王一平　陈达章　刘鹏程

工程电动力学

GONG CHENG
DIAN DONG
LI XUE

西北电讯工程学院出版社

工 程 电 动 力 学

王一平　陈达章　刘鹏程

西北电讯工程学院出版社

1 9 8 5

内 容 简 介

本书包含电磁场方程、电磁场的基本解法，电磁场的基本定理、运动系统的电磁场、平面电磁波、电磁波的辐射与散射、导行电磁波和电磁理论中的常用数学公式等内容。

本书内容丰富，讲法严谨，概念清晰，数学演算详细，便于自学。本书可供研究生学习，亦可作为有关学科的大学教师、高年级学生及科技人员的参考书。

工程电动力学

王一平 陈达章 刘鹏程

西北电讯工程学院出版社出版
西北电讯工程学院印刷厂印刷
陕西省新华书店发行　　各地新华书店经售
开本 787×1092 1/16　印张 25 8/16　字数 624千字
1985年11月第一版　1985年11月第一次印刷　印数 1—3,500

统一书号：15322·33　　定价：5,00元

前　言

一九七九年秋至一九八〇年夏，我们举办过小型的电磁理论讨论班。在此基础上写成了《电磁波理论》一书共十二章。一九八〇秋至一九八一年夏，曾以其中七章作为教师进修和研究生学习的讲稿。后来又选其中大部分章节经补充写成《电磁场理论》讲义先后在四届研究生中用作教材。鉴于本书与教材不完全一致，故定名为《工程电动力学》正式出版，以供相应学科的大学教师、科研人员参考和研究生学习之用。为了学习方便，我们在每一章加了引言和习题。

全书共分七章。第一章至第三章论述经典电磁场的基本理论及基本计算方法。第一章给出了描述电磁场运动规律的各种方程，其中包括各种方程，本构方程，电磁力、电磁动量及电磁能量方程等。第二章介绍了电磁场的基本解法，其中包括各种位函数法，用标量格林函数、矢量格林函数及并矢格林函数求解波动方程，以及矢量波动方程的直接解法等。第三章介绍了许多有用的电磁场定理，例如二重性原理、等效原理、感应定理、互易定理及巴俾涅原理等。第四章以狭义相对论为基础，着重讨论了运动系统电磁场的性质及计算方法。第五章至第七章论述了电磁波传播、辐射、散射及导行电磁波，这是前四章内容的深入和应用。第五章着重分析了各向异性媒质中波的传播及反射、透射特性，介绍了新的分析方法。第六章介绍了辐射及散射的计算方法，包括多极子展开法、球面波展开法及计算辐射场和散射场时常用的鞍点法等，并给出了计算实例。第七章介绍了柱形波导系统中导行电磁波的分析方法及其特征，具体讨论了均匀填充波导、部分填充波导和表面波波导中波的特性。最后在附录中给出了电磁理论中常用的数学公式，它带有索引和手册的性质，比较系统地引出了有关数学分析方法的必需算式。

书中对时谐场的表示用 $e^{j\omega t}$，计量单位采用我国法定计量单位。参考文献附于全书之末。

西安交通大学黄席椿教授、傅君眉副教授审阅了本书的初稿，提出了许多宝贵意见，在此表示谢意！

由于我们水平所限，书中错误与不妥之处必然存在，我们诚恳地希望读者批评、指正。

作者 1984 年 12 月

目　录

第一章 电磁场方程

引 言

自从上一世纪 J.C. 麦克斯韦提出描述电磁场的一组线性偏微分方程以来，电磁学在各个方面都有了长足的进展。但是，在经典的、宏观的范围内，麦克斯韦方程仍然是反映电磁场运动规律的基本定律。本章的目的是阐明这种普遍的规律。

