读考研书 找人大社

2010 人大考研

2010年考研

数学

经典冲刺5套卷（数学三）

主编 黄先开 曹显兵

• 权威名师精选精编 • 最后模拟冲刺必备

紧扣大纲要求 设计科学合理

难易程度适当 题目全部精解

中国人民大学出版社

2010年考研数学经典冲刺5套卷

(数学三)

▶主 编 黄先开 曹显兵

2010

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

2010年考研数学经典冲刺5套卷．数学三/黄先开，曹显兵主编．3版
北京：中国人民大学出版社，2009
ISBN 978-7-300-08713-9

Ⅰ．2…
Ⅱ．①黄… ②曹…
Ⅲ．高等数学-研究生-入学考试-习题
Ⅳ．O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第197966号

2010年考研数学经典冲刺5套卷（数学三）
主编　黄先开　曹显兵

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	邮政编码	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.1kao.com.cn(中国1考网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京鑫霸印务有限公司	版　　次	2007年11月第1版
规　　格	185 mm×260 mm　16开本		2009年11月第3版
印　　张	5.5	印　　次	2009年11月第1次印刷
字　　数	118 000	定　　价	10.00元

前　言

考研数学复习一般可分为三个阶段：基础复习——全面、系统复习——综合提高复习。在临考前的一段时间，是综合提高的冲刺阶段，通过对几套设计科学合理、紧扣大纲要求、难易程度适当、知识覆盖面广且能够切中命题趋势的全真模拟试题进行全面演练，达到查漏补缺、反思问题和总结规律的目的，是有效实现综合提高的重要途径。

能否做到这一点，关键是看模拟试题的质量。如果大都是陈题、旧题，或已考过、已做过的类似试题，往往会造成一种错觉，模拟成绩很理想，但实际状态并不是这么回事，不能真实反映自己的水平，因为存在的问题并没有通过演练得以发现，规律性的东西也没有通过演练进行总结。考研数学要取得理想的成绩，在复习的最后阶段做题是必要的。试题不在多而在于精，在于是否严格按照考试大纲的命题原则要求以及最新的命题趋势优选、设计题型，在于难度、信度是否完全符合考试规范要求。

本书作者在多年教学和考研辅导的基础上，通过对考研数学的命题原则和命题趋势的反复研究与分析，查阅了大量的相关教材、教学辅导资料，包括全国各级各类数学竞赛和众多高等院校数学竞赛试卷，再通过逐题推敲、优中选优和精心设计，命制了五套高质量的全真模拟冲刺试卷。“题型新颖、突出仿真、注重实效”是本书的特点。选择的试题尽量确保是考生平时练习时较少见到或没有做过的，部分试题是作者根据最新命题趋势自己设计的，重在对基本概念掌握情况的考查和计算能力、综合分析问题与解决问题能力的培养。相信通过使用本套冲刺试卷，考生可最大限度地实现梳理知识、查找漏洞、提高应试能力的愿望。

温馨提示：建议考生按如下要求使用本套冲刺试卷：

1. 在规定的 3 个小时内连续做完一套试题；

2. 一定要避免边做题边翻看答案；

3. 做完一套试题后，约上几个同学一起对答案，共同分析出现差错的原因，比如说，是计算问题、概念问题、方法问题、隐含条件问题还是做题技巧问题等等，并注意下次做题时逐步改进或避免；

