目　录

条目分类目录

说明

一、本目录供分类查检条目之用。

二、有的条目有多种属性，可能在几个分支学科和分类中出现。例如"索伯列夫空间"条既列入分析学分支，又列入微分方程分支。

彩图插页目录

A

A_p quan

A_p 权 (A_p weight)　保证某些算子在加权勒贝格空间 L^p 有界的权函数。设 T 是 $L^p(R^n)$ 到 $L^p(R^n)$ 的有界算子，即对任意 $f\in L^p(R^n)$，有

$$\left(\int_{R^n}|Tf(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant C\left(\int_{R^n}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}},$$

式中 C 与 f 无关，积分中的 $\mathrm{d}x$ 为勒贝格测度。设 $\omega(x)\geqslant 0$ 是定义在 R^n 上的局部可积函数。问题是 $\omega(x)$ 满足什么样的条件，可保证算子 T 是 $L^p(R^n,\ \omega(x)\mathrm{d}x)$ 到 $L^p(R^n,\omega(x)\mathrm{d}x)$ 的有界算子，即对任意 $f\in L^p(R^n,\omega(x)\mathrm{d}x)$，有

$$\left(\int_{R^n}|Tf(x)|^p\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant C\left(\int_{R^n}|f(x)|^p\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}},$$

式中 C 与 f 无关。1972 年 B. 穆肯霍普特提出了下面的 A_p 条件。所谓 $\omega(x)$ 满足 A_p 条件 ($1<p<\infty$) 是指存在常数 C，使不等式

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega(x)\mathrm{d}x\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x\right)^{p-1}\leqslant C \quad (1)$$

对 R^n 中所有的方块 Q 成立。这条件的意思是 ω 在 Q 的平均值与 $\omega^{-\frac{1}{p-1}}$ 在 Q 的平均值的 $p-1$ 次幂的乘积是有界的。对 $p=1$，所谓 $\omega(x)$ 满足 A_1 条件，是指不等式

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega(x)\,\mathrm{d}x\leqslant C\operatorname*{ess\,inf}_{x\in Q}\omega(x)$$

对 R^n 中的所有方块 Q 成立，式中 C 与 Q 无关。这意思是 $\omega(x)$ 在 Q 的平均值可以被 $\omega(x)$ 在 Q 的本性下界控制。这是等式(1)的极限情形。

最后，所谓 $\omega(x)$ 满足 A_∞ 条件，是指存在常数 C 与 $\delta>0$，使得对 R^n 中的任意方块 Q 以及 Q 中的任意勒贝格可测集 E，有

$$\frac{\int_E\omega(x)\mathrm{d}x}{\int_Q\omega(x)\mathrm{d}x}\leqslant C\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{\delta},$$

式中 $|E|$ 表示 E 的勒贝格测度。这条件的意思是指用 $\omega(x)\mathrm{d}x$ 定义的测度，与勒贝格测度在某种意义下是可比较的。如果 $\omega(x)$ 满足 A_p 条件，就说 $\omega(x)$ 是一个 A_p 权。全体 A_p 权构成的函数集合也用 A_p 表示。1972 年，穆肯霍普特首先证明了，若 T 是哈代-李特尔伍德极大函数 M，即

$$M(f)(x)=\sup_{x\in Q}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)|\mathrm{d}y,$$

则 $M(f)$ 是 $L^p(R^n,\ \omega(x)\mathrm{d}x)$ 到 $L^p(R^n,\ \omega(x)\mathrm{d}x)$ 的有界算子的充分必要条件是 ω 是 A_p 权 ($1<p<\infty$)。后来，R. A. 亨特、穆肯霍普特、R. L. 惠登、R. R. 科伊夫曼与 C. 费弗曼等人证明了，一般的考尔德伦-赞格蒙奇异积分算子是 $L^p(R^n,\ \omega(x)\mathrm{d}x)$ 到 $L^p(R^n,\omega(x)\mathrm{d}x)$ 有界算子的充分必要条件也是 ω 为 A_p 权 ($1<p<\infty$)。

上述结果对 $p=1$ 与 $p=\infty$ 并不成立，但 A_1、A_∞ 在有关理论中也是两类十分重要的权函数。它们与 A_p 有密切的关系。粗略地说就是，A_1 是全体 A_p 的公共部分，而 A_∞ 是包含全体 A_p 的最小集合。用符号写出来就是

$$A_1=\bigcap_{1\leqslant p<\infty}A_p,\quad A_\infty=\bigcup_{1\leqslant p<\infty}A_p\text{。}$$

P. 琼斯于 1980 年证明了 A_p 权的分解定理。这就是，设 $1<p<\infty$，则 $\omega\in A_p$ 的充分必要条件是 $\omega=\omega_1\omega_2^{1-p}$，其中 $\omega_1,\omega_2\in A_1$。这就有可能把对 A_p 问题的讨论归结为 A_1。