首先简要地介绍电磁场的基本实验定律，总结出麦克斯韦方程组。然后将着重讨论麦克斯韦方程的基本意义及其各种表示形式。强调在整个方程组中把独立方程与非独立方程区别开来和了解其限定形式不同于非限定形式的重要意义，并且给出了各种非限定形式。关于电磁场的边界条件将用矢量斯托克斯定理导出，这种方法似乎比一般常用的方法更吸引人一些。本章在媒质的宏观电磁特性讨论中，以本构矩阵(Constitution Matrices)的形式给出媒质本构方程(Constitution equations)的一般形式，并引入双各向异性媒质的概念。本章还讨论电磁场的能量、动量和麦克斯韦张力、张量等问题，给出了电磁场的功率-能量守恒方程和电磁力-动量守恒方程。这些方程是麦克斯韦方程及洛仑兹力公式对电磁现象的本质的进一步揭示，使我们更深入地认识到电磁场的物质性和运动的波动性。本章最后一节讨论了为简化电磁场的计算而引入的辅助位函数及其方程，对规范变换作了较详细的论述。

1.1 麦克斯韦方程组

一、实 验 定 律

1. 场矢量与洛仑兹力

实验表明，一个运动的带电粒子将受到电荷和电流的作用力。从场的观点来看，这种作用力是由于电荷和电流在其周围产生电场或磁场而引起的，因而我们引入电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 和磁场矢量 $\boldsymbol{B}$ 来描述其场的性质，作用力的规律可表示为

$$\boldsymbol{F}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \tag{1.1-1}$$

式(1.1-1)称为洛仑兹方程，式中 $\boldsymbol{F}$ 称为洛仑兹力，q 为带电粒子的电量，$\boldsymbol{v}$ 为带电粒子的运动速度。根据式(1.1-1)，利用试验电荷 q 可以确定电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 和磁场矢量 $\boldsymbol{B}$。

电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 定义为静止的试验电荷 q 所受的作用力 $\boldsymbol{F}$ 与试验电荷的比值

$$\boldsymbol{E}=\lim_{q\to 0}\frac{\boldsymbol{F}}{q} \tag{1.1-2}$$

由式(1.1-2)定义的电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 称为电场强度矢量。式(1.1-2)表明，只有当试验电荷 q 足够小以致它对场源的影响亦即它本身场的存在可以忽略不计的情况下，式(1.1-2)定义的 $\boldsymbol{E}$ 才有意义。

在 $\boldsymbol{E}=0$ 的情况下，由式(1.1-1)可知，运动带电粒子 q 在磁场中所受的作用力为

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

式(1.1-3)可作为磁感应强度矢量 $\boldsymbol{B}$ 的定义。磁感应强度矢量 $\boldsymbol{B}$ 常常又称为磁通密度矢量。

在体电荷分布的情况下，设体电荷密度为 ρ，运动速度为 $\boldsymbol{v}$，则运动电荷形成的运流电流密度为 $\boldsymbol{J}=\rho\boldsymbol{v}$，此时运动带电系统单位体积所受的电磁场的作用力可表示为

$$\boldsymbol{f}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta V}=\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} \tag{1.1-4}$$

式中 $\boldsymbol{f}$ 为体积力密度，右端第一项为电场力密度，第二项为磁场力密度。需要指出的是，式(1.1-4)中的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为带电体中任一点处总的电场和磁场，包括带电体本身产生的电场和磁场。

2. 库仑定律

库仑定律是静电学中描述两个点电荷之间相互作用力的基本实验定律。设均匀无界空间中有两个静止点电荷 q_1 和 q_2，根据库仑定律，点电荷 q_2 受 q_1 的作用力 $\boldsymbol{F}$ 可表示为

$$\boldsymbol{F}=\frac{q_1 q_2 \boldsymbol{R}}{4\pi\varepsilon R^3} \tag{1.1-5}$$

