

一元代数方程

刘培娜 杨大淳 编著

科学出版社

1985

内 容 简 介

本书系统论述了一元代数方程,内容丰富,叙述严谨,深入浅出,循序渐近. 书中有大量习题,有助于读者掌握概念和方法,提高解题能力.

本书可供中学和师范院校教师、学生参考.

一 元 代 数 方 程

刘培娜 杨大淳 编著

责任编辑 苏芳霞

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1985年10月第 一 版 开本:787×1092 1/32

1985年10月第一次印刷 印张:7 1/2

印数:0001—10,700 字数:170,000

统一书号:13031·2983

本社书号:4423·13—1

定 价: 1.40 元

前 言

方程是中学代数课程的一个重要部分，可以说中学各册代数教材中都涉及方程的内容，而且，在数学里很多问题的解决都需要用到方程的知识。本书力图全面介绍一元代数方程的理论，对于一元一次方程、一元二次方程、分式方程、无理方程，着重介绍了同解变形问题，从理论上提高认识；对于高次方程，则阐述方程的有理根、实根、虚根以及重根方面的理论和一些特殊高次方程的解法。

本书力图叙述严谨，浅显易懂。对于一些重要的理论知识和各种方程的解法，也尽可能做了详细的论述，以适用于不同程度的读者。但是，限于我们的水平，本书一定有不足之处，敬希广大读者指教。

在本书的编写过程中，承张鸿顺副教授提出很多的宝贵意见，在此表示深切的谢意。

编 者

1985 年 4 月

目 录

第一章 方 程	1
§ 1.1 等式.....	1
§ 1.2 等式的基本性质.....	1
§ 1.3 方程.....	2
§ 1.4 方程的解.....	3
§ 1.5 代数方程.....	4
§ 1.6 重根.....	6
§ 1.7 同解方程.....	6
§ 1.8 方程的结果.....	8
§ 1.9 方程的同解变形.....	8
§ 1.10 方程同解变形定理.....	9
§ 1.11 因式定理.....	16
习题一	19
第二章 一元一次方程和一元二次方程	20
§ 2.1 一元一次方程.....	20
§ 2.2 一元一次方程的解法.....	20
§ 2.3 形如 $ax + b = 0$ 的方程的讨论	21
§ 2.4 一元一次方程的图象解法.....	23
§ 2.5 一元二次方程.....	24
§ 2.6 一元二次方程的解法.....	24
§ 2.7 一元二次方程根的判别式定理.....	30
§ 2.8 实数系数的一元二次方程根的讨论.....	37
§ 2.9 一元二次方程根与系数的关系.....	39
§ 2.10 含有绝对值的方程和它的解法.....	46
习题二	56

§ 7.5 一元四次方程.....	172
习题七	177
第八章 重根	179
§ 8.1 一元多项式的导数.....	179
§ 8.2 关于重根的几个定理.....	180
§ 8.3 结式.....	185
§ 8.4 判别式.....	193
习题八	195
第九章 实根的判定和实根近似值的求法	196
§ 9.1 实根的判定.....	196
§ 9.2 斯特姆定理.....	205
§ 9.3 实根近似值的求法.....	217
习题九	228
习题答案	230

第一章 方 程

§ 1.1 等式

用等号连结两个解析式所成的式子叫做等式。

例如，

$$\begin{aligned} (1) \quad 1 + 7 &= 8; & (2) \quad x + 1 &= 2; \\ (3) \quad ab &= ba; & (4) \quad x + 3 &= x + 1; \\ (5) \quad \frac{x^2 - 1}{x - 1} &= x + 1; & (6) \quad S &= \frac{1}{2}bh \end{aligned}$$

等都是等式。其中有些等式当所含的字母取任何值时都成立，例如(1)和(3)；有的等式，则在一定条件下才成立，例如(2)，只有在 $x = 1$ 时成立；等式(5)只有在 $x \neq 1$ 时成立。(6)是三角形面积公式，它只有在 $b > 0, h > 0$ 时才成立。有的等式，虽然形式上是相等的，但实际上它却不能成立，例如(4)。