A_p 权与哈代-李特尔伍德极大函数，BMO 空间等有密切联系。例如，设 f 是任意的局部可积函数，$M(f)$ 是它的哈代-李特尔伍德极大函数，$0<\delta<1$，则 $(M(f))^\delta\in A_1$。又如，设 b 是 R^n 的局部可积函数，则 $b\in$ BMO 的充分必要条件是存在 $\varepsilon>0$，使得 $e^{\varepsilon b}\in A_2$。

A_p 权具有一个很重要的性质，即它满足反向赫尔德不等式：若 $\omega\in A_p$，$1\leqslant p<\infty$，则存在 $\delta>0$ 与常数 C，使得

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega(x)^{1+\delta}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{1+\delta}}\leqslant C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega(x)\mathrm{d}x\right)$$

对 R^n 中的所有方块 Q 成立。这一性质在近代偏微分方程理论中有重要的应用。

A_p 权是近代调和分析的一个重要工具。

参考书目

B. Muckenhoupt, Weighted Norm Inequalities for the Hardy Maximal Function, *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 165, pp. 207～226, 1972.

R. R. Coifman and C. Fefferman, Weighted Norm Inequalities for Maximal Functions and Singular Integrals, *Studia Math.*, Vol. 51, pp. 241～250, 1974.

（邓东皋）

Abel'er

阿贝尔，N.H. (Niels Henrik Abel 1802～1829)　挪威数学家，近代数学发展的先驱者。1802 年 8 月 5 日生于芬岛一个牧师家庭，1829 年 4 月 6 日卒于弗鲁兰。13 岁入奥斯陆一所教会学校学习，年轻的数学教师 B. M. 霍尔姆博发现了阿贝尔的数学天才，对他给予指导。少年时，阿贝尔就已经开始考虑一些数学问题。1821 年在一些教授资助下，入奥斯陆大学。在学校里，他几乎全是自学，同时花大量时间作研究。1824 年，他解决了用根式求解五次方程的不可能性问题。为了能有更多的读者，他的论文以法文写成，也送给了 C. F. 高斯，可是在外国数学家中没有任何反响。1825 年，他去柏林，结识了 A. L. 克雷尔，并成为好

友。他鼓励克雷尔创办了著名的数学刊物《纯粹与应用数学杂志》。第1卷(1826)刊登了7篇阿贝尔的文章,其中有一般五次方程用根式不能求解的证明。以后各卷也有很多他的文章。1826年阿贝尔到巴黎,遇见了A.-M.勒让德和A.-L.柯西等著名数学家。他写了一篇关于椭圆积分的论文,提交给法国科学院,不幸未得到重视,他只好又回到柏林。克雷尔为他谋求教授职位,没有成功。1827年阿贝尔贫病交迫地回到了挪威,靠作家庭教师维生。直到阿贝尔去世前不久,人们才认识到他的价值。1828年,四名法国科学院院士上书给挪威国王,请他为阿贝尔提供合适的科学研究位置,勒让德也在科学院会议上对阿贝尔大加称赞。次年4月6日,不到27岁的阿贝尔就病逝。柏林大学邀请他担任教师的信件在他去世后的第二天才送出。此后荣誉和褒奖接踵而来,1830年他和C. G. J. 雅可比共同获得法国科学院大奖。

阿贝尔在数学方面的成就是多方面的。除了五次方程之外,他还研究了更广的一类代数方程,后人发现这是具有交换的伽罗瓦群的方程。为了纪念他,后人称交换群为阿贝尔群。阿贝尔还研究过无穷级数,得到了一些判别准则以及关于幂级数求和的定理。这些工作使他成为分析学严格化的推动者。

阿贝尔和雅可比是公认的椭圆函数论的奠基者。阿贝尔发现了椭圆函数的加法定理、双周期性、并引进了椭圆积分的反演。他研究了形如$\int R(x,y)\mathrm{d}x$的积分(现称阿贝尔积分),其中$R(x,y)$是x和y的有理函数,且存在二元多项式f,使$f(x,y)=0$。他还证明了关于上述积分之和的定理,现称阿贝尔定理,它断言:若干个这种积分之和可以用g个这种积分之和加上一些代数的与对数的项表示出来,其中g只依赖于f,就是f的亏格。阿贝尔这一系列工作为椭圆函数论的研究开拓了道路,并深刻地影响着其他数学分支。C. 埃尔米特曾说:阿贝尔留下的思想可供数学家们工作150年。 (冯绪宁)