式中 $\boldsymbol{R}$ 是由 q_1 到 q_2 的距离矢量，ε 称为媒质的介电常数或电容率。根据式(1.1-2)与(1.1-5)，均匀无界空间中点电荷 q 所产生的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 为

$$\boldsymbol{E}=\frac{q\boldsymbol{R}}{4\pi\varepsilon R^3} \tag{1.1-6}$$

式中 $R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$，$|\boldsymbol{r}'|$ 为点电荷的坐标(源点坐标)，$|\boldsymbol{r}|$ 为场点坐标。考虑到

$$\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}=\frac{\boldsymbol{u}_R}{R^2}=-\nabla\left(\frac{1}{R}\right) \tag{1.1-7}$$

于是，式(1.1-6)可改写为

$$\boldsymbol{E}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon}\nabla\left(\frac{1}{R}\right) \tag{1.1-8}$$

令

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon R} \tag{1.1-9}$$

则式(1.1-8)又可表示为

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi \tag{1.1-10}$$

由上式可以看出，静电场是位场，标量函数 φ 称为库仑位。由式(1.1-7)可以看出，静电场存在库仑位的关键在于库仑力是"有心力"。

根据点电荷电场强度的表示式(1.1-8)，很容易找出静止的体电荷分布的电场强度。设均匀无界空间中，体电荷分布在有限体积 V 内，电荷密度为 $\rho(\boldsymbol{r}')$，于是，dV' 内的电荷元 $\rho(\boldsymbol{r}')dV'$ 产生的电场强度为

$$d\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{\rho(\boldsymbol{r})dV'\boldsymbol{R}}{4\pi\varepsilon R^3}$$

利用式(1.1-7)，体积 V 内的体电荷产生的总的电场强度可表示为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\int_V\frac{\rho(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{R}}{4\pi\varepsilon R^3}dV=-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V\rho(\boldsymbol{r}')\nabla\left(\frac{1}{R}\right)dV' \tag{1.1-11}$$

上式中梯度算子 ∇ 是对不带"撇"的场点坐标的运算，而体积分仅对带"撇"的源点坐标进

我们可将式(1.1-11)写成下面的形式

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi \tag{1.1-10}$$

$$\varphi = \int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon R} dV' \tag{1.1-12}$$

√3. 安培定律与毕奥-沙伐定律

安培定律是静磁学中描述两个恒定电流元之间作用力规律的基本实验定律。设均匀无界空间中有两个恒定电流元 $\boldsymbol{J}_1 dV_1$ 与$\boldsymbol{J}_2 dV_2$，根据安培定律，电流元 $\boldsymbol{J}_1 dV_1$ 受 $\boldsymbol{J}_2 dV_2$ 的作用力 $d\boldsymbol{F}_1$ 可表示为

$$d\boldsymbol{F}_1 = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\boldsymbol{J}_1 \times (\boldsymbol{J}_2 \times \boldsymbol{R})}{R^3} dV_1 dV_2 \tag{1.1-13}$$

式中 $\boldsymbol{R}$ 为电流元之间的距离矢量，其方向由电流元$\boldsymbol{J}_2 dV_2$ 指向电流元$\boldsymbol{J}_1 dV_1$，μ 为媒质的导磁率。

根据磁感应强度的定义式(1.1-3)，并作代换 $q\boldsymbol{v} = \boldsymbol{J}_1 dV_1$，电流元 $\boldsymbol{J}_1 dV_1$ 所受的作用力可表示为

$$d\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{J}_1 \times \boldsymbol{B} dV_1 \tag{1.1-14}$$

比较式(1.1-13)与(1.1-14)可以看出，电流元 $\boldsymbol{J}_2 dV_2$ 产生的磁感应强度为

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu \boldsymbol{J}_2 \times \boldsymbol{R}}{4\pi R^3} dV_2$$

根据上式，并考虑到式(1.1-7)，我们可求出均匀无界空间中有限体积 V 内任意分布的恒定电流源产生的总磁场

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times \boldsymbol{R}}{R^3} dV' = -\frac{\mu}{4\pi}\int_V \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times \nabla\left(\frac{1}{R}\right) dV' \tag{1.1-15}$$

