

目 录

第 1 章 应力分析	1
1-1 应力状态	1
1-2 三维应力状态分析	6
1-3 三维应力状态的主应力	8
1-4 最大剪应力	13
1-5 等倾面上的正应力和剪应力	16
1-6 应力罗德参数	27
1-7 应力张量的分解	29
1-8 平衡微分方程	31
习题	38
第 2 章 应变分析	42
2-1 一点的应变状态 应变与位移的关系	42
2-2 主应变	50
2-3 应变张量和应变偏量	54
2-4 应变协调方程	65
习题	70
第 3 章 弹性与塑性应力与应变关系	73
3-1 拉伸和压缩时的应力应变曲线	74
3-2 弹塑性力学中常用的简化力学模型	80
3-3 广义胡克定律	83
3-4 特雷斯卡和米泽斯屈服条件	88
3-5 塑性应力应变关系	97
3-6 德鲁克公设和伊柳辛公设	118
3-7 塑性本构关系的内在联系	123
习题	126

第 4 章 弹性与塑性力学的解题方法	128
4-1 按位移求解弹性力学问题	129
4-2 按应力求解弹性力学问题	133
4-3 平面问题和应力函数	138
4-4 逆解法和半逆解法	144
4-5 边界上 φ 及其导数的力学意义	150
4-6 平面问题的极坐标解法	159
4-7 关于塑性力学的解题方法	168
4-8 板条的弯曲问题	172
习题	177
第 5 章 厚壁圆筒的分析	183
5-1 厚壁圆筒的弹性分析	184
5-2 厚壁圆筒的塑性分析	191
5-3 组合厚壁圆筒的分析	203
5-4 厚壁圆筒的残余应力	213
5-5 强化材料的厚壁圆筒	217
5-6 厚壁圆筒自紧分析简介	226
5-7 厚壁圆球的分析	230
习题	234
第 6 章 旋转圆盘的分析	236
6-1 等速旋转圆盘的弹性分析	237
6-2 等速旋转圆盘的弹塑性分析	244
6-3 强化材料旋转圆盘的分析	254
6-4 变厚度旋转圆盘的分析	258
6-5 变速旋转圆盘的分析	266
6-6 等速旋转圆轴的分析	272
习题	277
第 7 章 轴的扭转	280

7-1	圆轴的弹性扭转	280
7-2	非圆截面杆件的弹性扭转	286
7-3	弹性扭转与薄膜比拟	296
7-4	圆轴的弹塑性扭转	303
7-5	全塑性扭转与沙堆比拟	308
7-6	弹塑性扭转与薄膜-屋顶比拟	314
	习题	315
第 8 章	薄板的分析	318
8-1	弹性薄板的基本方程	318
8-2	矩形薄板的弹性分析	327
8-3	简支圆板的分析	334
8-4	用梁模型计算圆板与环板的塑性极限载荷	346
8-5	多边形板的塑性极限载荷	355
	习题	361
第 9 章	热应力	366
9-1	简单热应力问题	367
9-2	热弹性基本方程及解法	371
9-3	平面热弹性问题	382
9-4	厚壁圆筒的热应力	390
9-5	厚壁圆球壳的热应力	393
9-6	板中的热应力	396
9-7	热塑性的物理方程	403
	习题	406
第 10 章	结构的塑性极限分析与安定性	409
10-1	梁的弹塑性弯曲	409
10-2	塑性极限分析的定理与方法	414
10-3	梁的极限分析	418
10-4	刚架的极限分析	429

10-5	轴对称圆板的极限分析	445
10-6	结构的安定性	456
	习题	467
第 11 章	金属塑性成形的力学分析	470
11-1	用主应力法求解平面应变条件下的锻造	471
11-2	用主应力法求解平面应变条件下的拉拔 和挤压	477
11-3	轴对称拉拔	482
11-4	板料冲压的轴对称平衡方程	488
11-5	用特雷斯卡屈服条件和米泽斯屈服条件求 薄膜力	491
11-6	薄膜板料冲压	498
	习题	504
第 12 章	岩土结构的承载分析	506
12-1	变形模型与强度准则	507
12-2	梁的弯曲	516
12-3	轴对称圆板	523
12-4	内压作用下的厚壁圆筒	526
12-5	外压作用下的厚壁圆筒	540
	习题	544
	习题选解及答案	546
	主要参考书目	583