4. 将错题全部汇总起来，在五套模拟测试完成后重新做一遍；

5. 最后再进行一次总结。

好的模拟冲刺试卷将助您在硝烟弥漫、强手如云的考研战场上大显身手。衷心祝愿考生朋友在 2010 年研究生入学考试中取得优异成绩！

编者

2009 年 11 月

目　录

全国硕士研究生入学统一考试数学三　经典冲刺试卷一 ………………………………………… 1
全国硕士研究生入学统一考试数学三　经典冲刺试卷二 ………………………………………… 7
全国硕士研究生入学统一考试数学三　经典冲刺试卷三 ……………………………………… 13
全国硕士研究生入学统一考试数学三　经典冲刺试卷四 ……………………………………… 19
全国硕士研究生入学统一考试数学三　经典冲刺试卷五 ……………………………………… 25
全国硕士研究生入学统一考试数学三　经典冲刺试卷一参考答案 ………………………… 32
全国硕士研究生入学统一考试数学三　经典冲刺试卷二参考答案 ………………………… 40
全国硕士研究生入学统一考试数学三　经典冲刺试卷三参考答案 ………………………… 51
全国硕士研究生入学统一考试数学三　经典冲刺试卷四参考答案 ………………………… 60
全国硕士研究生入学统一考试数学三　经典冲刺试卷五参考答案 ………………………… 70

绝密★启用前

全国硕士研究生入学统一考试

数学三　经典冲刺试卷一

考生注意:(1) 本试卷共 23 道题,满分 150 分.

(2) 根据国家标准,试卷中的正切函数、余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 $\tan x$、$\cot x$、$\arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 表示.

得分	评卷人

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分,每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.

(1) 以下命题正确的是

(A) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{|x|}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$.　　(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{|x|}\arctan\dfrac{1}{|x|}=\dfrac{\pi}{2}$.

(C) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin|x|}{x}\arctan\dfrac{1}{|x|}=\dfrac{\pi}{2}$.　　(D) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin|x|}{|x|}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$.　　【A】

(2) 函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在点 $(0,0)$ 处

$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$

(A) 连续,但偏导数不存在.　　(B) 偏导数存在,但不可微.

(C) 可微. $\Leftarrow f_x'(x,y),\ f_y'(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续　　(D) 偏导数存在且可微.　　【B】

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \dfrac{\Delta z - f_x'(x_0,y_0)\Delta x - f_y'(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \overset{?}{=} 0$

(3) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{\lambda}\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}$($\lambda$ 为常数)

(A) 发散.　　(B) 条件收敛.

(C) 绝对收敛.　　(D) 收敛性与 λ 有关.　　【D】

(4) 已知 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处连续,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{\ln(1+x)}=-1$,则

$f'(0)=0$.

$f''(0)=-1<0$.

(A) $f(0)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值.

(B) $f(0)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值.

(C) $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值,$(0,f(0))$ 也非曲线 $y=f(x)$ 的拐点.　　【B】

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 矩阵,则方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$ 同解的充分条件是

(A) $r(\boldsymbol{A})=n$.　　(B) $r(\boldsymbol{A})=m$.

(C) $r(\boldsymbol{B})=n$.　　(D) $r(\boldsymbol{B})=s$.　　【A】

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶矩阵,若 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,-1,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的三个解,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则下列各命题中不正确的是

(A) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^*|=0$.

(B) $r(\boldsymbol{A}^*)=0$.

$A^*=|A|A^{-1}$

$r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1 \\ 0, & r(A)<n-1 \end{cases}$

$r(A)<n-1$

(C) $A^{*}x=0$ 与 $Ax=0$ 的基础解系所含解向量的个数相等. X

(D) 任一非零向量均为 A^{*} 的特征向量. ✓ 【 C 】

(7) 将一枚均匀的硬币接连抛2次,以 A 表示事件"正面最多出现一次",以 B 表示事件"正面和反面各至少出现一次",则

(A) $A\subset B$.　　(B) A 与 B 互不相容.

(C) A 与 B 相互独立.　　(D) A 与 B 不独立. 【 ~~A~~ 】 D

(8) 设随机变量 X 和 Y 相互独立且均服从下列分布:$\begin{pmatrix}-1, & 1\\ 1-p, & p\end{pmatrix}$,$0<p<1$,则下列随机变量中服从二项分布的是

(A) $X+Y$.　　(B) $X-Y$.

(C) $\dfrac{X+Y}{2}+1$.　　(D) $\dfrac{X-Y}{2}-1$. 【 C 】

得分	评卷人

二、填空题:9～14小题,每小题4分,共24分,把答案填在题中横线上.

