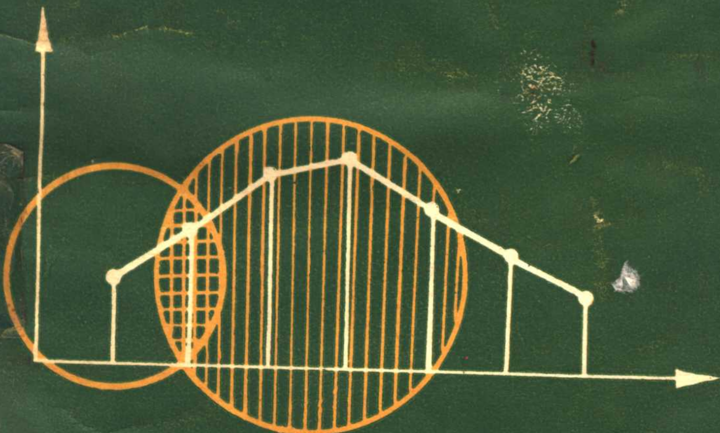
概率入门

杨搢勋 编



科学出版社

概率入门

杨揩勋 编

科学出版社

1982

内 容 简 介

概率统计是研究近代科学技术和自然科学的重要方法，它已广泛地应用于工业质量管理、气象预报、科学种田、医药卫生、地震观测、交通调度、国防通信等领域。作为基础学科，概率论已列入当前中学数学课程。

本书是普及概率论知识的小册子，根据新教学大纲，书中通过丰富实例，通俗地介绍了以排列组合为主的古典概率及其有关的基本概念和定理，每章附有一定数量的练习题，本书末还对如何教、学概率论提出了应注意的事项。

本书可供中学教师和中学生，以及中师、中专、中技、业余大学师生参考，亦可作为其它战线的读者学习概率论的自学读物。

概 率 入 门

杨 播 勋 编

责任编辑 徐一帆

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1982年12月第 一 版　开本：787×1092 1/32

1982年12月第一次印刷　印张：4

印数：0001—31,400　字数：87,000

统一书号：13031·2038

本社书号：2785·13—1

定价： 0.52 元

编者的话

为了使中学数学教学适应“四个现代化”的需要，概率论已列为中学数学课程内容之一。广大师生都希望能找到一些有关初等概率的书籍作参考。但是，目前市面上专门介绍初等概率的书籍却不多。因此，本人不揣冒昧，编写了这本《概率入门》，在内容的取舍方面．力求根据新教学大纲的要求，着重介绍以排列组合为主要研究工具的古典概率及其有关知识。并对这部分教材在中学数学中的地位、作用和教学时应注意之点提了一些粗浅之见。书中还编有一定数量的例题和习题，既可供教师在教学中选用，又便于读者自学和练习，练习题后附有答案，以供参考。

本书没有涉及高等数学，是概率论入门性的读物，它可以做为中学教师的教学参考书和中学生的课外读物，又可供具有高中文化水平准备自学概率的同志作参考。

由于本人水平不高，错误和不妥之处在所难免，敬希读者批评指正。

杨播勋

1980年于衡阳基础大学

目　　录

第一章 绪 论

§1. 概率论研究的对象

在日常生活中，当我们看到一个现象不可能一下子肯定其结果时，往往用“可能是这样”“也许是那样”等语句来作结论。例如，当你看到某射击手向某一目标进行射击时，若别人问你：“他会射中目标吗？”你在观察了他的瞄准姿势后，一定会这样回答：“很可能命中”或“很可能不会中.”因为你对他是否一定会射中目标尚无十足的把握来肯定，只好这样来回答了。像这样的现象——在某种条件实现下，它可能出现，也可能不出现——我们称其为随机现象或偶然现象(其详细意义在第二章中再介绍)。这种现象在现实世界中大量地存在着。如一条河流每年出现洪峰的时间和最大洪水流量；某城市一年几遇的暴雨量；电话局每日接到用户呼唤的次数；某工厂一天的产品中废品的多少……等等均是。这些现象个别看来好像是杂乱无章，没有什么规律似的。但决不象唯心论者所认为的那样，是什么“超自然规律”的，“人类无法把握的现象”。而事实是，表面上的偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律所支配的。当我们对大量的随机现象进行观察时，它们也常有客观的必然规律存在。如对一次射击进行观察，结果命中与否，是无规律的，但当同一射手用同一支枪在同一地点向同一目标进行多次射击时，我们将会发现其命中的次数与射击次数之比是改变不大的。而且常把这个比值叫做它的命中率(即命中目标的可能性的大小)。