第1章 应力分析

物体在外力和温度的作用下,其内部各部分间将产生相互平衡的内力。物体的内应力不仅随所考查的位置不同而不同,而且取决于所取截面的方向。所取截面法向上的分量称为正应力,切向的分量称为剪应力。三个正应力分量和三个剪应力分量可以描述一点的应力状态。一点的应力状态确定后,三个主应力的值便可确定,最大剪应力的值亦可得到。

在等倾面上研究应力状态是很有意义的。它不仅分析方便,而且物理概念明确,对于理解塑性力学中的问题是非常重要的。应力状态也可以用张量来描述。应力张量可分解为球形应力张量和偏斜应力张量。

考虑微元体相邻面上的差别,就可推导出应力平衡方程。对于三维问题,平衡方程有三个。平衡方程可以在直角坐标、柱坐标或球坐标中导出。对于轴对称问题和球对称问题平衡方程比较简单,使用起来也比较方便。

1-1 应力状态

根据外力作用方式的不同,可以将外力分为面力和体力。所谓面力就是作用在物体表面上的力,例如两物体间接触力等。而体力则是分布在物体整个体积内部的力,例如物体的自重、惯性力等。

设有一个受外力作用的变形体,被一平面截成两部分 A 与 B (图 1-1)。 B 部分在截面上作用于 A 部分的力就是内力。在断面上

截取一个微元面积 dS , 并假定作用在此单元面积上的合力等于 dP 。

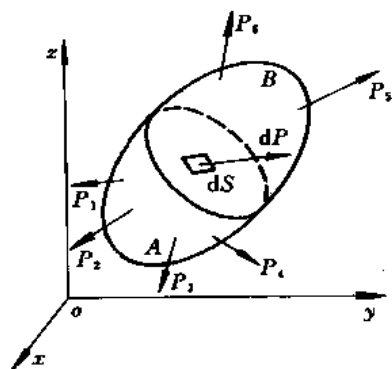


图 1-1 受外力作用的变形体

合力 dP 与微元面积 dS 的比值称为应力, 即

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta S} = \frac{dP}{dS} \quad (1-1)$$

平面的方向可以用其外法线方向来代表。受拉伸作用的等截面直杆, 其垂直于轴线上的每一个横截面上, 可以认为应力为均匀分布, 且正应力 $\sigma = P/S$, 剪应力等于零。而在与横截面倾斜为 φ 角的截面上(图 1-2), 其总应力为

$$\sigma = \frac{P}{S'} = \frac{P}{S/\cos\varphi} = \sigma \cos\varphi \quad (1-2)$$

式中, S' 为倾斜截面面积。若将总应力 $\sigma \cos\varphi$ 分解为垂直于斜截面上的正应力 σ_x 和平行于斜截面上的剪应力 τ_x , 则可得

$$\sigma_x = \sigma \cos^2\varphi, \quad \tau_x = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\varphi \quad (1-3)$$

由此可见, 在单向受力状态中, 与轴线垂直截面上的法向正应力为最大, 它随 φ 角的增加而减少。在 $\varphi = \pi/2$ 时, 正应力 σ 等于零, 而剪应力在 $\varphi = 0$ 和 $\varphi = \pi/2$ 的截面上为零, 在 $\varphi = \pi/4$ 的截面上, 将

达到最大值,并等于正应力 σ 的一半。

下面再来分析一下平面应力的受力状态。假设 $\sigma_z = 0$, 在 x 和 y 方向分别作用 σ_x, σ_y 和 τ_{xy} , 如图 1-3 所示。此时在与 x 和 y 轴成某一倾角的截面上将不仅有正应力 σ 的作用而且还将有剪应力 τ 的作用。设截面 BC 的面积为 S , 此时由图 1-3 可见 AC 的面积为 $S \cos \varphi$, AB 的面积为 $S \sin \varphi$, 则外力在 BC 面的法线方向投影

$$\begin{aligned}\sigma S &= (\sigma_x S \cos \varphi) \cos \varphi + (\sigma_y S \sin \varphi) \sin \varphi \\ &\quad + (\tau S \cos \varphi) \sin \varphi + (\tau S \sin \varphi) \cos \varphi \\ \tau S &= (\sigma_x S \cos \varphi) \sin \varphi - (\sigma_y S \sin \varphi) \cos \varphi \\ &\quad + (\tau S \sin \varphi) \sin \varphi - (\tau S \cos \varphi) \cos \varphi\end{aligned}$$