(9) 设函数 $f(x)=(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)\cdots(x+100)$,则 $f'(1)=$ ~~$\boxed{100!}$~~ $-\dfrac{101!}{100}$

(10) 已知 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某个邻域内可展成泰勒级数,且 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n^{2}}(n=1,2,\cdots)$,则 $f''(0)=$ 2.

(11) 设 $f(x),g(x)$ 为连续函数,$F(x,y)=\int_{1}^{x}\mathrm{d}u\int_{0}^{yu}f(tu)g\left(\dfrac{1}{u}\right)\mathrm{d}t$,则 $\dfrac{\partial^{2}F}{\partial x\partial y}=$ $xg\left(\frac{1}{x}\right)f(x^2y)$

先对Y求偏导.

(12) 记 $I_{1}=\iint\limits_{x^{2}+y^{2}\leqslant 1}|xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$I_{2}=\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}|xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$I_{3}=\iint\limits_{x^{2}+y^{2}\leqslant 1}|xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,则 I_{1},I_{2},I_{3} 的大小关系是 $I_2<I_1<I_3$.

(13) 已知 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{11}+a_{12}+a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{21}+a_{22}+a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{31}+a_{32}+a_{33}\end{bmatrix}$,且 $|A|=-2$,则 $B^{*}A=$ $-2\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

(14) 设随机变量 X 服从二项分布 $B(n,p)$,则随机变量 $Y=n-X$ 所服从的分布为 $B(n,1-p)$

三、解答题:15～23小题,共94分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(15)(本题满分10分)

设 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内连续,$f(x)>0$,且

$$[f(x)]^{2}=\int_{0}^{x}f(t)\frac{\tan t}{\sqrt{1+2\tan^{2}t}}\mathrm{d}t,$$

求 $f(x)$ 的函数表达式.

令 $\tan x=t$

$x=\arctan t$

$f(x)=\int\frac{\tan x}{2\sqrt{1+2\tan^2 x}}dx+C$.

$=$

解:∵ $f(x)>0$ 且在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 内可导

∴ $2f(x)\cdot f'(x)=f(x)\dfrac{\tan x}{\sqrt{1+2\tan^2x}}$.

$2f'(x)=\dfrac{\tan x}{\ldots}$

得分	评卷人

(16)(本题满分 10 分)

设 $f(x)=\begin{cases} e^x+x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x>0, \\ x+1, & x\leqslant 0, \end{cases}$ $g(x)=x+x^2$, $\varphi(x)=f(x)g(x)$. 试求 $\varphi''(0)$.

解: $\varphi'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$

$=(x+x^2)f'(x)+(1+2x)f(x)$

$=(x+x^2)f'(x)+f(x)+2xf(x)$

$\varphi''(x)=(1+2x)f'(x)+f''(x)(x+x^2)+f'(x)+2f(x)+2f'(x)\cdot x$

$\varphi''(0)=f'(x)+f'(x)+2f(0)=2f'(0)+2f(0)$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}e^x+x^3\sin\frac{1}{x}$

$=1$

$\lim\limits_{x\to0^-}(x+1)=1$

$\therefore f(0)=1$

$f'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x+x^3\sin\frac{1}{x}-1}{x-0}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x+x^3\sin\frac{1}{x}}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x+1-1}{x}=1$

$\therefore \varphi''(0)=2f'(0)+2f(0)=4$

得分	评卷人

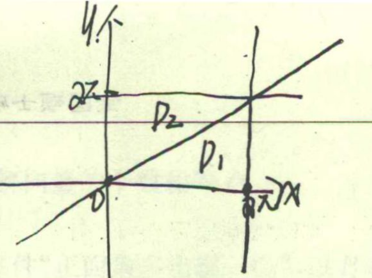
(17)(本题满分 10 分)

计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\ln(2-\cos x)-3[(1+\sin^2x)^{\frac{1}{3}}-1]}{[x\ln(1+x)]^2}$.

