高等院校企业管理
干部专修科试用教材

GAODENG YUANXIAO
QIYE GUANLI
GANBU ZHUANXIUKE
SHIYONG JIAOCAI

管理数学

第二分册

概率论与数理统计

同济大学 沈荣芳 主编

机械工业出版社

高等院校企业管理干部专修科试用教材

管 理 数 学

第 二 分 册

概 率 论 与 数 理 统 计

同济大学 沈荣芳 主编

机 械 工 业 出 版 社

《管理数学》全书共分三个分册，本书为第二分册。内容包括集合、排列和组合，概率及其运算，随机变量分布，参数估计和假设检验，方差分析，相关与回归，抽样检验。

本书内容以概率运算和数理统计的原理、应用为主，同时介绍了学习第三分册运筹学部分，以及管理类专业其他有关课程，如经济计量学、系统工程等课程涉及的概率论和数理统计方面的基础知识。全书着重介绍基本概念、运算和应用。为便于读者掌握教材内容，各章都有大量例题和习题，并附有答案。

本书系高等院校企业管理干部专修科试用教材。也可作为管理工程类专业本科生及研究生的教学参考书，还可供工业企业、各级管理机关和研究设计单位的管理人员和技术人员岗位培训及学习参考。

管 理 数 学

第二分册

概率论与数理统计

同济大学 沈荣芳 主编

*

责任编辑：刘同桥

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南里一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

河北省永清县印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16·印张 13 1/2·字数 326 千字

1987年11月北京第一版·1987年11月北京第一次印刷

印数 0,001—7,400·定价：2.30 元

*

统一书号：15033·7119

前　　言

本书是根据机械工业管理工程类专业教材编审委员会1983年4月在杭州会议上讨论通过的《管理数学》教学大纲编写的。本书系高等院校企业管理干部专修科（两年制）试用教材。

全书共分三个分册。

第一分册：解析几何与微积分。内容包括：平面解析几何，空间解析几何，一元函数微积分，多元函数微积分，级数和微分方程初步。

第二分册：概率论与数理统计。内容包括：集合、排列和组合，概率及其运算，随机变量分布，参数估计和假设检验，方差分析，相关与回归，抽样检验。

第三分册：线性代数与运筹学。内容包括：行列式，矩阵，线性方程组，线性规划，目标规划，动态规划，网络计划技术，决策分析，马尔柯夫过程，仿真技术。

三个分册之间具有相对的独立性。

编写本书的目的是希望能用较少的时间，通过本书三个分册的学习，使学生基本上能够掌握管理类专业教学计划中各门课程所涉及的数学内容。书中避免前后脱节和不必要的重复。学生在学习数学内容的同时，也学习一些初步的管理知识。全书授课学时240学时。

本书对有关管理学科中常用的数学知识都作了比较系统的阐述。同时，结合管理类专业的特点，书中着重于讨论问题的基本概念，运算方法和具体应用，避免不必要的数学理论推导。全书除数学的基础部分外，都立足于结合企业管理中的实际问题引出概念。书中也注意引入近代管理科学的新内容。为便于学生掌握教材内容，各章都有大量例题和习题，并附有答案。

本书第一分册第一、二、三、七、八、十一章由同济大学沈荣芳编写；第四、五、六、九、十、十二章由上海工程技术大学叶庆桐、上海工程技术大学蒋仲刚编写；第二分册第一至第六章由华中工学院张建明、同济大学王永安编写；第七至第十二章由同济大学陈炳权编写；第三分册第一至第七章由吉林工业大学郑大本编写；第八至第十四章由同济大学周士富编写。全书由沈荣芳担任主编，上海交通大学黄洁纲担任主审。

本书除供高等院校企业管理干部专修科使用外，也可作为管理工程类专业本科生及研究生的教学参考书，还可供工业企业、各级管理机关和研究设计单位的管理人员和工程技术人员岗位培训及学习参考。

参加本书审稿会的有：黄洁纲、刘同桥、王福楹、何叔俭、朱自强、丁伯金、郁宗隽、吴立煦、黄世玲、刘贤鹏。本书在编写过程中，得到翟立林、王永安、杨道生等同志的指导和协助，在此一并表示衷心感谢。

