

● 非线性科学丛书 ●

实用符号动力学

郑伟谋 郝柏林 著

上海科技教育出版社

本书出版由上海市新闻出版局
学术著作出版基金资助

非线性科学丛书

实用符号动力学

郑伟谋 郝柏林 著

周作领 丁鄂江 审阅

上海科技教育出版社

内 容 提 要

本书是“非线性科学丛书”中的一种,介绍实用符号动力学的基础知识及一些应用。全书计六章,即:引论,单峰映射的符号动力学,一维多临界点映射,圆映射的符号动力学,二维映射符号动力学,符号动力学方法在常微分方程分支和混沌中的应用。本书不拘泥于数学严格性,力求实用、形象直观。书中也包含有著者的一些独创性工作。

本书可供理工科大学教师、大学高年级学生、研究生、博士后阅读,也可供自然科学和工程技术领域中的研究人员参考。

本书由周作领、丁鄂江审阅。

非线性科学丛书

实用符号动力学

郑伟谋 郝柏林 著

周作领 丁鄂江 审阅

上海科技教育出版社出版发行

(上海市冠生园路 393 号 邮政编码 200233)

各地新华书店经销 上海印刷十二厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 6.75 字数 165,000

1994 年 11 月第 1 版 1995 年 9 月第 2 次印刷

印数 3,201—6,200 本

ISBN 7-5428-1015-4/O·52 定价:(精装本)11.50元

Advanced Series in Nonlinear Science

Applied Symbolic Dynamics

By Wei-mou ZHENG and Bai-lin HAO

Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica

P. O. Box 2735, Beijing 100080, China

Shanghai Scientific and Technological Education

Publishing House, SHANGHAI, 1994

非线性科学丛书编辑委员会

主 编：郝柏林

副主编：郑伟谋 吴智仁

编 委：(按姓氏笔画为序)

丁鄂江	文志英	朱照宣
刘式达	刘寄星	孙义燧
杨清建	李邦河	张洪钧
张景中	陈式刚	周作领
赵凯华	胡 岗	顾 雁
倪皖荪	徐京华	郭柏灵
陶瑞宝	谢惠民	蒲富恪
霍裕平	魏荣爵	

出版说明

现代自然科学和技术的发展，正在改变着传统的学科划分和科学研究的方法。“数、理、化、天、地、生”这些曾经以纵向发展为主的基础学科，与日新月异的新技术相结合，使用数值、解析和图形并举的计算机方法，推出了横跨多种学科门类的新兴领域。这种发展的一个重要特征，可以概括为“非”字当头，即出现了以“非”字起首而命名的一系列新方向和新领域。其中，非线性科学占有极其重要的位置。这决非人们“想入非非”，而是反映了人类对自然界认识过程的螺旋式上升。

曾几何时，非线性还被人们当作个性极强，无从逾越的难题。每一个具体问题似乎都要求发明特殊的算法，运用新颖的技巧。诚然，力学和数学早就知道一批可以精确求解的非线性方程，物理学也曾经严格地解决过少数非平庸的模型。不过，这些都曾是稀如凤毛麟角的“手工艺”珍品，人们还没有悟出它们的普遍启示，也没有看到它们之间的内在联系。

20世纪60年代中期，事情从非线性现象的两个极端同时发生变化。一方面，描述浅水波运动的一个偏微分方程的数值计算，揭示了方程的解具有出奇的稳定和保守性质。这启发人们找到了求解一大类非线性偏微分方程的普遍途径，即所谓“反散射”方法。反散射方法大为扩展了哈密顿力学中原有的可积性概念，反映了这类方程内秉的对称和保守性质。到了80年代，反散射方法推广到量子问题，发现了可积问题与统计物理中严格可解模型的联系。

60年代初期还证明了关于弱不可积保守系统普遍性质的KAM定理。于是,非线性问题的可积的极端便清楚勾划出来,成为一个广泛的研究领域。虽然这里的大多数进展还只限于时空维数较低的系统,但它对非线性科学发展的促进作用是不可估量的。

另一方面,在“不可积”的极端,对KAM定理条件的“反面文章”,揭示了保守力学系统中随机性运动的普遍性,而在耗散系统中则发现了一批奇怪吸引子和混沌运动的实例。这些研究迅速地融成一片,一些早年被认为是病态的特例也在新的观点下重新认识。原来不含有任何外来随机因素的完全确定论的数学模型或物理系统,其长时间行为可能对初值的细微变化十分敏感,同投掷骰子一样地随机和不可预测。然而,混沌不是无序,它可能包含着丰富的内部结构。

