高等学校数学学习辅导教材

线性代数
复变函数
概率统计
习题全解

陈小柱 张立卫 编著

（同济二版·西安交大四版·浙大二版）

大连理工大学出版社

高等学校数学学习辅导教材

线性代数·复变函数
概率统计习题全解

（同济二版·西安交大四版·浙大二版）

陈小柱　张立卫　编著
冯士英　聂续昀　主审

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数·复变函数·概率统计习题全解/陈小柱，张立卫编著.—大连：大连理工大学出版社，1999.8 (2001.10 重印)

(高等学校数学辅导教材)

ISBN 7-5611-1677-2

Ⅰ.线… Ⅱ.①陈… ②张… Ⅲ.高等数学-高等学校-习题 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(99)第 35616 号

大连理工大学出版社出版发行

大连市凌水河　邮政编码　116024

电话：0411-4708842　　传真：0411-4701466

E-mail：dutp@mail.dlptt.ln.cn

URL：http://www.dutp.com.cn

大连业发印刷有限公司印刷

开本：850 毫米×1168 毫米 1/32　字数：453 千字　印张：12.625

印数：88001—98000 册

1998 年 8 月第 1 版　　2001 年 10 月第 10 次印刷

责任编辑：刘　杰　　责任校对：习　文

封面设计：孙宝福

定价：15.00 元

卷首赠言

知识是引导人生到达
光明与真实境界的光烛。

——李大钊(1889—1927)

(在燕园李大钊教授铜像前,仿佛能听到他穿越时光的声音)

高年级大学生、研究生以及青年教师,经过努力可以胜过老师,而且应该鼓励他们尽早胜过老师。

——江泽涵(1902—1994)

(摘自《中国科学院院士自述》)

前　言

当人类即将迈入2000年之际，世界对各类人才的需求正在发生着深刻的变化。作为人才培养基地的高校，正在探索着培育人才的新模式，以适应客观世界的需求。

相比于十多年前的学生，当今及未来的学生需投入更多的时间、精力来学习外语及计算机。而这对大学数学课的教与学均提出了前所未有的挑战。

当大学数学的课时被迫削减之后，教师有了"教材内容无法完全展开讲授"之苦；而学生在有限的精力被分割后，学习大学数学常常会发生"食而不化"的现象。考研及后续专业课，对大学数学的学习又有较高的要求。

由于大学数学早已渗透到现代科学的各个学科，未来的新兴学科仍需借助数学工具进行表述。未来社会所需要的一大批通才、栋梁之才，非有扎实的数学功底不可。

正是为了化解这一矛盾，我们编写了这本具有工具书性质的《线性代数·复变函数·概率统计习题全解》，以期学生通过大学期间**不间断地反复自学**来弥补不足，打牢数学底子。因此，理工科大学一年、二年、三年、四年，必要时，甚至以后的学习阶段，均宜备有此书，以便自学查阅。

全书共三部分,分别与下列教材相配套:同济二版《线性代数》,西安交大四版《复变函数》及浙大二版《概率论与数理统计》,全部习题均有详细的解答。

书中在每章之首,均缀有一篇导学。初学者在看书时,常常"只见树木,不见森林",而"导学"侧重于帮您透视脉络,从细节的认识升华到全盘的认识。本书是已多次再版的《高等数学习题全解》的姊妹篇,并与即将出版的《考研数学真题全解及考点分析》相呼应,形成系统的知识体系。

本书由冯士英教授、聂续昀副教授担任主审,蔡颖同志也提出了宝贵的意见。

限于编者水平,加之时间仓促,不妥之处一定存在,恳请广大读者提出批评和指正!

编　者

1999 年 7 月

目　录

卷首赠言
前　言

第一部分
线性代数习题全解及导学(同济二版)

第一章　n 阶行列式 …………………………………………… (3)
第二章　矩阵及其运算 ………………………………………… (21)
第三章　向量组的线性相关性与矩阵的秩 …………………… (40)
第四章　线性方程组 …………………………………………… (57)
第五章　相似矩阵及二次型 …………………………………… (68)
*第六章　线性空间与线性变换 ……………………………… (84)

第二部分
复变函数习题全解及导学(西安交大四版)

第一章　复数与复变函数 ……………………………………… (95)
第二章　解析函数……………………………………………… (110)
第三章　复变函数的积分……………………………………… (129)