限于编写水平，书中不妥与错误之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

1986年10月

目　录

第一篇　概　率　论

第二篇 数 理 统 计

第一篇　概　率　论

第一章　集合、排列与组合

集合、排列与组合，都是讨论概率论问题的基础。在这一章里，将介绍有关它们的基本概念和运算，作为学习本书其他部分的准备。

§1-1　集 合 及 其 运 算

集合是数学中的一个重要概念。在本节中，将要讨论集合的意义、集合的表示法、集合之间的关系及运算规则等。

一、集合的概念

在具体讨论集合及其运算之前，要对集合的若干基本概念作一些说明。

（一）**集合**及**元素**　在我们讨论的问题中，由具有某种共同特性的事物所构成的全体，叫做**集合**；构成集合的每个事物叫做集合的**元素**。例如，自然数的全体是集合，每一个自然数是它的一个元素。元素所具有的共同特性是都是一个自然数。这个集合叫做自然数集合。又如，某大学的全体学生构成一个集合，该校的每一个学生都是该集合的一个元素。元素的共同特性是都具有该校的学籍。

在以上的讨论中，必须注意以下两点：

1．在同一个集合中，组成这个集合的所有元素是各不相同的；

2．一个事物是否为某集合的元素，必须能够准确地判定，要末属于该集合，要末不属于该集合，两者必居其一，且只居其一。判定的依据，就是看该事物是否具备集合元素所共有的那种特性。

例如，“8”是自然数集合中的元素，因为它是一个自然数；而 1.5 不是自然数集合的元素，因为它不是自然数。再如，由方程 $x^3-2x^2-x+2=0$ 的根所组成的集合，它的元素的共同特点是满足上述方程。因此“1”是该集合的元素，而“3”则不是该集合的元素。

但是，“许多很大的数”在这里不能构成一个集合，因为无法判定某个数算不算一个“很大的数”，即它们没有明确的共同特性。

常见的集合有：

（1）自然数集合；

（2）实数集合；

（3）平面上点的集合；

（4）奇数集合；

（5）偶数集合；

（6）某工厂的全部产品；

（7）某单位的全体人员，等等。

一般地，用大写字母A、B、C、…表示集合，用小写的字母a、b、c、…表示元素。例如，自然数集合表示为N，实数集合表示为R，平面上点的集合表示为S，某工厂全部产品构成的集合表示为A，某单位全体人员构成的集合表示为B，等等。如果元素a是集合A的一个元素，就说“**a属于A**”记为$a \in A$。如果b不是A的元素，就说**b不属于A**，记为$b \notin A$或者$b \overline{\in} A$。

一个集合，如果它的元素个数是有限的，称为**有限集合**；元素个数有无限多个，称为**无限集合**。上面列举的例子中，（6）、（7）是有限集合，（1）、（2）、（3）、（4）、（5）都是无限集合。

如果需要把集合的元素明确地表示出来，一般有两种方法：**列举法**和**特征法**。

列举法就是把集合的元素列举出来，并用大括号括起来。如自然数集合可写成$N=\{1, 2, \cdots\}$。不大于5的正整数集合可表示为$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$。这种方法的优点是直观、清楚。但有的集合是没有办法把元素列举出来的。例如，“大于5的实数集合”，就没有办法把元素一一都列举出来。

特征法是把集合的元素特征用描述性的短语或算式并加上大括号后表示出来。例如“大于5的实数集合”，可以表示为

$$B=\{x \mid x>5\}$$

再如，一个变量的多项式集合可以表示为

$$C=\{f(x) \mid f(x)\text{是关于}x\text{的多项式}\}$$

上述两种方法都是常用的，下面再举几个例子。

实数集合$R=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}=\{x \mid x\text{为实数}\}$

正偶数集合$E=\{2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots\}$

$=\{2n \mid n\text{为自然数}\}$

正奇数集合$F=\{1, 3, 5, \cdots, (2n-1), \cdots\}$

$=\{2n-1 \mid n\text{为自然数}\}$

$D=\{2, 4, 8, 16\}=\{2^n \mid n=1, 2, 3, 4\}$

$W=\{x \mid 10 \leqslant x<100\}$

$S=\{x \mid x\text{是方程}x^3-3x^2-2x+2\text{的解}\}$

$T=\{(x, y) \mid x+y \geqslant 5\}$

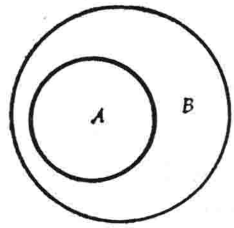

图1-1　A是B的子集

此外，一个集合也可以不包含任何元素，这种集合叫做**空集**，记为Φ或V。必须注意，Φ不是$\{0\}$。$\{0\}$表示只含一个元素“0”的集合，它不是空集。

