
刘家顺	河北联合大学	经济学院院长
刘邦凡	燕山大学	文法学院院长
吕荣杰	河北工业大学	管理学院党委书记
孟 越	沈阳理工大学	经济管理学院副院长
苗雨君	齐齐哈尔大学	经济与管理学院副院长
彭诗金	郑州轻工业学院	经济与管理学院院长
乔 梅	长春大学	管理学院副院长

任 慧	内蒙古工业大学	国际商学院党委书记
单昭祥	广东海洋大学寸金学院	会计系主任
盛洪昌	长春大学	经济学院院长
孙国学	赤峰学院	经济与管理学院副院长
王 燕	佳木斯大学	经济管理学院副院长
王庆生	天津商业大学	商学院副院长
王全在	内蒙古财经大学	会计学院院长
王信东	北京信息科技大学	经济管理学院教授
吴中元	天津工业大学	管理学院院长
肖 强	天津工业大学	人文与法学院院长
徐德岭	天津师范大学	经济学院副院长
张 璞	内蒙古科技大学	经济管理学院院长
张 庆	湖北经济学院	会计学院财务管理系主任
张国旺	天津商业大学	商学院教授
张议元	廊坊师范学院	管理学院副院长
赵中利	山东交通学院	管理学院院长
朱春红	天津工业大学	经济学院院长

前言

运筹学(第2版)

Preface

“运筹学”是一门应用于管理组织系统的科学,是为管理方面的人员提供决策目标和数量分析的工具。它通过运用分析、试验、量化的方法,对经营管理系统中的人、财、物等有限的资源进行统筹安排,为决策者提供科学的、有依据的最优方案,以实现最有效的管理。

掌握运筹学整体优化的思想和若干定量分析的优化技术,以便能正确应用各类模型分析、解决不十分复杂的实际问题,是培养和提高本科生科学思维、科学方法、实践技能和创新能力的综合素质的重要而有效的途径。

由于运筹学涉及诸多领域,因此,应用也是相当广泛的。各类高校的管理、理工等专业都把它设定为一门必修课。

“运筹学”课程的培养定位是:“运筹学”是管理类本科专业一门重要的学科基础课,也是理工科学生不可或缺的重要基础课程。该课程是以定量分析为主来研究管理问题,将工程思想和管理思想相结合,应用系统的、科学的、数学分析的方法,通过建模、检验和求解数学模型而获得最优决策的科学。通过“运筹学”课程的学习和实践为学生的进一步深造和科研打下坚实的定量分析基础,也为学生的创新思维与应用创造了良好条件。使学生掌握运筹学的基本优化理论和优化方法,灵活掌握运筹学在解决实际问题中的基本方法和应用技巧,从而活学活用所学理论知识;培养学生从应用中发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的能力,培养学生的综合素质、创新能力和团队协作精神。

学习“运筹学”课程应达到下列目标和要求:

1. 熟练掌握该课程的基本概念和基本原理,涵盖线性规划、非线性规划、整数规划、动态规划、对策论、网络优化、排队论和决策论等方面;
2. 较好地掌握该课程的基本模型和方法,包括:单纯形法、对偶理论、敏感性分析、运输问题模型、整数规划模型、指派问题模型、动态规划最优化方法、网络优化模型、排队论模型、决策分析方法;
3. 灵活地将理论知识应用于实际问题的分析和解决,如炼油厂的选址问题、企业的生产计划、风险组合投资问题、生产企业的库存问题、保险公司的险种配置问题以及企业经营中的博弈问题等。

本书是根据 21 世纪经济管理人才对“运筹学”教学的需求,由在天津理工大学管理学院长期从事运筹学教学的教师,总结提炼多年教学中积累的教学经验和成果,精心编写而成。本书

编写的分工为：孙萍编写第一、四、五、六、七、八、九、十二章；苑清敏编写第十、十一章；安小会编写第二、三章。天津师范大学的张炳轩教授、河北理工大学的肖继先教授、河北科技大学的蒋佳老师等人的前期工作，在本教材中保留了他们的部分成果；安忠教授为本书的出版给与了大力支持，在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中缺点错误在所难免，敬请读者批评指正。