第四章　级数…………………………………………………………（160）
第五章　留数…………………………………………………………（187）
第六章　共形照射……………………………………………………（215）

第三部分
概率统计习题全解及导学（浙大二版）

第一章　概率论的基本概念…………………………………………（247）
第二章　随机变量及其分布…………………………………………（260）
第三章　多维随机变量及其分布……………………………………（275）
第四章　随机变量的数字特征………………………………………（293）
第五章　大数定理及中心极限定理…………………………………（311）
第六章　样本及抽样分布……………………………………………（316）
第七章　参数估计……………………………………………………（321）
第八章　假设检验……………………………………………………（343）
第九章　方差分析及回归分析………………………………………（361）
第十章　随机过程的基本知识………………………………………（373）
第十一章　马尔可夫链………………………………………………（379）
第十二章　平稳随机过程……………………………………………（386）

第一部分

线性代数习题全解及导学

（与同济二版《线性代数》相配套）

如果不想在世界上虚度一生，

那么就要学习一辈子。

——高尔基

第一章　n 阶行列式

真理往往朴素，以致人们不相信它。

——列瓦尔特

导　学

本章的 §2 构成 §1，§2 和 §3 的核心：行列式的定义 $D=\sum(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$。§1 主要是会算 $t=?$。§3 中指出 D 也可定义为 $\sum(-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$。

§4，§5 和 §6 的关键为降阶公式：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=D\delta_{ij}=\begin{cases}D,\text{当 } i=j\\ 0,\text{当 } i\neq j\end{cases}$$

它既是算 D 的工具，又能推导出 §6 的克莱姆法则。对于 §4 中的性质宜相当熟练地掌握。

不要记反了记号：c_i+kc_j 和 r_i+kr_j 的含义。此记号在第三章 §6 以后不断用到。

考研中曾考过的范德蒙行列式在第五章 §2 被用到，它的证明思路要会用。

化为三角形计算行列式时，把元素 1 调到 a_{11} 位置，可避免分数计算；当某一行（或列）有许多 0 时，应该立即想到降阶展开公式。

读者自己摸索出的经验越多，解题时就会越有办法。

习题全解

1. 按自然数从小到大的标准次序,求下列各排列的逆序数:

(1)1　2　3　4;　　(2)4　1　3　2;

(3)3　4　2　1;　　(4)2　4　1　3;

(5)1　3　…　$(2n-1)$　2　4…$(2n)$;

(6)1　3　…$(2n-1)(2n)(2n-2)$…2

解

(1) 逆序数为 0

(2) 逆序数为 4:4　1,　4　3,　4　2,　3　2

(3) 逆序数为 5:3　2,　3　1,　4　2,　4　1,　2　1

(4) 逆序数为 3:2　1,　4　1,　4　3

(5) 逆序数为$\dfrac{n(n-1)}{2}$:

3　2　　1 个

5　2,5　4　　2 个

7　2,7　4,7　6　　3 个

………………　　…

$(2n-1)2,(2n-1)4,(2n-1)6,\cdots,(2n-1)(2n-2)$　　$(n-1)$ 个

(6) 逆序数为 $n(n-1)$:

3　2　　1 个

5　2,5　4　　2 个

……………　　…

$(2n-1)2,(2n-1)4,\cdots,(2n-1)(2n-2)$　　$(n-1)$ 个

4　2　　1 个

6　2,6　4　　2 个

……………　　…

$(2n)2,(2n)4,\cdots,(2n)(2n-2)$　　$(n-1)$ 个

2. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项。

解　由定义知,四阶行列式的一般项为

$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$,其中 t 为 $p_1p_2p_3p_4$ 的逆序数。由于 $p_1=1,p_2=3$ 已

固定，$p_1p_2p_3p_4$ 只能形如 13□□，即 1324 或 1342。对应的 t 分别为

$$0+0+1+0=1 \text{或} 0+0+0+2=2$$

$\therefore -a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 和 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ 为所求。

3. 计算下列各行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$；(3) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & ef \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$

解

(1) $$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-7c_3]{c_2-c_3} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 3 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -1 & -10 \\ 1 & 2 & 2 \\ 10 & 3 & -14 \end{vmatrix} \times (-1)^{4+3} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 10 & 3 & 14 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_1+\frac{1}{2}c_3]{c_2+c_3} \begin{vmatrix} 9 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & -2 \\ 17 & 17 & 14 \end{vmatrix} = 0$$