又如电话局每天接到用户的呼唤次数，若一天天单独来看，也是没有什么规律的，但若就总的情况来看，看几个月或几年，就会看出每天接到呼唤的次数总是在一个确定的范围内．这些事实说明，当我们观察了大量的同类随机现象后，通常总可以揭露出它的一种完全确定的规律性的．既然如此，我们对它进行研究并掌握其规律，就具有很大的实际意义了．例如，在建筑一个水坝时，就必须了解水文情况，而水文情况是一个随机现象．一条河流的最大洪水位不是每一年都一样的，那么修建水坝应该根据什么样的洪水位呢？如果水坝修的过高，当然可以防止洪水，但这样作不经济．如果修低了，则在发生大洪水时不但不能防洪，还很可能被洪水冲垮．这就要求我们要掌握该河流发生洪水的规律而后进行设计和施工，才会使水坝建筑得合理适用．

用什么工具来研究随机现象的规律呢？概率论便是以研究大量随机现象所呈现的规律为对象的一门学科．藉助它可以使随机现象也渐渐进入我们掌握之中，从而更有利于我们循着自然规律来认识世界，改造世界．

§2．概率论的发展简史

概率论也像其他科学一样，是由于社会实际的需要而产生和发展的．十六、十七世纪时，由于赌博盛行，欧洲的一些封建贵族在寄生的享受生活中，提出一些赌博游戏中的问题，受到当时一些大数学家的注意，并加以解决，促进了概率论的发生与发展．当时的塔尔塔尔亚和卡尔登就发明了计算概率．后来伽利略、巴斯伽、费尔马等人也从事于这种问题的研究．不过，由于当时生产力和自然科学的发展水平还比较低，加上统治阶级不关心生产和唯心主义哲学思想的统

治．概率论的发展曾一度非常缓慢，并且走入了歧途，为唯心主义和统治阶级作辩护．继后由于物理学及其他自然科学（如观察误差的理论、射击问题、统计问题——尤其是人口统计问题等方面）的迫切要求，使概率论获得了进一步的发展．

十九世纪中叶和二十世纪二十年代，由于车贝契夫、马尔科夫和李亚卜诺夫诸学者的工作，使概率论又得到了新的发展．最近数十年来，概率论在自然科学和生产中的地位更无比地提高了．在物质构造的分子理论获得普遍承认，生产上普遍实现高速化和自动化以后，概率论在自然科学各部门及生产控制中的广泛应用就成为不可避免的事情了．

目前，概率论已经成为数学理论中的重要分支．它的范围非常广泛，内容非常丰富，生命力非常旺盛．而且根据科学发展和生产实践特别是尖端技术的需要，概率论本身又逐渐形成了众多的紧密联系实际的学科，如“数理统计”、“排队论”、“信息论”、……等等．它日益深刻地应用着各种新的数学工具，同时又日益深入地渗透到数学、自然科学和社会科学的各个部门中去．