目录 Contents

运筹学 (第2版)

第1章 绪论	1
1.1 运筹学的产生和发展	1
1.2 运筹学的性质特点、工作步骤	4
1.3 运筹学的应用与展望	5
第2章 线性规划	7
2.1 线性规划问题及其数学模型	7
2.2 线性规划问题解的概念及性质	14
2.3 线性规划的图解法	18
2.4 单纯形法	20
2.5 大M法	31
第3章 线性规划的对偶理论与灵敏度分析	42
3.1 线性规划的对偶问题	42
3.2 对偶问题的性质	47
3.3 影子价格	52
3.4 对偶单纯形法	56
3.5 灵敏度分析	60
第4章 运输问题	78
4.1 运输问题及其模型	78
4.2 表上作业法	80
4.3 产销不平衡的运输问题	87
第5章 目标规划	96
5.1 目标规划模型	96
5.2 目标规划的图解法	101
第6章 整数规划	107
6.1 整数规划问题的提出	107
6.2 分枝定界解法	108
6.3 割平面解法	110
6.4 0—1型整数规划	112
6.5 指派问题	116
第7章 动态规划	124
7.1 多阶段决策问题引例	124
7.2 动态规划的基本概念和基本原理	126

7.3	动态规划模型的建立与求解	129
7.4	动态规划和静态规划的关系	133
7.5	动态规划在经济管理中的应用(1)	136
7.6	动态规划在经济管理中的应用(2)	149
第8章	图与网络分析	157
8.1	图的基本概念	157
8.2	树	160
8.3	最短路问题	161
8.4	最大流问题	165
8.5	最小费用最大流问题	169
第9章	网络计划技术	175
9.1	网络图	175
9.2	网络时间参数的计算	180
9.3	网络计划的优化	186
第10章	排队论	196
10.1	随机服务系统与过程	196
10.2	单服务台负指数分布排队系统分析	198
10.3	多服务台负指数分布排队系统的分析	202
10.4	一般服务时间排队模型	204
10.5	排队系统的优化	205
第11章	存储论	210
11.1	存储论概述	210
11.2	确定型存储模型	211
11.3	随机型存储模型	221
第12章	决策论	228
12.1	决策的基本问题	228
12.2	确定型决策	230
12.3	不确定型决策	230
12.4	风险型决策方法	233
12.5	决策树	236
习题解答		242
参考文献		264

第 1 章 绪 论

1.1 运筹学的产生和发展

“运筹学”(Operations Research)直译为“运作研究”或“操作研究”。运筹学是运用科学的方法(如分析、试验、量化等)来决定如何最佳地运营和设计各种系统的一门学科。取自“运筹帷幄之中,决胜千里之外”。

1.1.1 朴素的运筹思想

朴素的运筹学思想的出现可以追溯到很早——在中国战国时期,曾经有过一次流传后世的赛马比赛,相信大家都知道,这就是“田忌齐王赛马”(对策论)。齐王要与大臣田忌赛马,双方各出上、中、下马各一匹,对局三次,每次胜者获 1 000 金。田忌在好友、著名的军事谋略家孙臆的指导下,采用以下安排:

齐王	上	中	下
田忌	下	上	中

最终净胜一局,赢得 1 000 金。田忌赛马的故事说明在已有的条件下,经过筹划、安排,选择一个最好的方案,就会取得最好的效果。可见,筹划安排是十分重要的。

丁谓主持的皇宫修复工程的故事发生在北宋年间,当时皇宫因火焚毁,丁谓负责修复皇宫。他的施工方案是:先将皇宫前的一条大街挖成一条大沟,将大沟与汴水相通。使用挖出的土就地制砖,令与汴水相连形成的河道承担繁重的运输任务;修复工程完成后,实施大沟排水,并将原废墟物回填,修复成原来的大街。丁谓将取材、生产、运输及废墟物的处理用“一沟三用”巧妙地解决了。