同时,由于计算科学特别是图形技术的长足进步,人们得以理解和模拟出许多过去无从下手研究的复杂现象。从随机与结构共存的湍流图象,到自然界中各种图样花纹的选择与生长,以及生物形态的发生过程,都开始展现出其内在的规律。如果说,混沌现象主要是非线性系统的时间演化行为,则这些复杂系统要研究的是非线性地耦合到一起的大量单元或子系统的空间组织或时空过程。标度变换下的不变性、分形几何学和重正化群技术在这里起着重要作用。

在由上述种种方面汇成的非线性科学洪流中,许多非线性数学中早已成熟的概念和方法开始向其他学科扩散,同时也提出了新的深刻的数学问题。物理学中关于对称和守恒,对称破缺,相变和重正化群的思想,也在日益增多的新领域中找到应用。“非线性”一词曾经是数学中用以区别于“线性”问题的术语,非线性科学正在成为跨学科的研究前沿。各门传统学科中都有自己的非线性篇章,非线性科学却不是这些篇章的总和。非线性科学揭示各种非线性现象的共性,发展处理它们的普适方法。

这样迅猛发展的跨学科领域,很难设想用少数专著加以概括,

何况学科发展的不少方面还未成熟到足以总结成书的地步。于是,有了动员在前沿工作的教学和研究人員,以集体力量撰写一套“非线性科学丛书”的想法。在上海科技教育出版社的大力支持下,这一计划得以付诸实现。

这套“非线性科学丛书”不是高级科普,也不是大块专著。它将致力于反映非线性科学各个方面的基本内容和最新进展,帮助大学高年级学生、研究生、博士后人員和青年教师迅速进入这一跨学科的新领域,同时为传统自然科学和工程技术领域中的研究和教学人員更新知识提供自学教材。非线性科学的全貌将由整套丛书刻划,每册努力讲清一个主题,一个侧面,而不求面面俱到,以免失之过泛。在写作风格上,作者們将努力深入浅出,图文并茂,文献丰富;力求有实质内容,无空洞议论,以真刀真枪脚踏实地武装读者。从读者方面,自然要求具备理工科大学本科的数学基础,和读书时自己主动思索与推导的习惯。

“非线性科学丛书”的成功,取决于读者和作者的支持。我们衷心欢迎批评和建议。

郝柏林

1992年4月30日于北京中关村

前 言

自然科学和工程技术的发展, 不断把原来只为数学家知晓的概念和方法, 变成广大实际工作者必须掌握的语言和工具; 实际问题的分析处理, 又使原有的数学概念获得丰富的内容和长足的进步. 这种相互作用, 在非线科学的发展过程中表现得尤为清楚. 符号动力学的实用化, 提供了一个生动的实例.

符号动力学是研究动力学行为的严格方法. 从原则上讲, 一切有志进入非线性动力学领域的人, 应当从掌握符号动力学入手. 然而, 对于非数学专业的科学和技术工作者, 这仍非易事. 本书作者就是在实际研究工作中接触和了解符号动力学, 并且获得一些结果; 通过实践对符号动力学的某些方面有了较多体会. 符号动力学的基本精神是简单的, 但必须下相当功夫才能熟练掌握.

阅读本书, 只要求具备工科大学本科的数学基础, 最好对于非线性动力学的基本内容也有所接触. 例如, 阅读过这套“非线性科学丛书”中郝柏林撰写的《从抛物线谈起——混沌动力学引论》^[1], 或阅读过文献集《混沌 II》^[2]一书的导言部分. 然而, 更重要的是在读书过程中应自己动笔写写算算, 去补足推导的细节或应用于自己感兴趣的实际问题. 另外, 书中收录了一些 BASIC 短程序, 看懂这些程序对理解正文内容很有益处.

本书的叙述力求完整和自治. 极少数略为艰深的推导, 或内容上相对独立而不便在正文中全面展开的论题, 将放在附录中. 书中所引的参考文献一律列在书末. 书中还反映了我们研究组的若干结果. 整个研究工作曾受到中国科学院开放实验室计划(1986~1992)和中国自然科学基金(1986~1991)的支持,

Abstract

Symbolic dynamics is a coarse-grained way of studying complicated dynamical behavior with finite precision. As an abstract chapter of mathematics it has been providing useful means for theorem-proving. In the last two decades the method of symbolic dynamics has been cast into a powerful tool for practitioners in physical sciences and engineering, for whom this book is designed. Starting from the simplest case of unimodal map, symbolic dynamics of maps with multiple critical points and circle maps is introduced. Then symbolic dynamics of two-dimensional maps and its applications to the study of bifurcations and chaos in ordinary differential equations are developed. This book contains also original contributions of the authors. Knowledge of elementary calculus and simple dynamics is required in order to read this book.