（二）子集

定义　集合A与B，如果A的所有元素都是B的元素，那末称A为B的**子集**，或者说**B包含A**，记为$A \subset B$或$B \supset A$。图1-1表示A是B的子集。

特殊地，任何集合都可以看作为它本身的子集，即$A \subset A$。空集可以看作是任何集合的子集，即$\Phi \subset A$。如果A是B的子集，但B不是A的子集，就是说，A的元素B全有，但B的元素A不全有，这时称A为B的**真子集**。例如，自然数集合N是实数集合R的真子集。

如果$A\subset B$，且$B\subset A$，那末称A与B**相等**，记为

$$A=B$$

例 1　$A=\{3,5\}$，$B=\{x\mid x^2-8x+15=0\}$，则

$$A=B$$

不难看出，如果$A\subset B$，$B\subset C$，则必有$A\subset C$；如果$A=B$，$B=C$，则必有$A=C$。

二、集合的运算

下面，将讨论有关集合的一些基本的运算。

（一）集合的交　由两个集合A、B的全体公共元素组成的集合，叫做A与B的**交集**，简称A与B的**交**，记为$A\cap B$或AB，即

$$AB=\{x\mid x\in A，且x\in B\}$$

图1-2中的阴影部分表示A与B的交AB。

如果$AB=\Phi$，即A与B没有公共元素，称A与B是**不相交的**。

同样可以定义n个集合A_1、A_2、…、A_n的交集，即这n个集合中的公共元素组成的集合，这时有

$$A_1A_2\cdots A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\{x\mid x\in A_i;\ i=1,2,\cdots,n\}$$

例 2　$A=\{1,2,3,4,5\}$

$B=\{1,3,5,7,9\}$

则　$AB=\{1,3,5\}$

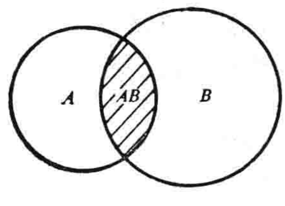

图1-2　A与B的交AB

例 3　设$A=\{1,2,3,4,5,6\}$

$B=\{1,2,3,7,8,9\}$，$C=\{4,5,6,7,8,9\}$

则

$AB=\{1,2,3\}$　　$BC=\{7,8,9\}$

$AC=\{4,5,6\}$　　$ABC=\Phi$

例 4　设$A=\{x\mid x=2n，n是自然数\}$

$B=\{x\mid x=3n，n是自然数\}$

则

$$AB=\{x\mid x=6n，n是自然数\}。$$

例 5　设$A=\{(x,y)\mid x+y\leqslant 5\}$

$B=\{(x,y)\mid x\geqslant 0，y\geqslant 0\}$

则　$AB=\{(x,y)\mid x+y\leqslant 5，x\geqslant 0，y\geqslant 0\}$。

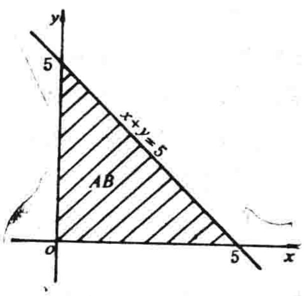

图1-3　例 5 图

图1-3的阴影部分表示AB。

例 6　设A表示某校三、四年级的学生，B表示该校的女同学，那末AB表示该校三、四年级的女同学。

（二）集合的并　由两集合A、B的全部元素所组成的集合，叫做A与B的**并**或者叫做A与B的**和集**，记作$A\cup B$或者$A+B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A或x\in B\}$$

图1-4的阴影部分表示集合A与B的并。

类似地，可以定义n个集合的并，即

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{ x \mid \text{至少存在一个} k, \ 1 \leqslant k \leqslant n, \text{使} x \in A_k \}$$

无限多个集合的并：

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{ x \mid \text{至少存在一个自然数} k, \text{使} x \in A_k \}。$$

例 7 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$、$B = \{3, 4, 5, 6\}$，

则
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \ AB = \{3, 4\}$$

例 8 设 $A = \{x \mid x \geqslant 1\}$，$B = \{x \mid |x| \leqslant 3\}$

则

$$A \cup B = \{x \mid x \geqslant -3\}$$
$$AB = \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$$