公元前 400 年前,中国著名军事学家孙武的《孙子兵法》一书中就描述了敌我双方交战,要克敌制胜就要在了解双方情况的基础上,做出最优的对付敌人方法,这就是“运筹帷幄之中,决胜千里之外”的说法,这些都体现了优化的思想。这说明在很早以前,我国军事上已知道使用“运筹学”了,并利用它去安排计划,指挥作战。但遗憾的是,我国没有人去深入研究它,整理它,把它作为一门学问向世人提出来。运筹学的产生可以说很难有一个明确的时间界定,目前国际上比较公认的观点是运筹学产生于第二次世界大战前后。

1.1.2 运筹学的产生

运筹学的早期历史可追溯到 19 世纪中叶——特拉法加尔(Trafalgar)海战和纳尔森(Nel-

son)秘诀。法国拿破仑统帅大军要与英国争夺海上霸主地位,而实施这一战略的关键是消灭英国的舰队。英国海军统帅、海军中将纳尔森亲自制定了周密的战术方案。1805年10月21日,这场海上大战爆发了。英国是纳尔森亲自统帅的地中海舰队,由27艘战舰组成;另外一方是由费伦纽夫(Villeneuve)率领的法国-西班牙联合舰队,共有33艘战舰。在一场海战后,法国-西班牙联合舰队以惨败告终:联合舰队司令费伦纽夫连同12艘战舰被俘,8艘沉没,仅13艘逃走,人员伤亡7000人。而英国战舰没有沉没,人员伤亡1663人。虽然作为统帅的纳尔森阵亡,但留下了秘密备忘录中的纳尔森(Nelson)秘诀。1914年英国人兰彻斯特(F. W. Lanchester)针对该秘诀进行研究,发表了关于人与火力的优势与胜利之间的理论文章,这就是军事运筹学中著名的“兰彻斯特战斗方程”。

第一次世界大战期间,英国生理学教授希尔领导了一个防空实验小组,他们专门研究高射炮的利用,研究如何部署高射炮在阵地中的位置,从而使敌机受到的打击最大,而自己一方受到的损失最小。因此,后来的科学家、军事学家、工程师们认为希尔领导的防空实验小组是运筹组织的萌芽,希尔就被称为“运筹学之父”。

“运筹学”这一名词最早出现在第二次世界大战期间——美、英等国家的作战研究小组为了解决作战中所遇到的许多错综复杂的战略、战术问题而提出。背景是英、美对付德国的空袭,雷达作为防空系统的一部分,从技术上是可行的,但实际运用时却不理想。为此,一些科学家就如何合理运用雷达开始进行一类新问题的研究。1939年以曼彻斯特大学物理学家、英国战斗机司令部顾问、战后获得诺贝尔奖的P. M. S. Blackett为首,组织了一个小组,代号为“Blackett 马戏团”。这个小组包括三名心理学家、两名数学家、两名应用数学家、一名天文物理学家、一名普通物理学家、一名海军军官、一名陆军军官、一名测量员。研究的问题是:设计将雷达信息传送到指挥系统和武器系统的最佳方式;雷达与武器的最佳配置。他们对探测、信息传递、作战指挥、战斗机与武器的协调,作了系统的研究,并获得成功。“Blackett 马戏团”在秘密报告中使用了“Operational Research”一词,即“运筹学”。

美国的罗伯特·华生华特把运筹学引入到陆军和海军的各个部门中,把它称为“运行研究和运行评价”。后来,在伯·摩斯领导下,美国军事运筹学得到了进一步发展。不久,加拿大、法国等地相继成立了由科学家、工程师和数学家们组成的运筹学组织,研究作战的战略战术问题。战争结束后,莫尔斯和基姆鲍尔总结了战争期间运载工具分配武器的问题、展开兵力问题、分配不同类兵器问题,使毁伤目标数达到最大值的火器分配问题等,以及二次世界大战时期各次战略部署的研究结果,编写出版了《运筹学》。

1.1.3 运筹学的发展

第二次世界大战后,运筹学的活动扩展到工业和政府等部门,它的发展大致可分为三个阶段:

(1)从1945年到20世纪50年代初,这个阶段被称为是运筹学的创建时期。运筹学作为一门现代科学,是在第二次世界大战期间首先在英美两国发展起来的,有的学者把运筹学描述为就组织系统的各种经营作出决策的科学手段。当第二次世界大战后的工业恢复繁荣时,由于组织内与日俱增的复杂性和专门化所产生的问题,使人们认识到这些问题基本上与战争中所曾面临的问题类似,只是具有不同的现实环境而已,运筹学就这样融入工商企业和其他部门,1947年,美国数学家丹捷格(G. B. Dantzig)发表了关于线性规划的研究成果,所解决的问题是美国空军军事规划时提出的,并给出了求解线性规划问题的单纯形算法。世界上不少国



家已成立了致力于该领域及相关活动的专门学会,1948年英国成立了运筹学俱乐部,定期讨论如何把运筹学用于民用事业,并取得了成果。1951年在克里夫兰的技术案例研究所里召开了美国的第一届工业运筹学会议。1952年世界上第一个运筹学会在美国宣布创立,并出版期刊《运筹学》,世界其他国家也先后创办了运筹学会与期刊。所有这些,标志着运筹学这门学科基本形成。

(2)从20世纪50年代初期到20世纪50年代末期,这个阶段被认为是运筹学的成长时期。在50年代以后由于运筹学理论上的成熟,电子计算机的问世,又大大促进了运筹学的发展,从而得到了广泛的应用。对于系统配置、聚散、竞争的运用机理有了更加深入的研究和应用,形成了比较完备的一套理论,如规划论、排队论、存贮论、决策论等。20世纪50年代运筹学理论、方法及其活动发展到了一个新的水平。继英国、美国先后成立运筹学学会,在1956年至1959年短短的几年里,先后就有法国、印度、日本等10几个国家成立了运筹学学会,并有6种运筹学期刊问世。1957年在英国牛津大学召开了第一届运筹学国际会议,1959年成立了国际运筹学学会(International Federation of Operations Research Societies, IFORS)。截至1986年,国际上已有38个国家和地区成立了运筹学学会或类似的组织。

(3)自20世纪60年代以来,被认为是运筹学开始普及和迅速发展的时期。计算机的普及与发展是推动运筹学迅速发展的巨大动力。没有现代计算机技术,求解复杂的运筹学模型是不可设想的,也是不实际的。运筹学实践反过来又促进了计算机技术的发展,它不断地对计算机提出内存更大、运行速度更快的要求。可以说运筹学在过去的半个多世纪里,既得益于计算机技术的应用与发展,同时也极大地促进了计算机技术的发展。第三代电子数字计算机的出现,促使运筹学得以用来研究一些大型复杂的系统,如城市交通、环境污染、国民经济计划等。

20世纪60年代以来,运筹学得到了迅速的普及和发展。运筹学细分为许多分支,许多大专院校把运筹学的规划理论引入本科教学课程,把规划理论以外的内容引入硕士、博士研究生的教学课程。运筹学的学科划分没有统一的标准,在工科学院、商学院、经济学院和数理学院的教学上都可以发现它的存在。

在20世纪50年代中期,我国科学家钱学森、许国志等人将运筹学由西方引入我国,最初曾根据英文Operational Research和Operations Research译为“运用学”。1957年从“运筹帷幄之中,决胜千里之外”这句古语中摘取“运筹”二字,将O.R.正式命名为“运筹学”,比较恰当地反映了这门学科的性质和内涵,并结合我国的特点在国内推广应用,在经济数学方面,特别是投入产出表的研究和应用开展得较早。质量控制(后改为质量管理)的应用也有特色。在此期间,以华罗庚教授为首的一大批数学家加入到运筹学的研究队伍,使运筹学的很多分支很快跟上当时的国际水平。