Aboluoni'aosi

阿波罗尼奥斯 (Apollonius 约公元前262~约前190) 常与欧几里得、阿基米德合称为古希腊亚历山大前期的三大数学家。生于小亚细亚南岸的佩尔加,年轻时在亚历山大跟从欧几里得的门徒学习,以后就在那里教学。曾访问帕加马王国(小亚细亚西北),在那里新建的大学和图书馆工作过。他的巨著《圆锥曲线论》是古代世界的光辉科学成果,它将圆锥曲线的性质网罗殆尽,几乎使后人没有插足的余地。直到17世纪的B. 帕斯卡和R. 笛卡儿才有新的突破。

《圆锥曲线论》共8卷,前4卷的希腊文本和其次3卷的阿拉伯文本保存了下来,最后一卷遗失。此书集前人之大成,且提出很多新的性质。他推广了梅内克缪斯(公元前4世纪中,最早系统研究圆锥曲线的希腊数学家)的方法,证明三种圆锥曲线都可以由同一个圆锥体截取而得,并给出抛物线、椭圆、双曲线、正焦弦等名称。书中已见坐标制思想的端倪。他以圆锥体底面直径作为横坐标,过顶点的垂线作为纵坐标。这给后世坐标几何的建立以很大的启发。

阿波罗尼奥斯还有好几种著作。他在《取火镜》中证明了平行光线投影在凹球面镜上,反射光线并不集中在球心,抛物面镜才有这种聚焦的性质。在《相切》一书中他提出后来被称为"阿波罗尼奥斯问题"的有名作图题:作一圆与三已知圆相切。他在天文学方面也颇有建树,证明了求行星留点的方法,成功地将几何学应用于天文。 (梁宗巨)

Abu Wafa

阿布·瓦法 (Abū al-Wafā' 约940~997/998) 中世纪阿拉伯数学家、天文学家。940年6月10日生于布冉(现属伊朗东北霍腊散省),长期在巴格达工作,直到去世。他把古希腊数学家欧几里得、丢番图等人的著作译成阿拉伯文并作注解,还注释过花拉子米的数学著作。他有两部数学著作传世。一为《办事人员和官员必读的算书》,书中用很大篇幅来讲述分数计算,也有面积计算问题。另一部为《几何作图工匠必读》,其中有平面图形、多边形的作图方法。阿布·瓦法在数学方面的重要成就是在三角学方面,这些成就集中在他所著《天文全书》之中,此书与古希腊托勒密所著《天文学大成》极相类似。书中有关于正弦的半角公式、倍角公式,并且给出了正弦加法定理的一种新的证明;与巴塔尼同时引入正切和余切的定义并由他自己引入了正割和余割的概念;给出了间隔为15′的正切函数表,还用新的方法给出了间隔为15′的正弦函数表;计算1/2度的正弦值精确到12位小数;关于球面三角法,他给出了任意三角形的正弦定理的新证法。 (杜石然)

Adama

阿达马,J.(-S.) (Jacques-Salomon Hadamard 1865~1963) 法国数学家。1865年12月8日生于凡尔赛,1963年10月17日卒于巴黎。1888年毕业于巴黎高等师范学校。先后在巴黎布丰中学、波尔多理学院和巴黎大学理学院任职。1909年到法兰西学院任教,一直到退休(1937)。他长期在巴黎综合工科学校和中央学校兼职任教,并在法兰西学院创办了一个著名的讨论班。1912年被选为法国科学院院士。他还是苏联、美国、英国、意大利等国的科学院院士或皇家学会的会员以及许多国家的名誉博士。

他早期就致力于把A.-L.柯西在分析学上的局部理论推广到全局。在复域里其博士论文《泰勒级数所定义的函数的解析开拓》(1892)第一次把集合论引进复变函

数论,更简单地重证了柯西有关收敛半径的结果;并探索了奇点在收敛圆上的位置及其性质，从而使收敛圆外的解析开拓更切实可行。这些成果至今仍是复变函数论的基本内容。他和他学生S.曼德尔勃罗伊合著《泰勒级数及其解析开拓》(1901)已成为经典著作。他在研究函数的极大模时得到了著名的三圆定理，并应用到整函数的泰勒级数系数极大模的衰减和这个函数的亏格间的关系上，完善了H.庞加莱的结果，获得了1892年法国科学院大奖。他还证明了黎曼ζ函数的亏格为零(1896)，对黎曼猜想的解决作出了贡献。证明了素数定理,即