例 9 以 A 表示某厂产品中的全部合格品，B 表示全部优质品，那末 $B \subset A$，$BA = B$，$A \cup B = A$。

（三）**差集与补集** 由在 A 中但不在 B 中的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的**差集**，记为 $A - B$。即

$$A - B = \{x \mid x \in A, \text{且} x \overline{\in} B\}$$

图1-5的阴影部分表示 A 与 B 的差集 $A - B$。

例10 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$，$B = \{2, 4, 6, 8\}$

则
$$A - B = \{1, 3\}, \ B - A = \{6, 8\}$$

例11 设 $N = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$，$E = \{2, 4, 6, 8, \cdots\}$

则，N 与 E 的差集

$$B = N - E = \{2k - 1 \mid k \text{为自然数}\} = \{1, 3, 5, \cdots\}$$

在例11中，$BE = \Phi$，$B \cup E = N$。如果在自然数范围内考虑问题，那末 N 是包含了全体元素的集合，叫做**全集**。B 是全集与偶数集合 E 之差，B 叫做 E 的**补集**。同样 E 也是 N 与 B 之差，所以 E 也是 B 的补集，集合 B 与 E 叫做**互为补集**。

一般地，对这里讨论的问题来说，包含了全体元素的集合叫做**全集**，全集通常记为 U。显然，任何集合都是 U 的子集。

设 M 是一个集合，称差集 $U - M$ 为 M 的**补集**，记为 $\overline{M}$。即

$$\overline{M} = U - M = \{x \mid x \overline{\in} M\}$$

显然，M 也是 $\overline{M}$ 的补集，即

$$M = \overline{\overline{M}}$$

图1-6中的阴影部分表示 M 的补集 $\overline{M}$。

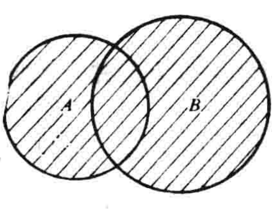

图1-4 A 与 B 的并 $A \cup B$

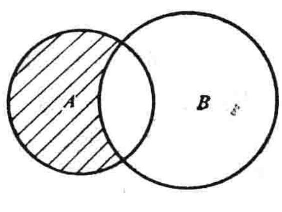

图1-5 A 与 B 的差集 $A - B$

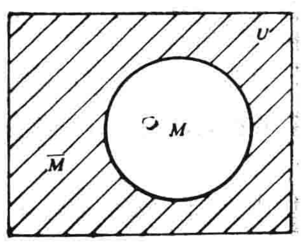

图1-6 M 的补集 $\overline{M}$

两个互补的集合一定是互不相交的，但反之不然，只有两个既互不相交、其并又是全集的集合才是互补的。

例12 设全集$U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,2,3,4\}$，

$B=\{1,3,5\}$，$C=\{3,4,5,6\}$，

则

$$\bar{A}=\{5,6\},\ \bar{B}=\{2,4,6\},\ \bar{C}=\{1,2\}$$

$$AB=\{1,3\},\ \overline{AB}=\{2,4,5,6\}$$

例13 全集U表示某校的全体学生，A表示该校的全体男学生，那末$\bar{A}=U-A$表示全校的女学生。如果考虑的全集U是全校教师和学生，A仍表示该校的全体男学生，那末$\bar{A}=U-A$表示该校的全体教师和女学生。