解: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\ln(1+1-\cos x)-3[\sqrt[3]{1+\sin^2x}-1]}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{2\sin x}{2-\cos x}-\sin 2x(1+\sin^2x)^{-\frac{2}{3}}}{4x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}$



得分	评卷人

(18)(本题满分10分)

计算 $\iint\limits_D |\sin(y-x)|\,dxdy$,其中 $D: 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 2\pi$.

$D_1: y\le x\le 2\pi,\ 0\le y\le 2\pi$

$D_2: x\le y\le 2\pi,\ 0\le x\le 2\pi$

解: $\iint\limits_D |\sin(y-x)|\,dxdy$

$=\int_0^{2\pi}dx\int_x^{2\pi}\sin(y-x)\,dy-\int_0^{2\pi}dy\int_y^{2\pi}\sin(x-y)\,dx$

$=\int_0^{2\pi}\left[-\cos(y-x)\Big|_x^{2\pi}\right]dx+\int_0^{2\pi}\left(\cos(x-y)\Big|_y^{2\pi}\right)dy$

$=\int_0^{2\pi}-\cos(2\pi-x)+\cos(0)\,dx$

$=\int_0^{2\pi}(1-\cos x)\,dx+\int_0^{2\pi}[\cos(2\pi-y)-1]\,dy=4\pi$

得分	评卷人

(19)(本题满分10分)

已知 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,而 $F(x)$ 是微分方程 $xy'+y=e^x$ 满足初始条件 $\lim\limits_{x\to0}y(x)=1$ 的解,试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数,并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$ 的值.

解: $\frac{x\,dy}{dx}+y=e^x$

$y'+\frac{y}{x}=\frac{e^x}{x}$

$y(x)=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int\frac{e^x}{x}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]$

$=\frac{1}{x}(e^x+C)$. $\lim\limits_{x\to0}y(x)=1$ ∴ $C=-1$

∴ $y(x)=\frac{1}{x}(e^x-1)$.

$F(x)=y(x)=\frac{1}{x}(e^x-1)$.

$f(x)=\frac{1}{x}e^x-\frac{1}{x^2}(e^x-1)$

$=$

得分	评卷人

(20)(本题满分11分)

已知 4×3 矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$,其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为4维列向量,若非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $(1,2,-1)^T+k(1,-2,3)^T$,令 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_3]$,试求 $\boldsymbol{By}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 的通解.

$r(A)=3$.

解: 根据题意可知

$\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0$. ①

$\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3=\beta$ ②

$2\alpha_1+2\alpha_3=\beta$ $\quad -4\alpha_2+4\alpha_3=\beta$

$B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,2\alpha_1+3\alpha_3)$

$2\alpha_1+2\alpha_3=-4\alpha_2+4\alpha_3$.

$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} X = 0.$

对应的特征向量为 $X_1 = (1, 1, 0)^T$

当 $\lambda_3 = 8$ 时 $(8E - A)X = 0$ $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

得分	评卷人

(21)(本题满分 11 分)

$\alpha =$

已知 $\lambda = 2$ 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & a \\ 2 & a & a+2 \end{bmatrix}$ 的二重特征值，求 a 的值，并求正交矩阵 Q 使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵.

解：$|\lambda E - A| = 0$ $|2E - A| = 0.$ $\begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -a \\ -2 & -a & a \end{vmatrix} = 0.$ $\begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2-a \\ 0 & 2-a & 2+a \end{vmatrix} = 0$

$(2-a)^2 = 0$ $\therefore a = 2.$

$\therefore A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $4+4+4 = 4 + \lambda_3$

$12 = 4 + \lambda_3$ $\therefore \lambda_3 = 8.$

$\therefore A$ 的特征值为 4, 4, 8.