概率论在我国的研究也是比较早的．1880年华蘅芳就翻译了《决疑数学》十卷，是我国第一部概率论著作．解放前，也有些人在国外做过一些概率论方面的研究工作．但是由于当时生产力的极端落后和国民党反动政府对于科学事业漠不关心，使概率论得不到什么发展和应用．解放后，党和政府对科学事业关怀备至，创造了很多有利条件，为科学事业的发展开辟了一个广阔的天地，在发展概率论方面也进行了一系列的工作．早在一九五六年制定十二年科学远景规划时，就强调了要大力开展概率论和数理统计的研究工作．并且开始大量培养这方面的专业干部．从而使我国概率论的研

究工作取得了可喜的成就，特别是数学家侯振挺同志在马尔可夫过程的研究方面所取得的成果，在国际上处于领先的地位，享有很高的声誉，现在中央又决定将概率论的基本知识作为中学数学内容之一，这不仅对普及概率论知识大有裨益，而且对今后概率论研究工作的发展与提高，必将起到良好的推动作用。

§3. 概率论在各方面的应用简介

概率论既是以研究偶然现象为对象，而偶然现象到处都有。因而应用概率论的地方也就很多。下面我们以描述的方式简要地介绍它在各方面的应用。①

第一、在工业方面的应用。现代化工业生产，不仅要求产品数量多，而且要求产品质量高。因此，一方面，在生产过程中，采用质量控制的办法以保证产品质量。即对生产进行是否正常随时予以检查，当发现产品质量有下降趋势时，就及时采取措施，以减低废品率，直到不出废品；另一方面，对生产出来的产品进行质量检查，总结经验教训，以进一步提高产品质量。但在检查时，不可能也没有必要对所有产品逐一进行检查，只能取出比较少量的产品进行检查，由此推断出全部产品质量。这两方面都要藉助于一些专门科学知识。前者属于"质量控制"，后者属于"抽样检查"，这两门科学都要用到概率论的知识。

此外，利用概率论和数理统计的方法还可以帮助我们确定哪些技术革新是可行的。例如有一个纺纱工厂的工人对粗纱的并条想搞技术革新，原来是两根纱并为一条，他们想改为

①详细内容的介绍超出本书范围，请读者参看其他有关专著。

三根纱并为一条．经过试验，粗纱质量并未降低．后来用数理统计的方法进行研究，从理论上肯定了试验的结果，全面推广了这一技术革新，使产量增加30％．

第二、在农业方面的应用．农业生产“八字宪法”中一种或几种因素对农作物产量的影响是各不相同的．为了掌握各因素对农作物的影响情况，我们往往通过种“试验田”的办法进行研究．但由于每一块单位田地都要受到很多不可控制的自然影响（如天气的变化，土质的变化等），因而对每一亩地虽然都同等注意贯彻“八字宪法”，其产量还是包含有随机性．这就需要用概率论的方法进行研究以保证相当准确地判定每一种因素与产量的关系以及这些因素相互之间的关系．这样的科学结论对于农业丰产有着重大意义．如某地区小麦合理密植的问题，通过试验和数学计算就得出了每亩20斤左右的播种量是比较合理的结论．

此外，像对农业生产有极密切关系的气象预报和大旱大涝的预报等也都要用到概率论的知识和方法．

第三、在国民经济和公用服务事业中的应用．各种公用事业如百货公司零售点的设立，卖食品的柜台、理发店的理发师、公共汽车的候车站、剧院及车站的售票窗口、公共宿舍的厕所、城市计划中电力供应的变电装置、电话线等等都可以看作是一些服务单位的安排调配．这些服务单位的数目总是有限的，而其服务对象一般是“随机地”使用这些单位．如果过多地增加服务单位，就要提高成本，增加使用人的负担；如果服务单位过少，又会使顾客长期等待而产生拥挤现象．如何合理安排这些服务单位的数目便是一个很重要的问题．而这类问题就是概率论的一个新兴的应用学科——排队论所研究的内容．在现代工业生产上，一个工人管理多部机器的问题也属于“排队论”研究的范畴，运用数学方法