（四）集合的运算规则 集合的运算规则，有的与数字的运算规则相同，有些则不同，必须注意。

规则1 交换律

$$AB=BA,\ A\cup B=B\cup A$$

规则2 结合律

$$(AB)C=A(BC)=ABC$$

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=A\cup B\cup C$$

规则3 分配律

$$(A\cup B)C=AC\cup BC$$

$$AB\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$$

分配律的两个式子分别如图1-7、图1-8所示。

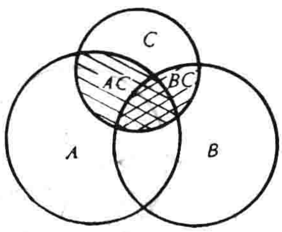

图1-7 $(A\cup B)C=AC\cup BC$

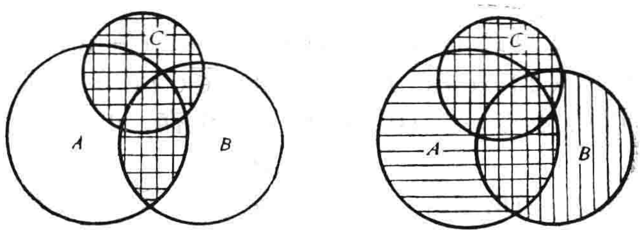

图1-8 $AB\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$

规则4 吸收律

$$(A\cup B)A=A$$

$$AB\cup A=A$$

此外，由集合的定义可知

$$AA=A$$

$$A\cup A=A$$

以上两个式子在算术运算上是不成立的，但在集合运算中不仅成立，而且常常遇到。

例14 设$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{1,3,5\}$

$C=\{5,6\}$

则

$$AC=\Phi,\quad BC=\{5\},\quad A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$$
$$(A\cup B)C=\{5\},\text{ 而 } AC\cup BC=\Phi\cup\{5\}=\{5\}$$

又由

$$AB=\{1,3\},\quad A\cup C=\{1,2,3,4,5,6\}$$
$$B\cup C=\{1,3,5,6\}$$

故得

$$(A\cup C)(B\cup C)=\{1,3,5,6\}$$

而

$$AB\cup C=\{1,3\}\cup\{5,6\}=\{1,3,5,6\}$$

从例14，也说明了规则 3 中第二个式子的正确性。

此外，下列关系式也成立：

（1） $A(B-C)=AB-AC$

（2） $\overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B}$

（3） $\overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$

（4） $A-B=A\bar{B}$

（5） $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-AB$

证 （1）设 $x\in A(B-C)$ 则 $x\in A$，且 $x\in B$，但 $x\overline{\in}C$，所以 $x\in AB$，$x\overline{\in}AC$，故得 $x\in AB-AC$。从而得到

$$A(B-C)\subset AB-AC \tag{1-1}$$

反之，设 $x\in AB-AC$，即 $x\in AB$ 但 $x\overline{\in}AC$，故必有 $x\in A$，且 $x\in B$，但 $x\overline{\in}C$；所以 $x\in A$，且 $x\in B-C$，所以 $x\in A(B-C)$，从而得到

$$AB-AC\subset A(B-C) \tag{1-2}$$

由式（1-1）和式（1-2），得 $A(B-C)=AB-AC$，参见图1-9。

证 （2）设 $x\in\overline{A\cup B}$，则由 $x\overline{\in}(A\cup B)$ 可知 $x\overline{\in}A$，且 $x\overline{\in}B$，故而 $x\in\bar{A}$ 且 $x\in\bar{B}$，即 $x\in\bar{A}\bar{B}$，由此可知

$$\overline{A\cup B}\subset\bar{A}\bar{B} \tag{1-3}$$

反之，设 $x\in\bar{A}\bar{B}$，则由 $x\in\bar{A}$，$x\in\bar{B}$ 可知 $x\overline{\in}A$，$x\overline{\in}B$，故而 $x\overline{\in}(A\cup B)$，即 $x\in\overline{A\cup B}$，由此可知

$$\bar{A}\bar{B}\subset\overline{A\cup B} \tag{1-4}$$

由式（1-3）和式（1-4）得到

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B}$$

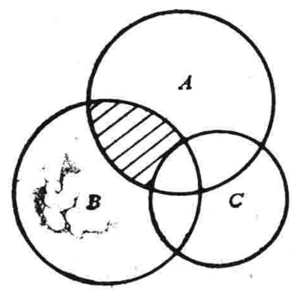

图1-9　$A(B-C)=AB-AC$

关系式（3）、（4）、（5）的正确性由读者自证。

§1-2　排 列 与 组 合

排列与组合在下面要讨论的古典概型的概率计算中应用较多，这一节里，将排列与组合问题加以讨论。

一、基本原理

例 1　从甲地到乙地，可以乘火车，也可以乘轮船或乘飞机。设一天中有火车 4 次，轮

船有2班，飞机有1班。问从甲地到乙地有几种不同的走法？

解 从甲地到乙地，有3类方法，即乘火车、轮船和飞机，每类方法分别有4、2、1种不同走法，因而共有

$$4+2+1=7$$

种不同的走法。

一般地，有如下的加法原理。

加法原理 完成一件任务，如果有 k 类不同的方式，第一类方式有 n_1 种不同方法，第二类方式有 n_2 种不同方法，…，第 k 类方式有 n_k 种不同方法，不论采用哪种方法，都可以完成这一任务，那末完成这件任务共有

$$n_1+n_2+\cdots+n_k=\sum_{i=1}^{k} n_i$$

种不同方法。

例2 某种零件可由车床、刨床或铣床加工，现有5台车床、3台刨床、2台铣床。任选一台来加工，共有多少种不同选法？

解 可把车床、刨床、铣床加工看作是三类不同方式，每类方式中各有5、3、2种不同选法。由加法原理可知共有

$$5+3+2=10$$

种不同的选择方法。

下面讨论另一类问题。

例3 从 A 地到 C 地，中间必须经过 B 地（参看图1-10），如果从 A 到 B 有4条路可走，从 B 到 C 有3条路可走，问从 A 到 C 共有多少种不同的走法？