整理后,可得

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \\ \tau &= (\sigma_x - \sigma_y) \sin \varphi \cos \varphi \\ &\quad - \tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)\end{aligned}$$

图 1-2 受拉的等截面直杆

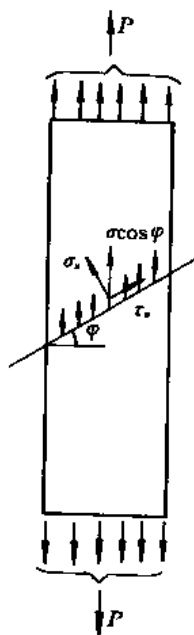
根据有关三角公式可将以上公式写为

$$\left. \begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ \tau &= \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi - \tau_{xy} \cos 2\varphi\end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

在上式中,将 φ 消去后,则可得

$$\left[\sigma - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \right]^2 + \tau^2 = \frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (1-5)$$

由此可见,若以 σ 和 τ 为坐标,取距坐标原点为 $\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$ 的点为圆心,以 $\left[\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2}$ 为半径作应力圆,则由此圆很容易



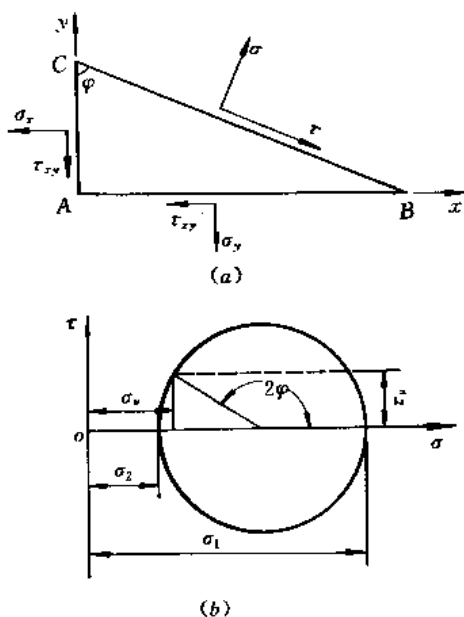


图 1-3 平面应力状态

求出当剪应力 τ 为零时的正应力值, 即

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (1-6)$$

根据(1-4)的第二式, 当 $\tau=0$ 时, $\varphi=\varphi_0$, 则有

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

如果 φ_0 为此方程式最小的正根, 则其它的根 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$, 可由下式确定

$$2\varphi_n = 2\varphi_0 \pm n\pi, \quad \varphi_n = \varphi_0 \pm \frac{n}{2}\pi$$

当 $\varphi_1 = \varphi_0 + \pi/2$ 时, 便可确定 $\tau=0$ 时互相垂直的两个主应力的值。

角 φ_0 和主应力可以在应力莫尔圆上很容易地得出(图 1-4)。为此,在 (σ, τ) 坐标上,在横坐标 σ 轴上取 $\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$ 为圆心,取 $\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)$ 为 CP'_1 或 CP'_2 , 并在此点取 τ_{xy} 的值作为纵坐标。在 $CP'_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)$ 点取 τ_{xy} 为正值, 则可得到应力圆的半径 CP_1 , 它等于 $\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ 。线段 oA 和 oB 表示主应力, 而主应力 σ_1 与 x 轴的正向所成的角度 φ_0 是角 ACP_1 之半, 由图上也可看出, 最大