(2) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_4-c_2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_2}\begin{vmatrix}2&1&4&0\\3&-1&2&2\\1&2&3&0\\2&1&4&0\end{vmatrix}\xlongequal{r_4-r_1}\begin{vmatrix}2&1&4&0\\3&-1&2&2\\1&2&3&0\\0&0&0&0\end{vmatrix}=0$$

(3) $$\begin{vmatrix}-ab&ac&ae\\bd&-cd&de\\bf&cf&-ef\end{vmatrix}=adf\begin{vmatrix}-b&c&e\\b&-c&e\\b&c&-e\end{vmatrix}$$

$$=adfbce\begin{vmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{vmatrix}=4abcdef$$

(4) $$\begin{vmatrix}a&1&0&0\\-1&b&1&0\\0&-1&c&1\\0&0&-1&d\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+ar_2}\begin{vmatrix}0&1+ab&a&0\\-1&b&1&0\\0&-1&c&1\\0&0&-1&d\end{vmatrix}$$

$$=(-1)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1+ab&a&0\\-1&c&1\\0&-1&d\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+dc_2}$$

$$\begin{vmatrix}1+ab&a&ad\\-1&c&1+cd\\0&-1&0\end{vmatrix}=(-1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1+ab&ad\\-1&cd\end{vmatrix}$$

$$=abcd+ab+cd+ad+1$$

4. 证明：

(1) $$\begin{vmatrix}a^2&ab&b^2\\2a&a+b&2b\\1&1&1\end{vmatrix}=(a-b)^3;$$

(2) $$\begin{vmatrix}ax+by&ay+bz&az+bx\\ay+bz&az+bx&ax+by\\az+bx&ax+by&ay+bz\end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix}x&y&z\\y&z&x\\z&x&y\end{vmatrix};$$

(3) $$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0;$$

(4) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)$$

$$\cdot(c-d)(a+b+c+d);$$

(5) $$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

证明

(1) 左边 $\xlongequal[c_3 - c_1]{c_2 - c_1} \begin{vmatrix} a^2 & ab-a^2 & b^2-a^2 \\ 2a & b-a & 2b-2a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$$= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} ab-a^2 & b^2-a^2 \\ b-a & 2b-2a \end{vmatrix} = (b-a)(b-a) \begin{vmatrix} a & b+a \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$= (a-b)^3 =$ 右边

(2) 左边 $\xlongequal[\text{分开}]{\text{按第一列}} a \begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$

$$+b\begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} \xlongequal{\text{分别再分}} a^2\begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix}$$

$$+0+0+b^2\begin{vmatrix} y & z & az+bx \\ z & x & ax+by \\ z & y & ay+bz \end{vmatrix} \xlongequal{\text{分别再分}} a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$+b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ z & y & z \end{vmatrix} = a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}(-1)^2$$

$=$ 右边

(3) 左边 $= \begin{vmatrix} a^2 & a^2+(2a+1) & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & b^2+(2b+1) & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & c^2+(2c+1) & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & d^2+(2d+1) & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-c_1}]{c_2-c_1}$

$$\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{分成两项}]{\text{按第二列}} 2\begin{vmatrix} a^2 & a & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & b & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & c & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & d & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a^2 & 1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{第二项}\substack{c_3-4c_2 \\ c_4-9c_2}]{\text{第一项}\substack{c_3-4c_2 \\ c_4-6c_2}} 2\begin{vmatrix} a^2 & a & 4 & 9 \\ b^2 & b & 4 & 9 \\ c^2 & c & 4 & 9 \\ d^2 & d & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a^2 & 1 & 4a & 6a \\ b^2 & 1 & 4b & 6b \\ c^2 & 1 & 4c & 6c \\ d^2 & 1 & 4d & 6d \end{vmatrix} = 0$$

(4) 左边 $=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^4 & b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^4-a^4 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ b^2(b+a) & c^2(c+a) & d^2(d+a) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\times$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+a & c-b & d-b \\ b^2(b-a) & c^2(c+a)-b^2(b+a) & d^2(d+a)-b^2(b+a) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\times$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (c^2+bc+b^2)+a(c+b) & (d^2+ab+b^2)+a(d+b) \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)\times$$

$$(a+b+c+d)$$

(5) 用数学归纳法证明

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}=x^2+a_1x+a_2$，命题成立。

假设对于 $(n-1)$ 阶行列式命题成立，即

$$D_{n-1}=x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x+a_{n-1},$$