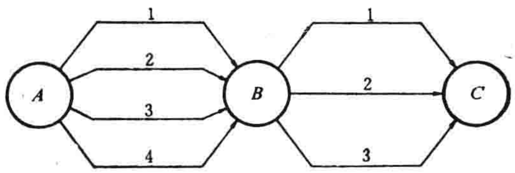

图1-10 例3图

解 从 A 到 B 的每一条路都可以与从 B 到 C 的任一条路组成一条由 A 到 C 的通路。由此，从 A 到 C 共有

$$4\times 3=12$$

种不同的走法。

一般地，有如下的乘法原理。

乘法原理 完成一件工作，必须分为 k 个阶段，第一阶段有 n_1 种不同方法，第二阶段有 n_2 种不同方法，…，第 k 阶段有 n_k 种不同方法，必须通过各个阶段，才能完成这件工作，那末完成这项工作共有

$$n_1\times n_2\times\cdots\times n_k=\prod_{i=1}^{k} n_i$$

种不同方法。

例4 要购买本子、钢笔和尺子各一件，现有4种本子、6种钢笔、3种尺子可供选择，问共有多少种不同的选择方法？

解 可把选择过程分为三段，即选择本子、钢笔和尺子。它们各有4、6、3种不同的选择。由乘法原理，共有

$$4\times 6\times 3=72$$

种不同的选择方法。

二、抽样

从 n 个不同的元素中任意抽取一个，观察之后再放回去，与其他元素充分混合后，再任意抽取一个，观察之后再放回去，然后再抽、再放，直到所需要的次数。这样的抽取方法叫做**有放回的抽样**。如果抽取之后不再放回，而是从余下的元素中再抽取，直到所需要的次数。这样的抽取方法叫做**不放回的抽样**。

例 5 从 1 、2 、3 三个铅字中有放回地抽 2 次，分别印在个位和十位上，问能印出多少个不同的数字？

解 可以把两次抽取看作是两个阶段，第一个阶段有 3 种不同的抽法。第二个阶段同样也有 3 种不同的抽法，由乘法原理可知，共有

$$3\times 3=9$$

种不同的抽法，即可以组成 9 个不同的数。具体的就是

11　12　13　21　22　23　31　32　33

例 6 从 0 、1 、2 、3 、4 五枚铅字中，不放回地连续抽 3 次，可以形成多少个不同的 3 位偶数？

解 符合要求的 3 位数可分为两类：（1）以零为个位的数，（2）以 2 或 4 为个位的数。以零为个位的数，百位有 4 种不同的抽法，因为是不放回的抽样，所以十位有 3 种不同抽法，共有 $4\times 3=12$ 种不同的抽法，即可以形成12个不同的以零为个位数的 3 位偶数。以 2 或 4 为个位的偶数，其个位有 2 种不同的抽法；因为百位数不能是零，所以百位有 3 种不同的抽法，即在零以外的 3 个铅字中任取一个；十位也有 3 种不同的抽法，故由乘法原理可知，共有

$$3\times 3\times 2=18$$

个不同的以 2 或 4 为个位数的 3 位偶数。再由加法原理，可以形成

$$12+18=30$$

个不同的 3 位偶数。

三、排列

从 n 个不同的元素中，任意取 r $(0\leqslant r\leqslant n)$ 个元素，按照任意的顺序排成一列，叫做**从 n 个不同元素中取 r 个元素形成的一种排列**。现在要研究的是这样的排列共有多少种。通常用 P_n^r 表示这个种数。