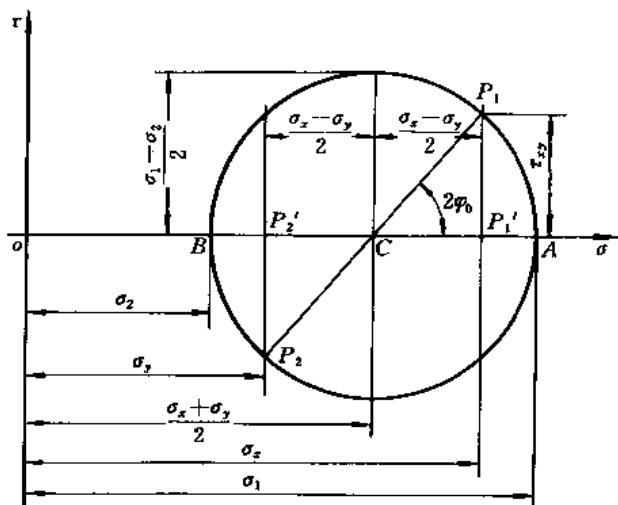


图 1-4 应力莫尔圆

剪应力为

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (1-7)$$

即等于主应力差的一半, 并且出现在与主应力截面成 45° 的截面上。

1-2 三维应力状态分析

从受力物体中取出任一无穷小的四面体(图 1-5)。该四面体的三个面与坐标平行,第四个面的法线 ν 与坐标轴正向夹角的余弦分别为 $\cos(\nu, x)=l, \cos(\nu, y)=m, \cos(\nu, z)=n$ 。四面体平行于

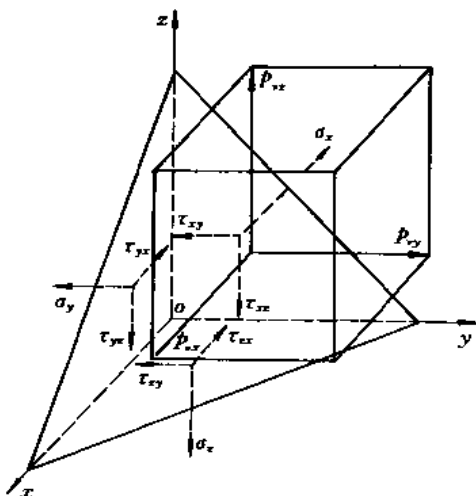


图 1-5 四面体受力图

坐标轴的棱边,其长度用 dx, dy 和 dz 表示。因为正应力总是沿着作用面的法线方向,因此只用一个下标便能表示所在的面和方向。例如, σ_x 表示正应力所在的面与 x 轴垂直,其方向沿 x 轴方向。而剪应力需要加两个下标才能说明它所在的面与作用方向,前一个下标表示它所在面的外法线方向,后一个下标表示它的方向,例如 τ_{yx} 表示剪应力所在面与 y 轴垂直,它的方向与 x 轴平行。现将作用在四面体各面上的应力及这些面的面积列于表 1-1 中。

表 1-1

面的名称	外法线方向	面 积	应力投影		
			在 x 轴上	在 y 轴上	在 z 轴上
oyz	$-x$	$\frac{1}{2}dydz$	$-\sigma_x$	$-\tau_{xy}$	$-\tau_{xz}$
oxz	$-y$	$\frac{1}{2}dxdz$	$-\tau_{yx}$	$-\sigma_y$	$-\tau_{yz}$
oxy	$-z$	$\frac{1}{2}dxdy$	$-\tau_{zx}$	$-\tau_{zy}$	$-\sigma_z$
倾斜面	ν	dS	p_{xx}	p_{xy}	p_{xz}

在四面体各面上的力等于应力与相对应面积的乘积并作用于相应面的重心上。由于体积力是 $dxdydz$ 的三阶微量,因而往往可以忽略不计。

按照力的平衡条件,在 x 轴上各力的投影为

$$-\sigma_x \frac{1}{2}dydz - \tau_{yx} \frac{1}{2}dzdx - \tau_{zx} \frac{1}{2}dxdy + p_{xx}dS = 0 \quad (1-8)$$

根据平面图形投影的几何关系应有

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}dydz &= ldS \\ \frac{1}{2}dzdx &= mdS \\ \frac{1}{2}dxdy &= ndS \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

将式(1-9)代入式(1-8)便可得到 p_{xx} 的表达式。用同样的方法,将力在 y 轴和 z 轴上投影,亦可得到 p_{xy} 和 p_{xz} 的表达式,即

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} \\ p_{xy} &= l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy} \\ p_{xz} &= l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

由此可见,作用于任一倾斜面上的应力向量分量可以用作用在与

坐标轴垂直的三个面上的应力向量分量来表示。如果作用在物体表面上的外面载荷用 F_x, F_y, F_z 表示, 而斜面为边界面, 这时式 (1-10) 中的 p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} 都换成 F_x, F_y, F_z , 则式 (1-10) 亦可作为力的边界条件的表达式。