目 录

非线性科学丛书出版说明

前 言

第 1 章	引论	1
§ 1	动力学系统	1
§ 2	符号动力学	4
§ 3	实用符号动力学	7
§ 4	关于符号动力学的文献	9
第 2 章	单峰映射的符号动力学	11
§ 5	单峰映射的符号序列	11
§ 6	揉序列和允字条件	16
§ 6.1	允字条件	17
§ 6.2	中介字的生成和超稳揉序列表	19
§ 7	二次方映射	26
§ 7.1	由二次方映射产生揉序列表	26
§ 7.2	确定参数的方法	27
§ 7.3	映射的分支图	29
§ 7.4	周期系的数目	32
§ 8	* 乘积和广义合成律	34
§ 8.1	* 乘积	35
§ 8.2	广义合成律	37
§ 8.3	粗粒混沌	39
§ 8.4	周期 3 的符号分析	42
§ 8.5	非普适收敛率	43
§ 9	人字映射、锯齿映射和 λ 展开	45

§ 9.1	人字映射和锯齿映射	45
§ 9.2	子区间映射及其转移矩阵	47
§ 9.3	映射的拓扑熵	50
§ 9.4	符号序列的语法复杂性	53
§ 10	拓扑熵的周期展开	58
第 3 章	一维多临界点映射	62
§ 11	反对称立方映射	62
§ 11.1	允字条件	63
§ 11.2	超稳揉序列的生成	66
§ 11.3	对称破缺和恢复	71
§ 12	裂峰映射	73
§ 12.1	揉平面	74
§ 12.2	偶奇型触点	77
§ 12.3	揉平面的自相似结构	79
§ 12.4	拓扑混沌判据	81
§ 13	罗伦兹型映射	84
§ 14	一般立方型映射	88
§ 14.1	揉平面中的骨架、骨干和关节	89
§ 14.2	揉平面的生成	91
§ 14.3	双降立方型映射	95
§ 15	正弦平方映射	97
§ 15.1	符号序列和字提升	98
§ 15.2	揉序列和允字条件	99
§ 15.3	揉平面中的关节点和骨架图	101
§ 16	一般的多临界点映射	106
§ 16.1	分段线性映射和揉行列式	107
第 4 章	圆映射的符号动力学	110
§ 17	圆映射概述	110
§ 18	连分数和法瑞地址	112

§ 19	法瑞变换和良序符号序列	114
§ 20	提升为非单调的圆映射	120
§ 21	圆映射的揉平面	125
§ 22	分段线性圆映射和拓扑熵	130
第 5 章	二维映射符号动力学	134
§ 23	特尔映射	134
§ 23.1	正、逆映射和正、逆符号序列	135
§ 23.2	相空间的动力学分叶及排序	136
§ 23.3	符号平面中的允许区和禁区	139
§ 23.4	允字条件	142
§ 23.5	小结	145
§ 24	罗西映射	146
§ 24.1	相空间动力学分叶和排序	147
§ 24.2	符号平面中的允许区和禁区	151
§ 24.3	允字条件的应用举例	154
§ 25	依依映射	155
§ 25.1	相空间割线的确定	156
§ 25.2	依依映射的符号动力学	159
§ 25.3	典型映射例的分析	160
第 6 章	对微分方程的应用	165
§ 26	周期驱动的布鲁塞尔振子	166
§ 27	罗伦兹模型与立方映射符号动力学	172
附录 A	允许的符号序列对应于真实轨道	174
附录 B	广义合成律的证明	175
附录 C	有理数的连分式表示和法瑞表示	178
索引		183
科学家中外译名对照表		186
参考文献		187

Contents

Preface

Chapter 1 Introduction	1
§ 1 Dynamical Systems	1
§ 2 Symbolic Dynamics	4
§ 3 Applied Symbolic Dynamics	7
§ 4 The Literature on Symbolic Dynamics	9
Chapter 2 Symbolic Dynamics of Unimodal Maps	11
§ 5 Symbolic Sequences of Unimodal Maps	11
§ 6 Kneading Sequences and Admissibility Conditions	16
§ 6.1 Admissibility Conditions	17
§ 6.2 Construction of Midian Sequences and Table of Superstable Kneading Sequences	19
§ 7 The Quadratic Map	26
§ 7.1 Construction of the Table of Kneading Sequences from the Quadratic Map	26
§ 7.2 Methods for Determining Parameters	27
§ 7.3 Bifurcation Diagram of the Map	29
§ 7.4 Counting of Period Families	32
§ 8 The $*$ -Product and the Generalized Composition Rule	34
§ 8.1 The $*$ -Product	35
§ 8.1 The $*$ -Product	37
§ 8.2 The Generalized Composition Rule	39
§ 8.3 Coarse-Grained Chaos	39