我国第一个运筹学小组于1956年在中国科学院力学研究所成立,1958年成立了运筹学研究室。1960年在济南召开了全国应用运筹学的经验交流和推广会议,1962年和1978年先后在北京和成都召开了全国运筹学学术会议,1980年中国运筹学学会正式成立。我国各高等院校,特别是经济管理类专业已普遍把运筹学作为一门专业的主干课程列入教学计划。运筹学在我国虽然起步较晚,但发展却非常迅速,目前我国运筹学的研究和应用已跟上了世界的步伐。

1.2 运筹学的性质特点、工作步骤

1.2.1 运筹学的定义

运筹学是一门应用科学,至今还没有统一且确切的定义。在此提出以下几个定义来说明运筹学的性质和特点:

定义 1.1 为决策机构在对其控制下的业务活动进行决策时,提供以数量化为依据的科学方法。该定义强调的是科学方法,以定量为基础,利用数学工具解决问题。但任何决策都包含定量和定性两个方面,而定性方面又不能简单地用数学表示,如政治、社会等因素,只有综合多种因素的决策才是全面的。运筹学工作者的职责是为决策者提供可以量化方面的分析,并指出哪些是定性因素。

定义 1.2 运筹学是一门应用科学,它广泛应用现有的科学技术知识和数学方法,解决实际中提出的专门问题,为决策者选择最优决策提供定量依据。该定义表明运筹学具有多学科交叉的特点,如综合应用经济学、心理学、物理学和化学中的一些方法。

综上所述,运筹学的定义可以提炼为:

定义 1.3 运筹学就是利用计划的方法和多学科专家组成的队伍,把复杂的功能关系表示成数学模型,其目的是通过定量分析为决策和揭露新问题提供数量依据。

1.2.2 运筹学的特点

(1) 运筹学已被广泛应用于工商企业、军事部门、民政事业等研究组织内的统筹协调问题,故其应用不受行业、部门之限制。

(2) 运筹学既对各种经营进行创造性的科学研究,又涉及组织的实际管理问题,它具有很强的实践性,最终应能向决策者提供建设性意见,并应收到实效。

(3) 运筹学以整体最优为目标,从系统的观点出发,力图以整个系统最佳的方式来解决该系统各部门之间的利害冲突。对所研究的问题求出最优解,寻求最佳的行动方案,所以它也可看成是一门优化技术,提供的是解决各类问题的优化方法。

为了有效地应用运筹学,前英国运筹学会会长托姆林森提出了六条原则:①合伙原则;②催化原则;③互相渗漏原则;④独立原则;⑤宽容原则;⑥平衡原则。

1.2.3 运筹学的研究方法和工作步骤

1. 运筹学的研究方法

(1) 从现实生活场合抽出本质要素来构造数学模型,进而寻求一个跟决策者的目标有关的解。

(2) 探索求解的结构并导出系统的求解过程。

(3) 从可行方案中寻求系统的最优解法。

2. 运筹学的工作步骤

(1) 提出和形成问题。即要弄清问题的目标,可能的约束,问题的可控变量以及有关参数,搜集有关资料。

(2) 建立模型。即把问题中可控变量、参数和目标与约束之间的关系用一定的模型表示出来。

(3) 求解。用各种手段(主要是数学方法,也可用其他方法)将模型求解。解可以是最优



解、次优解、满意解。复杂模型的求解需用计算机,解的精度要求由决策者提出。

(4)解的检验。首先检验求解步骤和程序有无错误,然后检查解是否反映现实问题。

(5)解的控制。通过控制解的变化过程决定对解是否要作一定的修改。

(6)解的实施。是指将解用到实际中去,必须考虑到实际的问题,如向实际部门讲清楚解的用法,在实施中可能产生的问题等。

以上过程应反复进行。

1.3 运筹学的应用与展望

随着科学技术和生产的发展,运筹学已渗入很多领域里,发挥了越来越重要的作用。在运筹学的发展简史中,已提到了运筹学在早期的应用主要在军事领域,二次大战后运筹学的应用转向民用。主要应用于:

(1)市场销售:在广告预算和媒介的选择、竞争性定价新产品开发、销售计划的制定等方面。

(2)生产计划:在总体计划方面主要是从总体确定生产、存储和劳动力的配合等计划以适应波动的需求计划,主要用线性规划和模拟的方法等。

(3)库存管理:主要应用于多种物资库存的管理,以确定合理的库存方式、库存量。

(4)运输问题:确定最小成本的运输线路、物资的调拨、运输工具的调度以及建厂地址的选择等。

(5)财政和会计:这里主要涉及预算、贷款、成本分析、定价、投资、证券管理、现金管理等。用得较多的方法是:统计分析、数学规划、决策分析。

(6)人事管理:包含六个方面。①人员的获得和需求估计;②人才的开发,即进行教育和培训;③人员的分配;④各类人员的合理利用问题;⑤人才的评价,其中有如何测定一个人对组织、社会的贡献;⑥工资和津贴的确定等。

(7)设备维修、更新和可靠性、项目选择和评价。

(8)工程的优化设计:这方面在建筑、电子、光学、机械和化工等领域都有应用。

(9)计算机和信息系统。

(10)城市管理:包含了各种紧急服务系统的设计和运用。

我国的运筹学的应用是在1957年始于建筑业和纺织业。在理论联系实际的思想指导下,从1958年开始在交通运输、工业、农业、水利建设、邮电等方面都有应用。尤其是在运输方面,从物资调运、装卸到调度等。在粮食部门为解决合理粮食调运问题,提出了“图上作业法”。我国的运筹学工作者从理论上证明了它的科学性。在解决邮递员的合理投递路线时,管梅谷提出了国外称之为“中国邮路问题”的解法。在工业生产中推广了合理下料,机床负荷分配。在纺织业中曾用排队论方法解决细纱车间劳动组织,最优折布长度等问题。在农业中研究了作业布局、劳力分配和麦场设置等。从20世纪60年代起我国的运筹学工作者在钢铁和石油部门开展较全面的和深入的应用;投入产出法在钢铁部门首先得到应用。从1965年起统筹法的应用在建筑业、大型设备维修计划等方面取得可喜的进展。从1970年起在全国大部分省市和部门推广优选法。其应用范围有配方、配比的选择,生产工艺条件的选择,工艺参数的确定,工程设计参数的选择,仪器仪表的调试等。在20世纪70年代中期最优化方法在工程设计界得

到广泛的重视。在光学设计、船舶设计、飞机设计、变压器设计、电子线路设计、建筑结构设计和化工过程设计等方面都有成果。从 70 年代中期,排队论开始应用于研究矿山、港口、电信和计算机的设计等方面。图论曾用于线路布置和计算机的设计、化学物品的存放等。存储论在我国应用较晚,20 世纪 70 年代末在汽车工业和其他部门取得成功。近年来运筹学的应用已趋向研究规模大和复杂的问题,如部门计划、区域经济规划等;并已与系统工程难以分解。

关于运筹学将往哪个方向发展,从 20 世纪 70 年代起西方运筹学工作者有两种观点,至今还未说清。这里提出某些运筹学界的观点,以供参考。美国前运筹学会主席邦特(S. Bonder)认为,运筹学应在三个领域发展:运筹学应用、运筹科学和运筹数学。并强调发展前二者,从整体上应协调发展。事实上运筹数学到 70 年代已形成一系列强有力的分支,数学描述相当完善。正是这一点使不少运筹学界的前辈认为,有些专家钻进运筹数学的深处,而忘了运筹学的原有特色,忽略了多学科的横向交叉联系和解决实际问题的研究。指出有些人只迷恋于数学模型的精巧、复杂化、使用高深的数学工具,而不善于处理面临大量新的不易解决的实际问题。现代运筹学工作者面临的大量新问题是:经济、技术、社会、生态和政治等因素交织在一起的复杂系统。