§ 1.2 等式的基本性质

1. 如果 $a = b$ ，那么 $b = a$ 。
2. 如果 $a = b, b = c$ ，那么 $a = c$ 。
3. 如果 $a = b, c = d$ ，那么 $a \pm c = b \pm d$ 。
4. 如果 $a = b, m \neq 0$ ，那么 $am = bm, \frac{a}{m} = \frac{b}{m}$ 。
5. 如果 $a = b$ ，那么 $a^n = b^n$ (n 是自然数)。
6. 如果 $a = b$ ，且 $a > 0, b > 0$ ，那么 $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$ (n 是自然数)。

§ 1.3 方程

如果 $f(x)$ 表示一个关于 x 的解析式, 那么使 $f(x)$ 有意义的所有的 x 值叫做 x 的允许值范围。

例如, $\frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ 的 x 的允许值范围为 $x \neq 1$, 且 $x \neq 2$ 的一切复数; $\sqrt{x-4}$ 的 x 的允许值范围为不小于 4 的所有实数。

如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是关于 x 的解析式, 它们的 x 的允许值范围的共同部分为 D , 又满足条件

$$f(x) = g(x)$$

的 x 值的范围为 M 。

(1) 当 D 和 M 所包含的 x 值完全相同时, 等式 $f(x) = g(x)$ 叫做恒等式;

(2) 当 M 所包含的 x 值是 D 所包含的 x 值的一部分而不是全部时, 等式 $f(x) = g(x)$ 叫做方程(或条件等式)。

这时, x 叫做方程 $f(x) = g(x)$ 的未知数。 D 叫做方程 $f(x) = g(x)$ 的未知数允许值范围。 M 叫做方程 $f(x) = g(x)$ 的未知数 x 值的范围。 M 中的每一个 x 值叫做方程 $f(x) = g(x)$ 的一个根(或解)。

(3) 当 M 中不含任何 x 的值时, 等式 $f(x) = g(x)$ 叫做矛盾等式(或矛盾方程)。

例如, 等式

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

中, $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 和 $x + 1$ 的共同的 x 允许值范围是 $x \neq 1$ 的一切复数, 又使这个等式成立的 x 值的范围也是 $x \neq 1$ 的一切

复数,所以这个等式是恒等式。

就等式

$$|x| = x \quad (x \text{ 为实数})$$

来说,式子中 $|x|$ 和 x 的共同的 x 允许值范围是一切实数,又使这个等式成立的 x 值的范围是一切非负数,而非负数是全体实数的一部分,所以等式 $|x| = x$ 是方程。

而等式

$$x + 1 = x + 2$$

是矛盾等式,或者说是矛盾方程。

§ 1.4 方程的解

在§ 1.3中我们已经给出了方程的解(根)的定义。现在还可以如下给出方程的解的定义。

在方程的未知数允许值范围内,能使方程两边相等的数值,叫做方程的解。一元方程的解也叫做方程的根。

例如,1是方程 $x + 1 = 2$ 的解;而 $x + 3 = x + 1$ 是矛盾方程,它没有解。

应该注意,一个方程的解是与这个方程的未知数允许值范围有关的。也就是说,在不同的未知数允许值范围内,方程可能有不同的解。甚至在未知数的某一允许值范围内没有解。

例如,方程

$$(x - 2)(x^2 - 3)(x^2 + 4) = 0$$

在有理数范围内有一个解

$$x = 2;$$

在实数范围内有三个解

$$x_1 = 2, x_2 = \sqrt{3}, x_3 = -\sqrt{3};$$

在复数范围内有五个解

$$x_1 = 2, x_2 = \sqrt{3}, x_3 = -\sqrt{3}, x_4 = \sqrt{2}i, \\ x_5 = -\sqrt{2}i.$$