上式称为毕奥-沙伐定律。

4. 法拉第定律

法拉第定律是描述恒定磁场或似稳磁场中电磁感应的基本实验定律，它可表述为：在任意闭合回路中的感应电动势等于与此闭合回路相交链的磁通量的时间变化率的负值，即

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{1.1-16}$$

对于运动的闭合回路，如图 1-1 所示，式(1.1-16)可改写为

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S} + \oint_S (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{l} \tag{1.1-17}$$

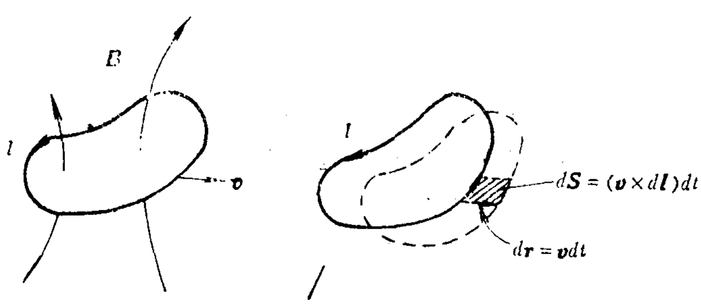

图 1-1 磁场中运动的闭合回路

上式右端第一项为回路不动时由于磁场变化引起的感应电动势，第二项为由于回路在磁场中运动而引起的感应电动势。对于静止闭合回路，由式(1.1-16)可得

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{1.1-18}$$

应用斯托克斯定理，上式左端的线积分可写成面积分，于是有

$$\int_S (\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot d\boldsymbol{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$$

因为 S 是任意的，必然有

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.1-19}$$

式(1.1-18)与(1.1-19)分别称为法拉第定律的积分形式与微分形式。

对于静态场，$\partial/\partial t = 0$，式(1.1-19)简化为 $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$。由式(1.1-10)也可以直接得到 $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$，因此，库仑定律与法拉第定律的静态形式是一致的。

5. 电荷守恒定律

电荷守恒定律又称为电流连续性方程，数学上它可表示为

$$\oint_S \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{S} = -\frac{\partial Q}{\partial t} \tag{1.1-20}$$

式中 Q 为闭合面 S 所包围体积中的总电荷。应用高斯散度定理，上式左端的面积分可写成体积分，再将总电荷 Q 写成体电荷密度 ρ 的体积分，于是，式(1.1-20)可改写为

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{J}dV = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV \tag{1.1-21}$$

由于体积 V 是任意的，则必然有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{1.1-22}$$

式(1.1-21)与(1.1-22)分别称为电流连续方程的积分形式与微分形式。

二、麦克斯韦方程组

由上节所述基本实验定律出发，我们可导出描述静态场或似稳场特性的几个基本定理。将这些基本定理作适当的推广或修正，便可得到描述宏观电磁现象基本特性的麦克斯韦方程组。

1. 高斯定理

假设在均匀无界空间中，闭合面 S 包围的体积 V 内分布有密度为 $\rho(\boldsymbol{r}')$ 的体电荷，按照式(1.1-11)可以计算这些体电荷产生的电场强度 $\boldsymbol{E}$。我们定义电感应强度 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$，由式(1.1-11)可以看出，由于消去了介电常数 ε，所以矢量 $\boldsymbol{D}$ 与介质的性质无关。

由式(1.1-11)可得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{E}) = -\frac{1}{4\pi}\int_V \rho(\boldsymbol{r}')\nabla\cdot\nabla\left(\frac{1}{R}\right)dV'$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_V \rho(\boldsymbol{r}')\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)dV' \tag{1.1-23}$$

利用含有狄拉克(Dirac)δ 函数的关系式*

$$\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right) = -4\pi\delta(R)$$