为了证明剪应力互等定理, 通过四面体重心作平行于 z 轴的直线 z' 。设 C 点是四面体的重心, 则由 C 点至四面体各垂直于水平面的距离分别为 $\frac{1}{3}dx, \frac{1}{3}dy$ 和 $\frac{1}{3}dz$, 即 C 点在这些面上的投影与这些面的重心是重合的。这时作用在四面体各面上的 12 个分力除两个应力 τ_{yz} 及 τ_{xy} 外, 或与 z' 平行, 或通过 z' 轴, 因此对 z' 轴的力矩方程为

$$\tau_{xy} \frac{1}{2} dy dz \frac{1}{3} dx - \tau_{yz} \frac{1}{2} dx dz \frac{dy}{3} = 0$$

由此可得

$$\tau_{xy} = \tau_{yz}$$

用相同的方法可以得到

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} \quad (1-11)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yx}$$

这些公式表示剪应力互等定理。由此可见, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ 等六个应力分量便可以确定一点的应力状态。

1-3 三维应力状态的主应力

在过任一点所作任意方向的单元面积上都有正应力和剪应力。如果在某一方向剪应力为零, 则此方向即称为主方向, 而这时在该面上的正应力便称为主应力。

设以 ν 表示主应力平面的方向 (图 1-6)。而以 σ_ν 表示该面上的正应力。这时有

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= l\sigma_v \\ p_{xy} &= m\sigma_v \\ p_{xz} &= n\sigma_v \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

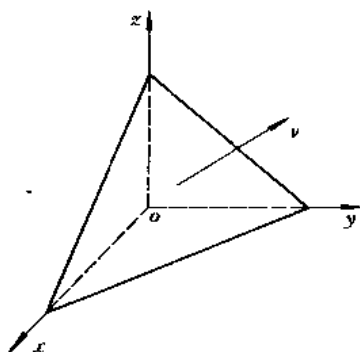


图 1-6 主应力平面示意图

将式(1-12)代入式(1-10)并整理后,得

$$\left. \begin{aligned} l(\sigma_x - \sigma_v) + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} &= 0 \\ l\tau_{yx} + m(\sigma_y - \sigma_v) + n\tau_{yz} &= 0 \\ l\tau_{zx} + m\tau_{zy} + n(\sigma_z - \sigma_v) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

$$\text{由几何关系知} \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (1-14)$$

根据式(1-13)和式(1-14)可以确定四个未知量 l, m, n 和 σ_v 。根据式(1-14)知 l, m, n 不能同时为零,因此式(1-20)为包括三个未知量 l, m, n 的线性齐次方程。若有非零解,则此方程组的系数行列式应当等于零,即

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_v & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_v & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_v \end{vmatrix} = 0 \quad (1-15)$$

展开式(1-15)后,得

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \quad (1-16)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \\ I_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 \end{aligned} \right\} \quad (1-17)$$

I_1, I_2, I_3 分别称为第一、第二、第三应力不变量。当坐标变换时,虽然每个应力分量都将随之改变,但这三个量是不变的,这是因为一旦应力状态确定后,其主应力便也已确定,当坐标变换时,虽然每个应力分量都将随之改变,但主应力的值是不变的,因而式(1-16)中的系数 I_1, I_2 , 和 I_3 的值是不变的,因此称它们为应力不变量。式(1-16)的三个根 σ_1, σ_2 和 σ_3 为主应力,一般说来,它们是不相等的。若 σ_1, σ_2 和 σ_3 各不相同,则对于其中每一个应力都可以确定其作用面的方向。这三个面中的每一个面的法线与坐标之间夹角的余弦可由式(1-13), (1-14)求出,此时 σ_i 应以 σ_1, σ_2 和 σ_3 的值来代替。

例 已知一点的应力状态由如下应力分量确定,即

$$\sigma_x = 3, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = 0, \quad \tau_{xy} = 1, \quad \tau_{yz} = 2, \quad \tau_{zx} = 1,$$

试求主应力的值。

解 由式(1-17)得 $I_1 = 3, I_2 = -6, I_3 = -8$, 代入式(1-16)后,得

$$\sigma^3 - 3\sigma^2 - 6\sigma + 8 = 0$$

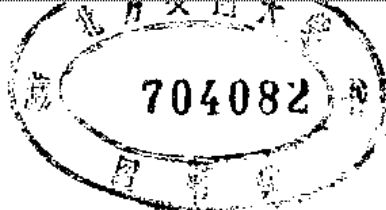
$$\text{或} \quad (\sigma - 4)(\sigma - 1)(\sigma + 2) = 0$$

故主应力为

$$\sigma_1 = 4, \quad \sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = -2$$