因此,从 70 年代末到 80 年代初不少运筹学家提出:要注意研究大系统,注意与系统分析相结合。由于研究新问题的时间很长,因此,必须与未来学紧密结合。由于面临的问题大多是涉及技术、经济、社会、心理等综合因素的研究,在运筹学中,除了常用的数学方法以外,还引入一些非数学的方法和理论。曾在 20 世纪 50 年代写过《运筹学的数学方法》的美国运筹学家沙旦(T. L. Saaty),在 20 世纪 70 年代末提出了“层次分析法”(Analytic Hierarchy Process),简称为 AHP 方法,并认为过去过分强调精巧的数学模型,可是它很难解决那些非结构性的复杂的问题。因此,宁可用看起来是简单和粗糙的方法,加上决策者的正确判断解决实际问题。切克兰特(P. B. Checkland)把传统的数学方法称为硬系统思考,它适用于解决那种结构明确的系统以及战术和技术性问题,而对于结构不明确的、有人参与的活动就不太胜任了。在这种情况下,就应采取软系统思考的方法,相应的一些概念和方法都应有所变化;如将过分理想化的“最优解”换成“满意解”。过去把求得的“解”看成是精确的、不能变的、凝固的东西,而现在要以“易变性”的概念来看待所求得的“解”,以适应系统的不断变化。解决问题的过程是决策者和分析者发挥其创造性的过程,这就是进入 20 世纪 70 年代以来人们愈来愈对人机对话的算法感兴趣的原因。大多数人认为决策支持系统是运筹学的发展方向。本课程所提供的一些运筹学思想和方法都是基本的,是作为运筹学的学习者必须掌握的知识。

运筹学像一棵大树,枝繁叶茂,在它的基础上又萌发了许多新的分支。如规划论、对策论、排队论、最优化方法、质量控制、抽样检查等,都对人类的生产实践带来巨大的好处。比如,全国火车运行时刻表的制订;机场、码头、飞机、轮船的航行调度;又比如在一个城市中要设置多少条公交线路,这些车都经过哪些街道、每条街上设多少个站,可使顾客少排队,运输量又最大,利润最高;这都是运筹学中规划论问题。我国数学家华罗庚先生倡导将 0.618 法运用到工业生产中,这是运筹学中优选法的问题……因此,无论是运筹学的分支,还是运筹学本身,它们都是人类社会生产实践中所不可少的理论,解决了现实社会生活中的大量实际问题。

运筹学正朝着三个领域发展:运筹学应用、运筹科学和运筹数学。现代运筹学面临的新对象是经济、技术、社会、生态和政治等因素交叉在一起的复杂系统,因此必须注意大系统、注意与系统分析相结合,与未来学相结合,引入一些非数学的方法和理论,采用软系统的思考方法。总之,运筹学还在不断发展中,新的思想、观点和方法不断出现。

第 2 章 线性规划

线性规划(Linear Programming, LP) 是运筹学中研究较早、发展较快、应用广泛、方法较成熟的一个重要分支,是一种用来解决一组特殊的有约束条件的最优化问题的方法。它的目标函数是线性的,并有一个或多个线性约束条件。早在 1939 年,苏联数学家康特洛维奇在《生产组织与计划中的数学方法》一书中首先提出运筹学的这个重要分支,后来经过很多学者的深入研究,并且在运输、能源调配、劳动力分配以及经济问题等许多方面已经得到了广泛的应用,使得它在应用数学中占有了重要的地位。

1947 年,美国科学院、美国文理科学院与美国工程院德高望重的院士、美国国家科学奖章获得者 G. B. 丹齐克发明了计算线性规划的单纯形算法,成为线性规划学科的奠基人。60 年后的今天,单纯形法仍然是求解线性规划问题不可多得的好方法。

2.1 线性规划问题及其数学模型

2.1.1 问题的提出

线性规划已在军事作战、经济分析、经营管理和工程技术等方面得到非常广泛的应用。它为合理地利用有限的人力、物力、财力等资源作出的最优决策提供科学的依据。应用线性规划解决实际问题的方法就是首先应建立该问题的数学模型。虽然应用线性规划解决的实际问题是各式各样的,但其数学模型的形式是类似的。下面通过例子说明如何建立实际问题的数学模型。