有时候会得出凭经验不容易看出来的结论。例如，在一定条件下，三个工人管理20部车床比一个工人管理 6 部车床更能缩短车床等待管理的时间。

此外，在国防通讯工程中占有重要地位的“信息论”以及近代物理中研究分子运动等问题时，都需要用到概率论的知识和方法。由此可见概率论应用的广泛性了。

§4. 概率论在中学数学课程中的地位和作用

从上节的介绍中可以看出，概率论的应用是极其广泛的。它是研究自然现象，处理现代工程乃至公众事业问题的有力工具。大力普及这方面的知识，对实现“四个现代化”有着重大的意义。虽然在概率论中使用着现代数学中的种种最新工具，但它的一些基本概念和初步知识如简单事件的概率、独立事件同时发生的概率、互斥事件至少有一个发生的概率、简单事件重复 n 次恰好有 k 次发生的概率等，又是完全能被高中同学所接受和掌握的。而且，由于概率论应用的广泛性，有大量的实际问题也能够用初等数学方法去解决。所以，把它作为中学数学课程的内容之一，大大有利于概率论知识的普及和培养学生解决实际问题的能力，对学生毕业后从事现代化工农业生产也就大有裨益。同时，概率论的方法，即统计的方法，是研究近代科学技术和自然科学的重要方法，学生在中学阶段学了一点概率论知识也就可为其升入高一级学校后进一步研究概率论和其它科学打些基础。

第二章 概率论的一些基本概念

§1. 事 件

“欲涉远必自迩，欲登高必自卑.”我们要对一门科学进行学习和研究，就必须从钻研它的一些基本概念和方法入手. 因为任何一门科学，总包含着它所依据的一系列基本概念和方法，把基本概念弄懂了，根基打好了，根深而后叶茂，再经过钻研，就会结出丰硕的果实来. 为此，我们就从概率论中一个最原始的概念——事件谈起.

当我们多次观察自然现象后，会发现许多事情在一定条件下必然会发生. 例如，“在标准大气压下，温度达到100℃时，水必然沸腾.”这就是在“标准大气压温度是100℃”这个条件下，“水沸腾”这个事情必然会发生. 像这种在一定条件下必然会发生的事情，叫做必然事件. 反过来，也有些事情，在一定条件下必然不会发生，如“在标准大气压下，温度达到100℃时水结冰”这个事情是不可能的. 这就是在“标准大气压、温度100°C”这个条件下，“水结冰”这个事情必然不会发生. 像这种在一定条件下必不会发生的事情，叫做不可能事件. 此外，还有大量的事情，在一定条件下可能发生也可能不发生.这种事情叫做随机事件,也叫做或然事件. 比如从某灯泡厂生产的产品中任意取出一只灯泡进行检验，它能“燃点1200小时以上”这一事情就是随机事件. 这里条件是“该工厂生产的产品中任意抽取一只灯泡”，事件是“燃点1200小时以上”. 因为任意抽取的一只灯泡，它可能燃点1200小时以上，也可能燃点不到1200小时，所以

是随机事件．又如某电话局在单位时间内“接到呼唤500次”这个事情可能发生也可能不发生，这是一个随机事件．它的条件是“该电话局经过一个单位时间”，事件是“接到呼唤500次”．在绪论中所谈到的有关随机现象的那些事情都是随机事件．

在理解这三类事件（必然事件、不可能事件、随机事件）的定义时，值得注意的是：

（i）要判断一个事件是三类事件中的哪一类，必须联系一定的条件来考虑．条件不同，事件的性质也就不一样．例如“水沸腾”这一事件在“标准大气压下，加热到100℃”这一条件下是必然事件，而在“标准大气压下，加热到80°C”这一条件下就成为不可能事件了．同时，影响事件性质的条件有时可能不是一个，而是很多个．如上面谈到的决定“水沸腾”这一事件的性质的条件就有两个：1．大气压；2．加热所达到的温度．所以，严格说来，这三类事件应当叫做在某一条件组下的必然事件、不可能事件和随机事件．