$EX = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ $EY = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$

$P\{X=1, Y=1\} = P\{U > -1\} P\{V > \frac{1}{2}\}$

(Ⅲ) $\mathrm{cov}(X,Y) = EXY - EX \cdot E(Y)$

$= \int_{-1}^{2} \frac{1}{4} du \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{2} dv = \frac{3}{16}$

得分	评卷人

$= \left(\frac{3}{16} - \frac{1}{16} - \frac{9}{16} + \frac{3}{16}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$

(22)(本题满分 11 分)

$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0.$

设 (U, V) 在以点 $(-2, 0)$，$(2, 0)$，$(0, 1)$，$(0, -1)$ 为顶点的四边形上服从均匀分布，令

$$X = \begin{cases} -1, & U \leqslant -1, \\ 1, & U > -1; \end{cases} \quad Y = \begin{cases} -1, & V \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1, & V > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$P\{X=-1, Y=-1\} = P\{U \le -1, V \le \frac{1}{2}\}$

$= P\{U \le -1\} P\{V \le \frac{1}{2}\}$

(Ⅰ) 求 U 与 V 的边缘密度；

(Ⅱ) 求 X 与 Y 的联合分布律；

(Ⅲ) 求 X 与 Y 的协方差.

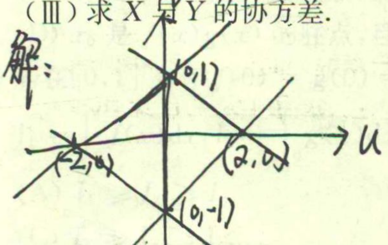
$= \int_{-2}^{-1} \frac{1}{4} du \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} dv$

$= \frac{3}{16}$

(Ⅱ).

X \ Y	-1	1
-1	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{16}$

(Ⅰ). 解：



$P\{X=-1, Y=1\} = P\{U \le -1\} P\{V > \frac{1}{2}\}$

$= \frac{1}{4} \times \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{2} dv$

$f(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & -2 \le u \le 2, -1 \le v \le 1 \\ 0, & 其他. \end{cases}$

$= \frac{1}{16}$

$P\{X=1, Y=-1\} = P\{U > -1\} P\{V \le \frac{1}{2}\}$

$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v) dv = \int_{-1}^{1} \frac{1}{8} dv = \frac{1}{4}$

$= \int_{-1}^{2} \frac{1}{4} du \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} dv$

$f_V(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v) du = \int_{-2}^{2} \frac{1}{8} du = \frac{1}{2}$

$= \frac{9}{16}$

$f(u,v) = f_U(u) \cdot f_V(v)$ $\therefore U, V$ 相互独立

得分	评卷人

(23)（本题满分 11 分） $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n,X_{n+1}$ 是来自总体 X 的一个样本，且 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$(S^*)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，试求统计量 $\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{S^*}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$ 的分布.

绝密★启用前

全国硕士研究生入学统一考试

数学三　经典冲刺试卷二

考生注意：(1) 本试卷共 23 道题，满分 150 分.

(2) 根据国家标准，试卷中的正切函数、余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 $\tan x$、$\cot x$、$\arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 表示.

得分	评卷人

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

(1) 设曲线 $y=f(x)$ 在原点处与 $y=\sin x$ 相切，a,b 为常数，且 $ab\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(ax)+f(bx)}{\sin x}$ 等于

(A) $a+b$.　(B) $a-b$.　(C) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.　(D) $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}$.　【　】

(2) 设 $F(x)=\int_a^b f(y)\mid x-y\mid \mathrm{d}y, a\leqslant x\leqslant b, f(y)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $F''(x)$ 等于

(A) $f(x)$.　(B) $2f(x)$.

(C) $x[f(b)-f(a)]$.　(D) $x[f(a)+f(b)]$.　【　】

(3) 设 $f(x),g(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f(x_0)=g(x_0)=0, f'(x_0)g'(x_0)>0, f''(x_0), g''(x_0)$ 均存在，则

(A) x_0 不是 $f(x)g(x)$ 的驻点.

(B) x_0 是 $f(x)g(x)$ 的驻点，但不是极值点.