【例 2.1】 嘉美公司生产甲、乙、丙三种产品,主要消耗 A、B、C 三种原料,已知该公司各生产一件产品时消耗三种原料的数量,以及各产品的单价情况,如表 2.1 所示。问该公司应生产三种产品各多少件,使总产值最大。

表 2.1 产品原材料消耗表

原料 \ 产品 单位消耗	甲	乙	丙	原料总量(kg)
	甲	乙	丙	原料总量(kg)
A	1	4	2	4 500
B	5	2	3	6 300
C	0	2	5	3 800
产品单价(百元)	2	4	5	

为求解上述问题,用变量 x_1 , x_2 和 x_3 分别表示嘉美公司生产甲乙丙三种产品各自的产

量,称 x_1, x_2 和 x_3 为决策变量,向量 $(x_1, x_2, x_3)^T$ 表示一个生产方案,可称其为决策变量向量,简称决策变量。由于原料 A、B、C 的限制,生产方案 $(x_1, x_2, x_3)^T$ 的取值也必定受到一定限制。例如,采取生产方案 $(x_1, x_2, x_3)^T$,消耗原料 A 的数量为 $x_1 + 4x_2 + 2x_3$,它不能超过原料 A 总量。这样所采取的生产方案 $(x_1, x_2, x_3)^T$ 必须满足条件 $x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 4\,500$ (原料 A 的限制)。同样, $(x_1, x_2, x_3)^T$ 必须满足条件 $5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6\,300$ (原料 B 的限制),以及条件 $2x_2 + 5x_3 \leq 3\,800$ (原料 C 的限制)。同时, x_1, x_2 和 x_3 不能取负数,即须满足 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ (非负限制)。所以一个可行方案 $(x_1, x_2, x_3)^T$ 必须满足条件

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 4\,500 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6\,300 \\ 2x_2 + 5x_3 \leq 3\,800 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (2.1)$$

式(2.1)称为一组约束条件。

对于每一个可行生产方案 $(x_1, x_2, x_3)^T$,均有一个由这个方案产生的总产值 z 与之对应,既有 $(x_1, x_2, x_3)^T \rightarrow z = 2x_1 + 4x_2 + 5x_3$,称 $z = 2x_1 + 4x_2 + 5x_3$ 为目标函数,并由它衡量各生产方案的优劣。

综上所述,对例 1 求解生产方案的问题可由下列数学模型描述:

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 4\,500 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6\,300 \\ 2x_2 + 5x_3 \leq 3\,800 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2)$$

式(2.2)表示在所有满足约束条件式(2.1)的可行方案 $(x_1, x_2, x_3)^T$ 中,去寻找总产值最大的方案 $(x_1^*, x_2^*, x_3^*)^T$ 。式(2.2)称为线性规划模型,它由三个基本要素组成:①决策变量 $X = (x_1, x_2, x_3)^T$,表示一个方案;②约束条件式(2.1),表示决策变量必须满足的条件;③目标函数 $z = 2x_1 + 4x_2 + 5x_3$,表示决策变量 $(x_1, x_2, x_3)^T$ 优劣的数量指标。因式(2.2)中目标函数与约束条件均是线性的,所以称此模型为线性规划模型。

【例 2.2】 某工厂熔炼一种新型不锈钢,需要用四种合金 A、B、C、D 为原料,经测这四种原料关于元素铬(Cr),锰(Mn)和镍(Ni)的含量(%),单价,以及这种不锈钢所需铬(Cr),锰(Mn)和镍(Ni)的最低含量(%)如表 2.2 所示。假设熔炼时重量没有损耗。问:要熔炼成 100 吨这种不锈钢,应选用原料 A、B、C、D 各多少吨,能够使成本最小?

表 2.2 不锈钢原材料成本表

成分	原料	A	B	C	D	不锈钢所需各元素的最低含量
	含量					
铬(Cr)		1.89	3.46	4.26	2.67	3.25
锰(Mn)		3.57	2.11	1.45	4.66	2.15
镍(Ni)		5.32	4.25	2.72	1.37	4.55
单价(万元/吨)		13.6	15.8	10.02	9.91	