（ii）必然事件可看成在一定条件下总是会发生的随机事件，不可能事件可看成在一定条件下总不会发生的随机事件．所以，它们可以看成是随机事件的极端状况．

（iii）随机事件在一定条件下虽不能完全肯定其发生与否，但它们的发生是有一定的规律的．正如在绪论中所谈到的一样．下面我们再举两个例子来说明它的规律性．

例 1　从一个工人一天生产的产品中，任意抽出200件进行检验，其中每一件产品是不是废品，这是随机事件．但200件产品中废品个数却总是占有一定的百分比，不论取哪200件产品进行检验，这个百分比不会相差很大，这就是它的规律性．我们根据这个百分比就能看出这个工人生产的好坏了．

例 2　某邮局每天投递的挂号信和全部信件的比值并

不是一个常数，但如果统计该局每月投递的平信和挂号信，就会发现挂号信和全部平信的比值经常接近于某一常数，这也就是这一随机事件的规律性。我们便可据此来决定印制各种不同票面额的邮票的比例。

不过，随机事件发生的规律性，也是在一定的条件之下来谈的。如果条件有了改变，那末这个规律性也就要随之改变。例如，某一工人的技术水平提高了，那末他生产的产品的废品率势必随之减少。这时，我们就不能再拿他以前的废品率来衡量他生产的好坏，而必须对他生产的产品重新检查统计以得出新的废品率。

另外，随机事件发生的规律性，或是由大量的个体所组成的一个整体所表现出来的某种性质，或是由单一的个体通过很多次重复试验所表现出来的某种性质，但这些性质不能简单地归结为个体性质的量的总和。例如，某一批产品的废品率为 2 %，这是针对这一批产品的整体而言的，而不是针对这一批产品的个体而言的。因为这一批产品中的任何一个个体不是废品就是合格品，而不可能是 2 %为不合格的。又如，一个射手的命中率为95%，也是指他多次射击所反映出来的规律性，至于他每一次射击，要就是中，要就是不中，不能是中95%。

为了简便起见，我们今后将随机事件简称为事件。

§2. 事件之间的关系

在现实生活中，任何事物都不是孤立地存在着，而是与其它事物互相联系、互相制约的。因此，我们在研究随机事件时，不能只是一个一个地来研究，而往往需要同时研究在同样条件下的几个事件以及它们之间的联系。例如，在检查

圆柱形的产品时，如果要求它的长度和直径都符合规格才算合格，这时我们在考虑“产品合格”与“产品不合格”时，就要考虑到“直径合格”、“长度合格”、“直径合格，但长度不合格”、“长度合格，但直径不合格”、“直径与长度均不合格”……等事件。显然，这些事件相互之间是有联系的。详细地分析事件之间的种种关系，会大大地有利于我们深刻地认识到事件的本质，掌握它的发生规律。为此，我们进一步来讨论事件之间的几种主要关系。为了方便起见，我们以A、B、C*、……表示不同的事件。

1. 事件的特款

在一定条件下（以后考虑若干个事件之间的关系时，都假定是在同一条件下。为说话方便起见，我们就把在“一定条件下”的词句省略）。如果事件A发生，必然导致事件B发生，则称事件A是事件B的特款，或称事件A蕴涵于事件B，并以符号A⊂B或者B⊃A表之。例如，上面所说的检查圆柱形产品时，“直径不合格”必然导致“产品不合格”。因此，“直径不合格”这一事件便是“产品不合格”这一事件的特款。又如，水沸腾就要蒸发，其中“水沸腾”这一事件就是“水蒸发”这一事件的特款。因为“水沸腾”这一事件发生时，“水蒸发”也一定会发生。