$$\frac{\pi(n)\log n}{n}\to 1,$$

从而建立解析数论的基础。在实域里,他的贡献体现在常微分方程定性理论、泛函分析、线性二阶偏微分方程定解问题和流体力学上。在常微分方程方面，他用不同的方法稍后于A.M.李亚普诺夫独立地证明了有关稳定性的结果。庞加莱的定性理论就是把常微分方程柯西问题的局部结果推广到全局。阿达马认为这个推广之所以成为可能,是因为庞加莱得到E.伽罗瓦用群处理代数方程解法的思想的启示，这种思想使他关心并重视泛函分析工作。他在线性泛函的表示问题上的结果,开创里斯定理的先河。1908年他关于泛函微商问题的论文获巴黎科学院奖，他在这篇论文中得到了$\Delta u=0$的格林函数的一个非线性积分方程的重要成果，他注意到这个方程与边界s有关,而与方程无关,这至今还是泛函分析的一个重要课题。他的《变分学教程》一书奠定了泛函分析的基础。1920年在泛函分析会议上作的报告《泛函分析所起的科学作用》是有影响的文献。他的行列式定理在E.I.弗雷德霍姆的证明中居重要地位。在偏微分方程方面,他坚持柯西提倡的定解问题方向,明确了定解问题的含义,完善了适定性的要求。他得出根据二阶方程的特征表达式分型(椭圆、双曲、抛物)的结论。那么,这三个型方程有没有共同点呢？阿达马提出了一般方程基本解的概念。有了基本解,模双曲型方程的柯西问题的解，只要支柱是空向的，已给数据适当正规，就可以用一个发散积分的有限部分来表示。椭圆型方程就可以形成势代表解,并通过这个势满足的弗雷德霍姆型积分方程求得狄利克雷问题的解。间接地求抛物型方程的基本解的步骤，也是由阿达马提出来的。他不愧为线性二阶偏微分方程理论的总结者、奠基者和开拓者。在流体力学方面的工作，大都包含在《波的传播教程》一书里。在书中,他通过有关定解问题的讨论,说明引进波的概念的必要性，对D.希尔伯特的重要工作,进行简化和增补，对特征理论做了详尽的讨论，从而指出方程组和单个方程有本质的不同，并在附录中指出流体滑动的可能性。这些都在后来的气动力学大范围研究中起作用。

阿达马1936年曾来中国清华大学讲学三个多月。1964年在中国出版了他的著作《偏微分方程论》。

（吴新谋）

A'erfusi

阿尔福斯，L.V. (Lars Valerian Ahlfors 1907～　) 著名数学家。1907年4月18日生于芬兰赫尔辛基。1930年在赫尔辛基大学获博士学位。1932年起先后在赫尔辛基大学和哈佛大学任副教授，1938年回赫尔辛基大学任教授。第二次世界大战后去美国，一直在哈佛大学任教授。1953年当选为美国国家科学院院士。阿尔福斯的主要贡献是在单复变函数论方面。1929年解决当儒瓦猜想(整函数的不同的有限渐近值的个数不大于整函数的阶的2倍)，1935年建立覆盖面理论,因而获1936年首次颁发的费尔兹奖。后来他转向黎曼曲面的研究，1981年因在几何函数论方面的有效新方法的创立和根本性的发现而荣获沃尔夫奖。他是迄今为止获得上述两项世界数学最高奖的仅有的两个人之一（另一人是小平邦彦)。他的主要著作有《复分析》(第2版,1966;中译本,1984)。

（张奠宙）

Ajimide

阿基米德 (Archimedes 约公元前287～前212) 古希腊伟大的数学家、力学家。生于西西里岛的叙拉古，卒于同地。早年在当时的文化中心亚历山大跟随欧几里得的学生学习，以后和亚历山大的学者保持紧密联系，因此他算是亚历山大学派的成员。后人对阿基米德给以极高的评价，常把他和I.牛顿、C.F.高斯并列为有史以来三个贡献最大的数学家。他的生平没有详细记载，但关于他的许多故事却广为流传。据说他确立了力学的杠杆定律之后，曾发出豪

言壮语:“给我一个立足点，我就可以移动这个地球!”叙拉古的亥厄洛王叫金匠造一顶纯金的皇冠，因怀疑里面掺有银子，便请阿基米德鉴定一下。当他进入浴盆洗澡时,水漫溢到盆外,于是悟得不同质料的物体，虽然重量相同，但因体积不同，排去的水也必不相等。根据这一道理，就可以判断皇冠是否掺假。阿基米德高兴得跳起来，赤身奔回家中，口中大呼:“尤里卡!尤里卡!”(希腊语 εὕρηκα，意思是“我找到了”)他将这一流体静力学的基本原理，即物体在液体中减轻的重量，等于排去液体的重量，总结在他的名著《论浮体》中，后来以“阿基米德原理”著称于世。第二次布匿战争时期，罗马大军围攻叙拉古，阿基米德献出自己的一切聪明才智为祖国效劳。传说他用起重机抓起敌人的船只，摔得粉碎；发明奇妙的机器，射出大石、火球。还有一些书记载他用巨大的火镜反射日光去焚毁敌船，这大概是夸张的说法。总之,他曾竭尽心力,给敌人以沉重打击。最后叙拉古因粮食耗尽及奸细的出卖而陷落，阿基米德不幸死在罗马士兵之手。流传下来的阿基米德的著作,主要有下