(C) x_0 是 $f(x)g(x)$ 的驻点，且是 $f(x)g(x)$ 的极小值点.

(D) x_0 是 $f(x)g(x)$ 的驻点，且是 $f(x)g(x)$ 的极大值点.　【　】

(4) 若在 $[0,1]$ 上有 $f(0)=g(0)=0, f(1)=g(1)=a>0$，且 $f''(x)>0, g''(x)<0$，则 $I_1=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x, I_2=\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x, I_3=\int_0^1 ax\,\mathrm{d}x$ 的大小关系是

(A) $I_1\geqslant I_2\geqslant I_3$.　(B) $I_3\geqslant I_2\geqslant I_1$.

(C) $I_2\geqslant I_3\geqslant I_1$.　(D) $I_2\geqslant I_1\geqslant I_3$.　【　】

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$m\geqslant n$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$，$\boldsymbol{b}$ 为 m 维非零列向量，则非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$

(A) 必有唯一解.　(B) 必定没有解.

(C) 必定没有无穷多解.　(D) (A)、(B)、(C) 均不正确.　【　】

(6) 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为两个 3 维非零列向量，记 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，则 $\lambda=0$

(A) 必是 $\boldsymbol{A}$ 的 1 重特征值.　(B) 必是 $\boldsymbol{A}$ 的 2 重特征值.

(C) 至少是 $\boldsymbol{A}$ 的 2 重特征值.　(D) 至多是 $\boldsymbol{A}$ 的 2 重特征值.　【　】

(7) 设随机变量X的分布函数$F(x)$为严格单调增加的连续函数,Y在区间$[0,1]$上服从均匀分布,$F^{-1}(y)$表示$F(y)$的反函数,则随机变量$Z=F^{-1}(Y)$的分布函数

(A) 有一个间断点.　　(B) 有两个间断点.

(C) 连续但不同于X的分布函数.　　(D) 连续且与X同分布.　　【　】

(8) 设$f(x)=k\mathrm{e}^{-x^2+2x}$为概率密度,则$k$的值为

(A) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-1}$.　　(B) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.　　(C) $\frac{1}{2}$.　　(D) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.　　【　】

得分	评卷人

二、填空题: 9～14小题,每小题4分,共24分,把答案填在题中横线上.

3. (9) 已知$g(x)$是微分方程$g'(x)+\sin x\cdot g(x)=\cos x$满足初始条件$g(0)=0$的解,则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=$________.

(10) 设$f(x)$连续,且当$x\to 0$时,$F(x)=\int_0^x(x^2+1-\cos t)f(t)\mathrm{d}t$是与$x^3$等价的无穷小量,则$f(0)=$________.

4. (11) 设$y=1,y=\mathrm{e}^x,y=2\mathrm{e}^x,y=\mathrm{e}^x+\frac{1}{\pi}$都是某二阶常系数线性微分方程的解,则此二阶常系数线性微分方程为________.

(12) 设$f(x,y)$连续,且$f(x,y)=\mathrm{e}^{x^2+y^2}+xy\iint\limits_D xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D$为区域:$0\leqslant x\leqslant 1$,$0\leqslant y\leqslant 1$,则$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=$________.

5 (13) 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关,则向量组$2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,$2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$的秩为________.

(14) 设随机变量X与Y相互独立,且$D(X)=D(Y)=2,E(X)=E(Y)=1$,则$D(XY)=$________.

三、解答题: 15～23小题,共94分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(15)(本题满分10分)

(Ⅰ)对于曲线$y=f(x)$,试在横坐标a与$a+h$之间找一点ξ,使在这点两边阴影部分面积相等(如图1).

(Ⅱ)在(Ⅰ)中设曲线为$y=\mathrm{e}^x$,记$\xi=a+\theta h$,其余如(Ⅰ)所述,求θ,并计算$\lim\limits_{h\to 0}\theta$.