下面分析三维应力状态下,应力分量应遵循的规律。若将 p_{vx} , p_{vy} 和 p_{vz} 向法线 ν 上投影,则在微分面上的正应力为

$$\sigma_\nu = l p_{vx} + m p_{vy} + n p_{vz}$$



$$= l^2 \sigma_x + m^2 \sigma_y + n^2 \sigma_z + 2lm\tau_{xy} + 2mn\tau_{yz} + 2nl\tau_{zx} \quad (1-18)$$

若三个坐标轴的方向为主方向,则

$$\sigma_v = l^2 \sigma_1 + m^2 \sigma_2 + n^2 \sigma_3 \quad (1-19)$$

此时应有

$$p_{v1} = l\sigma_1, \quad p_{v2} = m\sigma_2, \quad p_{v3} = n\sigma_3 \quad (1-20)$$

总应力为

$$p_v^2 = p_{v1}^2 + p_{v2}^2 + p_{v3}^2 = l^2 \sigma_1^2 + m^2 \sigma_2^2 + n^2 \sigma_3^2 = \sigma_v^2 + \tau_v^2 \quad (1-21)$$

根据式(1-19), (1-21)以及式(1-14),即

$$\begin{aligned} l^2 \sigma_1 + m^2 \sigma_2 + n^2 \sigma_3 &= \sigma_v \\ l^2 \sigma_1^2 + m^2 \sigma_2^2 + n^2 \sigma_3^2 &= \sigma_v^2 + \tau_v^2 \\ l^2 + m^2 + n^2 &= 1 \end{aligned}$$

可以求出 σ_v, τ_v 以及用 σ_1, σ_2 和 σ_3 表示的 l^2, m^2 和 n^2 , 其表达式为

$$\left. \begin{aligned} l^2 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\tau_v^2 + (\sigma_v - \sigma_2)(\sigma_v - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \\ m^2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\tau_v^2 + (\sigma_v - \sigma_3)(\sigma_v - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \\ n^2 &= \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\tau_v^2 + (\sigma_v - \sigma_1)(\sigma_v - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \end{aligned} \right\} \quad (1-22)$$

在上式中

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \Delta_1 &= \begin{vmatrix} \sigma_v & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_v^2 + \tau_v^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_v & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_v^2 + \tau_v^2 & \sigma_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \Delta_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_v \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_v^2 + \tau_v^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

在式(1-22)中, 设 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, 由 l^2, m^2 和 n^2 永远是正值, 所以式

(1-22)中右端的分子和分母应有相同的正、负号。例如在 m^2 的表达式中,由于分母是负数,所以分子也应当是负数,即

$$(\sigma_v - \sigma_1)(\sigma_v - \sigma_3) + \tau_v^2 \leq 0$$

上式又可写成

$$\left(\sigma_v - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau_v^2 \leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 \quad (1-23)$$

在 σ_v, τ_v 的坐标中,式(1-23)取等号后,则表示一个圆的方程式,其半径为 $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$,圆心在 σ 轴上距原点距离为 $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$,此式表示正应力和剪应力应当在以 $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ 为半径的圆所围绕的区域之内。

用同样的方法,由 l^2 和 n^2 的表达式中,可得

$$\begin{aligned} \left(\sigma_v - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau_v^2 &\geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \\ \left(\sigma_v - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau_v^2 &\geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

上式表示在 σ_v 和 τ_v 的坐标中, σ_v 和 τ_v 应当在以 $(\sigma_1 - \sigma_2)/2$ 和 $(\sigma_2 - \sigma_3)/2$ 为半径的两个圆所围绕的区域之外,如图 1-7 所示。

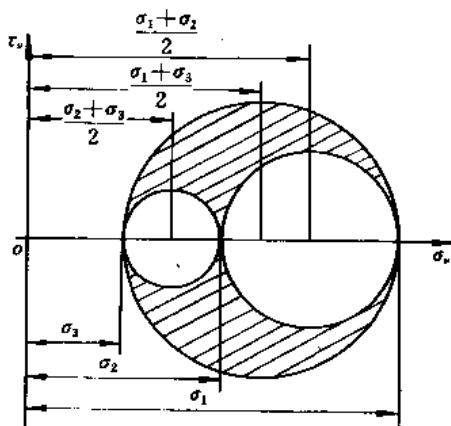


图 1-7 三维应力莫尔圆