先设 $0<r<n$。在 n 个元素中，任取 r 个元素排成一列，相当于在 n 个不同元素中做 r 次不放回地抽样，按顺序排在 r 个位置上，形成一列。放在第一个位置上的元素有 n 种取法，放在第二个位置上的元素有 $n-1$ 种取法，…，放在第 r 个位置上的元素，因已经抽去 $r-1$ 个元素，所以还有 $n-(r-1)=n-r+1$ 种不同取法，由乘法原理可知，欲求的排列总数为

$$P_n^r=n(n-1)\cdots(n-r+1) \qquad (1\text{-}5)$$

当 $r=n$ 时，$n-r+1=1$，式 (1-5) 可写成

$$P_n^n=n(n-1)\cdots(n-r+1)=n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

上式中

$$n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1=n!$$

$n!$ 叫做 n 的**阶乘**。

从 n 个不同元素中取 n 个元素形成的排列，叫做 n 个元素的**全排列**。全排列数为

$$P_n^n = n! \tag{1-6}$$

相应地，对取 r（$<n$）个元素形成的排列为**选排列**，简称排列，选排列数为

$$\begin{aligned} P_n^r &= n(n-1)\cdots(n-r+1) \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned} \tag{1-7}$$

一般规定 $0!=1$，因此当 $r=n$ 时，上式可写成

$$P_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

同时，规定从 n 个元素中任取 0 个元素进行排列的总数为 1，因此式（1-7）对 $r=0$ 也成立。由此得出

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad (0 \leqslant r \leqslant n)$$

例 7 有 7 位同志排成一排照像，问有多少种不同的排法？

解 这是个全排列问题，共有

$$7! = 5040$$

种不同的排法。

例 8 计算从 8 个不同元素中任取 3 个的排列数。

解 所求的排列数为

$$P_8^3 = 8\times 7\times 6 = 336$$

例 9 从 1、2、…、9 这九个数字中任取 3 个，所形成的一切 3 位数中，有多少个是偶数？

解 如果上述 3 位数是偶数，那末它的个位应是 2、4、6、8 四个数中的一个。因此个位数字共有 P_4^1 种不同的取法。十位和百位的数字可以从余下的 8 个数字中任意取 2 个进行排列，故共有 P_8^2 种，所以，上述 3 位偶数共有

$$P_4^1 \times P_8^2 = 4\times 56 = 224$$

个。

另一种情况是所谓有放回的抽样，即允许重复抽取同一元素的排列。例如，从 ABC 三个字母中有放回地选取两个，就一共有 $3^2=9$ 种不同的排列，即

AA AB AC BA BB BC CA CB CC

一般地，从 n 个不同的元素中，有放回地抽取 r（$1\leqslant r$）个元素，即允许元素重复出现，按照一定的顺序排成一列，称为从 n 个不同元素中每次抽取 r 个有重复的选排列。

由于在每一个位置上都可以从 n 个不同的元素中任取一个，因此从 n 个元素中每次取 r 个有重复的选排列数为

$$\underbrace{n\cdot n\cdot \cdots \cdot n}_{r\text{个}} = n^r$$

例10 某城市的电话号码用 6 位数字表示，城内某区的号码首位数规定为 3，问该区最多可以安装多少台不同号码的电话机？

解 这是一个从 0 至 9 的十个数码中，每次取 5 个可以重复的选排列问题，所以总数为

$$10^5$$

即最多可以安装 10^5 台不同号码的电话机。

四、组合

从 n 个不同的元素中，任取 r（$0 \leqslant r \leqslant n$）个元素构成一组，这里不考虑这 r 个元素的次序，叫做**从 n 个不同元素中任取 r 个的一个组合**。现在问：这样的组合数有多少？

组合问题与排列问题的不同在于：在排列问题中要考虑取得元素的前后次序，而组合问题则不考虑这种次序。如前所述，从 n 个不同元素中任取 r 个元素的排列数为 $n(n-1)\cdots(n-r+1)$。按照组合问题的要求，对取定的 r 个元素可形成的一切不同排列，只能算是一个组合。而由 r 个元素可形成的排列种数共为 $r!$ 种，这就是说，上述 $n(n-1)\cdots(n-r+1)$ 种排列中，每 $r!$ 种只能算是一种组合。因而，从 n 个不同元素中，任取 r 个元素的组合数 C_n^r 为

$$C_n^r = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \qquad (0 \leqslant r \leqslant n) \qquad \text{(1-8)}$$

C_n^r 也记为 $\binom{n}{r}$。因为规定 $0! = 1$，而且规定从 n 个不同元素中取 0 个的组合数为 1，即 $C_n^0 = 1$。所以式(1-8)对所有 $0 \leqslant r \leqslant n$ 都成立。