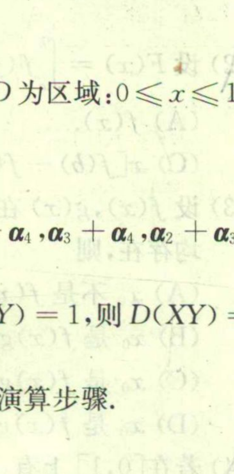


图1

得分	评卷人

(16)(本题满分 10 分)

设 $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x<0,\\ 1+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 求 $\int_0^x f[f(x)]\mathrm{d}x$ 及 $\int_{-2}^1 f[f(x)]\mathrm{d}x$.

解: $f[f(x)]=\begin{cases}1-(1-x^2)^2, & 1-x^2<0\\ 1-(1+x)^2, & 1+x<0\\ 1+1+x, & 1+x\geqslant 0\\ 1+1-x^2 & 1-x^2\geqslant 0\end{cases}$

$=\begin{cases}x^2, & x>1\text{或}x<-1\\ -x^2 & x<-1\\ 2+x & x\geqslant -1\\ 2-x^2 & -1\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$

$\int_0^x f[f(x)]\,dx$

$=\int_0^x(2-t^2)\,dt+\int_1$

得分	评卷人

(17)(本题满分 10 分)

求微分方程 $y''+y=f(x)$ 满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=1$ 的特解,其中连续函数 $f(x)$ 满足条件 $\sin x-f(x)=\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t$.

解: 令 $x-t=u$. $-\int_x^0(x-u)f(u)\,du=\int_0^x(x-u)f(u)\,du$.

$\therefore \sin x-f(x)=x\int_0^x f(u)\,du-\int_0^x uf(u)\,du$.

$\because f(x)$ 是连续函数, 且满足上式

$\therefore \cos x-f'(x)=\int_0^x f(u)\,du+xf(x)-\cancel{xf(x)}$

$\therefore -\sin x-f''(x)=f(x)$

$f''(x)+f(x)+\sin x=0.$ $f''(x)+f(x)=-\sin x$ 且 $f(0)=0$ $f'(0)=1$

$\lambda^2+1=0$ $\lambda=\pm i$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}(x\cos x+\sin x)$

$y''+y=\frac{1}{2}(x\cos x+\sin x)$ $y^*=C_1$

得分	评卷人

(18)(本题满分10分)

设$D:2x\leqslant x^2+y^2,0\leqslant y\leqslant x\leqslant 2$,求$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

得分	评卷人

6.

(19)(本题满分10分)

设$u_0=0,u_1=1,u_{n+1}=au_n+bu_{n-1}(n=1,2,\cdots)$,其中$a$、$b$为常数,又设$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{u_n}{n!}x^n$.

(Ⅰ)试导出$f(x)$满足的微分方程;

(Ⅱ)证明:$f(x)=-\mathrm{e}^{ax}f(-x)$.

得分	评卷人

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 可逆，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵.

(Ⅰ) 证明：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$.

(Ⅱ) 证明：$\boldsymbol{A}^{2}=\boldsymbol{A}$.

(Ⅲ) 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r<n$，且 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，求行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

(Ⅱ) $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}3&&\\&3&\\&&2\end{pmatrix}$

$\therefore A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&&\\&3&\\&&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}&&\\&&\end{pmatrix}$

得分	评卷人

7.(21)(本题满分 11 分)

∴什么不好=

A：实对称阵，不同特征值特征向量相互正交。

已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right|=0$，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-3\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$，其中

$(3E-A)B=0$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&4\\1&1&2\end{bmatrix}.$$

(Ⅰ) 用正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化二次型为标准形，并写出所用正交变换及所得标准形；

(Ⅱ) 求出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的具体表达式.

解：$(A-3E)B=0$.　$|B|=0$，$|A-3E|\neq 0$.

$|\frac{1}{2}A-E|=0$

$|A-2E|=0$.

$|2E-A|=0$　A的特征值为2

$(3E-A)X=0$.