又如,方程

$$2x - 3 = 0$$

在自然数范围内没有解。

从这里的例子也可以看出:在不同的未知数允许值范围内,方程的解的个数可能不同。同时还可以看出:即使能使方程两边的数值相等的数,如果它不在方程的未知数允许值范围内,它也不是这个方程的解。

由方程的解(或根)的定义可以知道,对于方程

$$f(x) = g(x)$$

来说,它的未知数允许值范围为 D , 如果 $a \in D$, 且有 $f(a) = g(a)$, 那么 a 是方程 $f(x) = g(x)$ 的解;反之, 如果 a 是方程 $f(x) = g(x)$ 的解, 那么 $f(a) = g(a)$ 。或者说, a 是方程 $f(x) = g(x)$ 的解的充分必要条件是 $f(a) = g(a)$ 。

下面介绍解方程的涵义。

由于存在矛盾方程,所以我们说:

确定方程所有的解或者判定方程有没有解的过程,叫做解方程。

一个方程可能没有解;也可能有有限个解;还可能有无限多个解。

例如,方程 $x + 3 = x + 1$ 没有解;方程 $x^2 - 1 = 0$ 有两个解;方程 $|x| = x$ (x 为实数)有无限多个解。

§ 1.5 代数方程

在§1.3方程的定义中,给出的 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是关于 x 的解析式,我们知道,解析式中包括有代数式和超越式。于是有

下面几个定义:

如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是关于 x 的代数式(把数字或表示数的字母,用有限次加、减、乘、除、正整数次乘方、开方等运算和运算顺序符号连结起来所得到的式子叫做代数式),那么方程 $f(x) = g(x)$ 叫做代数方程。

如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是关于 x 的有理式(把数字或表示数的字母,用有限次加、减、乘、除、正整数次乘方等运算和运算顺序符号连结起来,所得到的代数式叫做有理式),那么方程 $f(x) = g(x)$ 叫做有理方程。

如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 中至少有一个无理式(当一个代数式里,被开方数中含有变数字母时,这个代数式就叫做无理式),那么方程 $f(x) = g(x)$ 叫做无理方程。

如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是有理式,而且其中至少有一个是分式时,那么方程 $f(x) = g(x)$ 叫做分式方程(或者有理分式方程)。

如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是整式,那么方程 $f(x) = g(x)$ 叫做整式方程(或者有理整式方程)。

上面列举的几种代数方程有如下的从属关系:

$$\text{代数方程} \begin{cases} \text{有理方程} \begin{cases} \text{整式方程} \\ \text{分式方程} \end{cases} \\ \text{无理方程} \end{cases}$$

例如,方程

$$(1) x^2 - 2x = (x-1)(x+3); x^3 + px + q = 0;$$

$$(2) x + \frac{2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-2}; \frac{x-1}{x+1} - \frac{x-1}{3-x} = 0;$$

$$(3) \sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1; \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \frac{5}{2}.$$

等都是代数方程。其中第一组的方程都是整式方程;第二组

的方程都是分式方程;第三组的方程都是无理方程。

在一个代数方程中含有几个未知数(如 x, y, z, u), 这个代数方程就叫做几元方程。

只含有一个未知数的代数方程叫做一元代数方程。

对于整式方程来说, 经过去括号、合并同类项后, 未知数的次数最高的项是几次项, 这个方程就叫做几次方程。

例如, 方程 $x^2 - 2x = (x - 1)(x + 3)$ 是一元一次方程; 方程 $x^3 + px + q = 0$ 是一元三次方程。

§ 1.6 重根

一个方程中相等的根叫做这个方程的重根。

下面, 我们将只在整式方程范围内讨论重根。

如果一个整式方程有 n 个相等的根, 那么就说这个方程有 n 重根。重根的个数 n 叫做根的重数。

例如, 方程

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

有二重根 1。根的重数是 2。

方程

$$x^2(x-1)^3(x+2)^4(x-3)^5 = 0$$

有二重根 0; 三重根 1; 四重根 -2; 五重根 3。它们的重数分别为 2, 3, 4, 5。

在整式方程中, 不重复的根叫做单根(或一重根)。

例如, 方程

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

有三个单根 1, 2, 3。

§ 1.7 同解方程

先观察下面的方程:

$$x^2 - 3x + 2 = 0, \quad (1)$$

$$x = 3 - \frac{2}{x}, \quad (2)$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0, \quad (3)$$

$$x^2 - 9x + 20 = 0. \quad (4)$$

方程(1)和方程(2)的解都是 1 和 2, 即它们的解完全相同; 方程(3)的解为 1 和 3, 它的解与方程(1)(或方程(2))的解不完全相同; 方程(4)的解为 5 和 4, 它的解与方程(1)(或(2))的解完全不相同。我们说方程(1)与方程(2)是同解方程, 而方程(1)(或(2))与方程(3)或与方程(4)不是同解方程。

下面给出同解方程的定义: 如果第一个方程的解都是第二个方程的解, 而且第二个方程的解也都是第一个方程的解, 那么这两个方程叫做同解方程。

在 § 1.4 中已经指出, 一个方程的解是与这个方程未知数的允许值范围有密切关系的。从而得知两个方程是否同解, 也与这两个方程的未知数允许值范围有着密切的关系。

例如, 方程

$$x^2 - 2 = 0 \quad (5)$$

与方程

$$x^4 - 4 = 0 \quad (6)$$

在实数集上的解都是 $\pm\sqrt{2}$, 所以它们是同解方程。而在复数集上, 方程(5)的解为 $\pm\sqrt{2}$, 方程(6)的解为 $\pm\sqrt{2}$ 和 $\pm\sqrt{2}i$. 显然它们不同解。

根据同解方程的定义, 可以知道同解方程具有传递性。即, 如果第一个方程与第二个方程同解, 第二个方程与第三个方程同解, 那么第一个方程与第三个方程也同解。

另外, 我们还可以认为, 凡是无解的方程都是同解方程。

例如, 方程

$$\sqrt{x-6} + \sqrt{2-x} = 1,$$

$$\frac{1}{x-1} = 0,$$

$$x+10 = x+11$$

都没有解,因此它们是同解方程。

§ 1.8 方程的结果

考虑下面两个整式方程

$$x^2 = 1 \quad (1)$$

与

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0, \quad (2)$$

方程(1)的解为 1 和 -1, 方程(2)的解为 1, -1 和 2. 可以看出, 方程(1)的解都是方程(2)的解, 我们说方程(2)是方程(1)的结果。

现在给出如下的定义:

如果第一个方程的解都是第二个方程的解, 那么第二个方程叫做第一个方程的结果。

两个方程是同解方程时, 其中每一个方程都是另一个方程的结果。

§ 1.9 方程的同解变形

解方程时, 往往是逐步用较简单的方程替换前面复杂的方程, 这种替换叫做方程变形。

如果由第一个方程变形为第二个方程, 而且这两个方程是同解方程, 那么这种方程的变形叫做方程的同解变形或同解变换。

或者说, 把一个方程用与它同解的方程来替换, 这种替换叫做方程的同解变形。

有时,对方程作变形不一定是同解变形,那就是说,变形后的方程不一定与变形前的方程同解. 这样一来,变形后的方程的解比变形前的方程的解或者多了,或者少了. 我们说,如果方程变形后,使方程的根比变形前方程的根增多,那么这增多的根叫做原方程的增根. 增根不是原方程的根.

如果方程变形后,使方程的根比变形前方程的根减少,那么这减少的根叫做原方程的遗根(或减根,或失根). 遗根是原方程的根.

产生增根的原因,往往是由于方程变形后未知数允许值范围扩大而造成的. 产生遗根的原因,往往是由于方程变形后未知数允许值范围缩小而造成的.

§ 1.10 方程同解变形定理

下面先介绍部分方程同解变形定理,其他的留待后面介绍.