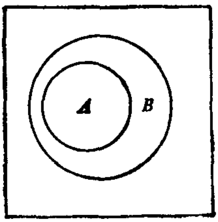


图1 A⊂B

事件间蕴含关系可用（图1）来说明。

这里，条件组是这样组成的：在正方形里随机取出一点，不在图中任何一个圆上。A表示“所取点落在小圆内”这一事

* 书中外文字母拟排斜体而误排成正体，因不影响含意就不一一改动了。
——出版者注

件，B表“所取点落在大圆内”这一事件。$A \subset B$ 的意义就是圆A含于圆B的里面。

如果我们把A、B看成两个集合，那末 $A \subset B$ 就是“A是B的子集”。

假如事件A是事件B的特款，反过来，B又是A的特款，就是说，如果 $A \subset B$ 及 $B \subset A$ 同时成立，则称事件A与B等同。记做 $A = B$。例如，在其他条件具备时，卫星达到第一宇宙速度时就绕地球运转，反过来，如果卫星绕地球运转，那么它一定达到了第一宇宙速度。这两个事件“卫星达到第一宇宙速度”与“卫星绕地球运转”是等同的。

等同的两个事件，我们将看作是一样的。

很显然，所有必然事件都是等同的。因为任何必然事件在只要条件具备的情况下都会发生。因此，我们可以用同一个字母来表示所有必然事件，今后就用U表必然事件。同理，所有不可能事件彼此等同，并用V表不可能事件。但要注意，用字母U（或V）来表示所有必然事件（或不可能事件），只是表示这些事件在条件具备时一定发生（或不发生）这一共同特性，并不表示它们的内容都是一样的。因为各个必然事件（或不可能事件）的内容可能是全然不同的。例如，在标准大气压下，加热到100℃时，“水沸腾”与“水不结冰”都是必然事件，但它们的内容则显然是不同的。

2. 事件的和

由事件A与B至少有一个发生所构成的事件，称为事件A与B的和。记做 $A + B$。如上面所说圆柱形产品的例子，“产品不合格”这一事件便是“直径不合格”与“长度不合格”这两个事件的和。因为如果某一圆柱形产品的直径不合格或者长度不合格或者直径与长度都不合格时，那末这一产品一定不合格了。反过来，如果已知一圆柱形产品不合格，

那末它的长度与直径至少必有一个不合格，或者两者都不合格。又如某展览馆在一天内“接待参观群众在300人到1000人之间”这一事件（我们以A表之）便是该馆在一天内“接待群众在300人到600人之间”这一事件（以B表之）与“接待参观群众在600人到1000人之间”这一事件（以C表之）的和。因为如果接待群众在300到1000人之间，那末或者接待群众在300到600人之间，或者接待的群众在600到1000人之间。这就是说，如果A发生，那末B、C必有一个发生；反之，如果接待的群众在300人到600人之间，或者接待的群众在600到1000人之间时，也就可说是“接待群众在300到1000人之间”这一事件发生了。也就是说，如果B、C中有一个发生了，那末A必定发生。从这两个例子可以看出，事件A+B与事件A、B之间的关系是：如果事件A+B发生，那末A、B两事件中至少有一个发生。反过来，如果A、B中至少有一个发生，那末A+B必然发生。

事件的和的意义，可用下图来说明（图2）。

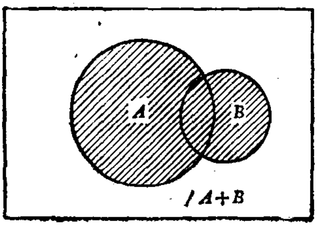


图2

这里的条件与事件的特款中图形的条件相同（以后都如此）。图中阴影部分就表示和A+B。

很显然，$A \subset A+B$，$B \subset A+B$。

两事件的和可以推广到有限个事件的情况。就是$A_1+A_2+A_3+\cdots\cdots+A_n$表示$A_1$、$A_2$、$A_3$、……$A_n$这些事件的和。也就是表示“这n个事件中至少有一件发生”的事件。例如，某电话交换台“一分钟内接到不多于10次呼唤”这一事件便是“一分钟内接到一次呼唤”“一分钟内接到两次呼