$(3E-A)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}=0$

$r(B)=2$

$r(3E-A)+r(B)\leq 3$.

$r(3E-A)\leq 1$

∴ $r(3E-A)=1$.

∴ $|3E-A|=0$.

∴设A　∴ $\alpha_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$

$\alpha_2=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$

设 $\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$

$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=0\\x_1+x_2+x_3=0\end{cases}\Rightarrow \alpha_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$

∴A的另一个特征值为3，3

不妨设 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

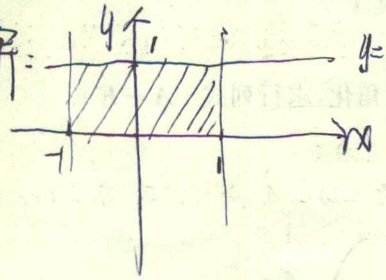
则 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$　∴标准形 $3y_1^2+3y_2^2+2y_3^2$

得分	评卷人

(22)(本题满分11分)

设(X,Y)服从区域$D=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$上的均匀分布.试求$Z=\dfrac{y}{3x}$的概率密度函数.

解:



$S=2\times 1=2$.

$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$Z=\frac{y}{3x}$ $\therefore y=3xz$,

$0\leq y\leq 1$

~~$0\leq 3xz\leq 1$~~

~~$0\leq z\leq \frac{1}{3x}$~~

~~$f_Z(z)=f(x,3xz)=\int_{-1}^{1}dx\int_0^{\frac{1}{3x}}\frac{1}{2}dz$~~

~~$=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3x}\right)d$~~

得分	评卷人

(23)(本题满分11分)

求两种矩估计值

设总体X的密度函数为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-(x-\mu)/\theta}, & x\geqslant\mu,\\ 0, & 其他.\end{cases}$其中$\theta>0,\theta,\mu$为未知参数,$X_1$,$X_2,\cdots,X_n$为取自$X$的样本.试求$\theta,\mu$的最大似然估计量和矩估计量.

解: $E(X)=\int_{\mu}^{+\infty}\frac{x}{\theta}e^{-\frac{(x-\mu)}{\theta}}dx=e^{\frac{\mu}{\theta}}\int_{\mu}^{+\infty}\frac{x}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx$

$=-\theta e^{\frac{\mu}{\theta}}\int_{\mu}^{+\infty}\frac{x}{\theta}\,de^{-\frac{x}{\theta}}$

$=-\theta e^{\frac{\mu}{\theta}}\frac{x}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}\Big|_{\mu}^{+\infty}+\theta e^{\frac{\mu}{\theta}}\int_{\mu}^{+\infty}e^{-\frac{x}{\theta}}\frac{1}{\theta}dx$

$-\theta e^{\frac{\mu}{\theta}}\int_{\mu}^{+\infty}e^{-\frac{x}{\theta}}d\left(-\frac{x}{\theta}\right)$

$=\theta e^{\frac{\mu}{\theta}}\frac{\mu}{\theta}e^{-\frac{\mu}{\theta}}-\theta e^{\frac{\mu}{\theta}}e^{-\frac{x}{\theta}}\Big|_{\mu}^{+\infty}$

$=\mu+\theta e^{\frac{\mu}{\theta}}e^{-\frac{\mu}{\theta}}\triangleq\mu$

$=\mu+\theta$ ②

$E(X^2)=e^{\frac{\mu}{\theta}}\int_{\mu}^{+\infty}\frac{x^2}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx$

$=\mu^2+2\theta E(X)$

$=\mu^2+2\theta(\mu+\theta)=2\theta^2+\mu^2+2\mu\theta$ ①

$\hat{\mu}=\sum_{i=1}^{n}X_i-\sqrt{\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2}$

$\mu+\theta=\sum_{i=1}^{n}X_i$ ①

$\hat{\theta}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2}$

$2\theta^2+\mu^2+2\mu\theta=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ ②

②$-$①^2 $=\theta^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2$