定理 1 如果解析式 $\varphi(x)$ 对于方程

$$f(x) = g(x) \quad (1)$$

的未知数允许值范围 D 都有意义,那么方程

$$f(x) + \varphi(x) = g(x) + \varphi(x) \quad (2)$$

与方程(1)同解.

证明: (1) 设 α 是方程(1)的任一解,那么有

$$f(\alpha) = g(\alpha).$$

又因为 $\varphi(x)$ 在 D 上有意义,所以 $\varphi(\alpha)$ 有意义. 根据 § 1.2 等式的基本性质 3, 等式

$$f(\alpha) + \varphi(\alpha) = g(\alpha) + \varphi(\alpha)$$

成立. 可见 α 也是方程(2)的解.

(2) 设 α' 是方程(2)的任一解,那么有

$$f(\alpha') + \varphi(\alpha') = g(\alpha') + \varphi(\alpha').$$

根据 § 1.2 等式的基本性质 3, 等式

$$f(\alpha') = g(\alpha')$$

成立. 可见 α' 也是方程(1)的解.

由以上两点可知, 方程(1)和方程(2)同解.

在这个定理中, $\varphi(x)$ 必须对于 D 都有意义, 否则, 方程(2)就不一定与方程(1)同解.

例如, 在方程

$$x = 1$$

的两边同加上 $\frac{1}{x-1}$, 得到方程

$$x + \frac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}.$$

显而易见这两个方程有不同解.

推论 方程

$$f(x) = g(x)$$

与方程

$$f(x) - g(x) = 0 \quad (3)$$

同解.

这个推论是移项法则的根据. 由这个推论可知, 方程(1)与方程(3)同解. 如果把 $f(x) - g(x)$ 看作 $F(x)$, 那么凡是一元方程都可以记作

$$F(x) = 0$$

的形式.

定理 2 如果方程 $f(x) = 0$ 的未知数允许值范围是 D , $\varphi(x)$ 是一个解析式. 当 $a \in D$ 时, $\varphi(a)$ 有意义, 且 $\varphi(a) \neq 0$, 那么方程

$$f(x) = 0 \quad (4)$$

与方程

$$\varphi(x)f(x) = 0 \quad (5)$$

在 D 上同解。

证明: (1) 设 α 是方程(4)的任一解, 那么

$$f(\alpha) = 0.$$

显然, $\alpha \in D$. 由于 $\varphi(\alpha) \neq 0$, 所以有

$$\varphi(\alpha)f(\alpha) = 0.$$

可见 α 也是方程(5)的解。

(2) 设 α' 是方程(5)的任一解, 那么

$$\varphi(\alpha')f(\alpha') = 0.$$

因为 α' 是方程(5)的解, 所以 $f(\alpha')$ 有意义, 因而 $\alpha' \in D$. 从而得知 $\varphi(\alpha') \neq 0$. 用 $\varphi(\alpha')$ 除上面等式的两边, 得

$$f(\alpha') = 0.$$

可见 α' 也是方程(4)的解。

由以上两点可知, 方程(4)和方程(5)在 D 上同解。

例如, 在自然数集 N 上, $f(x) = x - 1$, $\varphi(x) = x + 1$, 那么方程

$$f(x) = x - 1 = 0$$

与方程

$$\varphi(x)f(x) = (x + 1)(x - 1) = 0$$

同解。

因为如果 $a \in N$, 那么有 $\varphi(a) \neq 0$. 又虽然 $\varphi(-1) = 0$, 但 $-1 \notin N$.

在这个定理中, 如果 $\varphi(a) = 0$, 那么不论 a 是不是方程 $f(x) = 0$ 的根, 方程(5)都是方程(4)的结果。

例如, $f(x) = \sqrt{x} + 1$, $\varphi(x) = \sqrt{x} - 1$, 那么方程

$$f(x) = \sqrt{x} + 1 = 0$$

与