此外，不难证明 $C_n^r = C_n^{n-r}$。所以当 r 比较接近 n 时，C_n^r 可以通过 C_n^{n-r} 来计算。例如 $C_{10}^8 = C_{10}^2 = 45$。

例11 从10名同志中任抽 3 名去执行一项任务，问有多少种不同的抽法？

解 3 名同志一组，是不分次序的，所以是组合问题，共有

$$C_{10}^3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

种不同的抽法

例12 有 5 本不同的数学书，8 本不同的物理书，从中任取数学书 2 本，物理书 4 本，问共有多少种取法？

解 从 5 本数学书中任取 2 本，有

$$C_5^2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

种不同的取法。从 8 本物理书中任取 4 本，共有

$$C_8^4 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$$

种不同的取法。由乘法原理可知，所求的取法总数为

$$C_5^2 \times C_8^4 = 10 \times 70 = 700$$

例13 有 100 件产品，其中有 5 件是次品，95件正品，从这 100 件产品中，任取 5 件，问恰好抽到 1 件次品的抽法共有多少种？

解 抽取5件产品，其中恰有1件次品。这就是说，从5件次品中抽得1件，共有C_5^1种不同抽法；从95件正品中抽得4件，共有C_{95}^4种不同抽法。因此，由乘法原理可知，所求的抽法共有

$$C_{95}^4 \times C_5^1 = 3\ 183\ 545 \times 5 = 15\ 917\ 725$$

种。

习 题 1

1. 举出有限集合与无限集合的例子各2个。

2. 对下面的集合给出另一种表示法，并指出哪些是无限集合：

（1）$A=\{x \mid x$ 为整数，且 $3 \leqslant x \leqslant 10\}$

（2）$M=\{x \mid x^2-5x+6=0\}$

（3）$P=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

（4）$B=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \cdots,\ 2^{n-1},\ \cdots\}$

3. 设$A=\{a,\ b,\ c\}$，写出A的所有子集。

4. 已知$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$，$B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$，$C=\{1,\ 3,\ 6\}$，求：

$$A\cup B;\ AB;\ ABC;\ (A\cup B)C;\ A-B;\ (A-C)B;\ (A\cup C)B$$

5. 已知$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,5,6\}$，$A=\{1,\ 3,\ 5\}$，$B=\{2,\ 4,\ 6\}$，$C=\{1,2,3\}$。求：

$\overline{A-C}$；$\overline{AC}$；$\overline{(A\cup C)-B}$；AB；BC；$A\cup BC$；$\overline{B\cup C}$

6. 已知$A=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 5\}$，$C=\{x \mid |x|<2\}$。求：

$$A\cup B;\ AB;\ B\cup C;\ BC;\ A-B;\ B-A;\ (A-B)C$$

7. 已知$A=\{(x,\ y) \mid 3x+4y\leqslant 9,\ 5x+y\leqslant 8,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$，试在平面上表示集合$A$。

*8. 已知$A=\{(x,\ y) \mid x+y\geqslant 1,\ 3x+2y\leqslant 6,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$，试在平面上表示集合$A$。

9. 设$U=\{(x,\ y) \mid |x|\leqslant 2,\ |y|\leqslant 2\}$，$A=\{(x,\ y) \mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，$B=\{(x,y) \mid x^2+y^2\leqslant 2^2$，且$x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$，试求：

AB；$A\cup B$；$\overline{A}$；$\overline{A-B}$；$\overline{B-A}$

10. 设A、B、C为三个集合，从AB与BC不相交，能否推出A、B也不相交。

11. 指出下列各式中的阐述是否成立？并说明理由：

（1）$A\cup B=A\cup B\overline{A}=B\cup A\overline{B}$

（2）$A\cup B=(A\overline{B})\cup B$

（3）$\overline{\quad\cup B}\cap C=\overline{A}\overline{B}\overline{C}$

（4）$(AB)(A\overline{B})=\Phi$

（5）$\overline{A}B=A\cup B$

（6）如果$A\subset B$，那末$A=AB$

（7）如果$AB=\Phi$且$C\subset A$，那末$BC=\Phi$

（8）如果$A\subset B$，那末$\overline{B}\subset\overline{A}$

（9）如果$B\subset A$，那末$A\cup B=A$

12. 计算下列排列数：

（1）P_7^7 （2）P_6^4 （3）P_{10}^4 （4）P_{15}^8