§ 8.4	Symbolic Analysis of the Period 3.....	42
§ 8.5	A Non-Universal Convergence Rate.....	43
§ 9	The Tent Map, Saw-Tooth Map and λ -Expansion...	45
§ 9.1	The Tent Map and the Saw-Tooth Map.....	45
§ 9.2	Mapping of Sub-Intervals and the Transfer Matrix	47
§ 9.3	Topological Entropy of a Map.....	50
§ 9.4	The Grammatical Complexity of Symbolic Sequences.....	53
§ 10	The Cycle Expansion of Topological Entropy.....	58
Chapter 3 One-Dimensional Maps with Many Critical Points.....		62
§ 11	The Anti-Symmetric Cubic Map.....	62
§ 11.1	Admissibility Conditions.....	63
§ 11.2	Construction of the Table of Superstable Kneading Sequences.....	66
§ 11.3	Symmetry Breaking and Restoration.....	71
§ 12	The Gap Map.....	74
§ 12.1	The Kneading Plane.....	74
§ 12.2	Even and Odd Type Contacts.....	77
§ 12.3	Self-Similarity of the Kneading Plane.....	79
§ 12.4	A Criterion for Topological Chaos.....	81
§ 13	The Lorenz-Like Map.....	84
§ 14	General Cubic Maps.....	88
§ 14.1	The Skeleton, Bones and Joints of the Kneading Plane.....	89
§ 14.2	Construction of the Kneading Plane.....	91
§ 14.3	Cubic Map with Two Descending Branches...	95
§ 15	The Sine-Square Map.....	97

§ 15.1	Symbolic Sequences and Word Lifting.....	98
§ 15.2	Kneading Sequences and Admissibility Conditions.....	99
§ 15.3	Joints and the skeleton in the Kneading Plane	101
§ 16	General Multimodal Maps.....	106
§ 16.1	Piece-Wise Linear Maps and their Kneading Determinant.....	107
Chapter 4	Symbolic Dynamics of the Circle Map..	110
§ 17	A Brief Review of the Circle Map.....	110
§ 18	The Continued Fraction and the Farey Address..	112
§ 19	The Farey Transformations and Well-Oriented Symbolic Sequences.....	114
§ 20	The Circle Map with its Lift Non-Monotonic.....	120
§ 21	The Kneading Plane of the Circle Map.....	125
§ 22	The Piece-Wise Linear Circle Map and its Topological Entropy.....	130
Chapter 5	Symbolic Dynamics of Two-Dimensional Maps	134
§ 23	The Tél Map.....	134
§ 23.1	Forward and Backward Maps and their Symbolic Sequences.....	135
§ 23.2	Dynamical Foliations of the Phase Space and their Ordering.....	136
§ 23.3	Allowed and Forbidden Zones in the Symbolic Plane.....	139
§ 23.4	Admissibility Conditions.....	142
§ 23.5	Summary	145
§ 24	The Lozi map.....	146

§ 24.1	Dynamical Foliations of the Phase Space and their Ordering.....	147
§ 24.2	Allowed and Forbidden Zones in the Symbolic Plane.....	151
§ 24.3	Applications of the Admissibility Conditions	154
§ 25	The Hénon Map.....	155
§ 25.1	Determination of Partition Lines for the Phase Space.....	156
§ 25.2	Symbolic Dynamics of the Hénon Map.....	159
§ 25.3	Analysis of a Few Typical Maps.....	160
Chapter 6	Application to Differential Equations...	165
§ 26	The Periodically Driven Brusselator.....	166
§ 27	The Lorenz Model and Symbolic Dynamics of the Cubic Map.....	172
Appendix A	An Allowed Symbolic Sequence Corresponds to a Real Orbit.....	174
Appendix B	Proof of the Generalized Composition Rule	175
Appendix C	The Continued Fraction Representation and Farey Representation of a rational number.....	178
Subject Index.....		183
Names of Scientists in Chinese and English.....		186
References		187