由式(1.1-23)可导出高斯定理

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho \tag{1.1-24}$$

高斯定理表明，矢量场 $\boldsymbol{D}$ 的场源为自由电荷，只有存在自由电荷的场点，才存在 $\boldsymbol{D}$ 的散度，且数值上等于自由电荷密度。

式(1.1-24)为高斯定理的微分形式。将式(1.1-24)对体积 V 积分，并应用高斯散度定理，可得到高斯定理的积分形式

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho dV \tag{1.1-25}$$

闭合面 S 上的面积元矢量 $d\boldsymbol{S}$ 沿外法线方向。式(1.1-25)左端的面积分代表电感应强度 $\boldsymbol{D}$由体积 V 发出的穿过闭合面 S 的通量，因此，电感应强度 $\boldsymbol{D}$ 又称为电通量密度矢量。式(1.1-25)表明，穿过闭合面 S 的电通量等于 S 所包围的体积 V 内总的自由电荷。

虽然高斯定理是由静电学中的库仑定律导出的，但实验表明，高斯定理也适用于时变场的情况。

2. 磁通连续性原理

由静磁学中的毕奥-沙伐定律出发，我们可导出与静电学中的高斯定理相对应的磁通连续性原理。

设均匀无界空间中体积 V 内有恒定电流 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$，根据毕奥-沙伐定律，有

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\mu}{4\pi}\int_V \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\times\nabla\left(\frac{1}{R}\right)dV' \tag{1.1-15}$$

考虑到 $\nabla\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') = 0$，于是有

$$\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{J}}{R}\right) = \nabla\left(\frac{1}{R}\right)\times\boldsymbol{J} + \frac{1}{R}\nabla\times\boldsymbol{J} = \nabla\left(\frac{1}{R}\right)\times\boldsymbol{J}$$

$$= -\boldsymbol{J}\times\nabla\left(\frac{1}{R}\right) \tag{1.1-26}$$

将式(1.1-26)代入式(1.1-15)，可得

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{J}}{R}\right)dV' = \nabla\times\frac{\mu}{4\pi}\int_V\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{R}dV'$$

根据上式，我们可引入磁矢位 $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{R}dV' \tag{1.1-27}$$

于是，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 可用磁矢位 $\boldsymbol{A}$ 表示为

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} \tag{1.1-28}$$

由式(1.1-28)与高斯散度定理，我们可求得磁通连续性原理的微分形式与积分形式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 \tag{1.1-29}$$

* 见附录 3

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = 0 \tag{1.1-30}$$

式(1.1-30)表明，穿过闭合面S的总磁通量等于零。与高斯定理相比较，它说明自然界中不存在与电荷类似的磁荷。

3. 安培环路定理

由毕奥-沙伐定律还可导出安培环路定理。由式(1.1-27)与(1.1-28)有

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{B} &= \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \nabla\times\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{J}}{R}\right)dV' \\ &= -\frac{\mu}{4\pi}\int_V \boldsymbol{J}\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)dV' + \frac{\mu}{4\pi}\nabla\int_V \nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{J}}{R}\right)dV'\end{aligned} \tag{1.1-31}$$

利用关系式$\nabla^2(1/R) = -4\pi\delta(R)$，很容易计算式(1.1-31)右端第一项积分

$$\begin{aligned}-\frac{\mu}{4\pi}\int_V \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\,\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)dV' &= \mu\int_V \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\delta(R)dV' \\ &= \mu\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{1.1-32}$$

式(1.1-31)右端第二项积分包含对场点坐标的运算，应用矢量微分恒等式

$$\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{J}}{R}\right) = \boldsymbol{J}\cdot\nabla\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{1}{R}\nabla\cdot\boldsymbol{J}$$

对场点

再考虑到$\nabla\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') = 0$，$\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)$，于是，式(1.1-31)右端第二项积分变成

$$\frac{\mu}{4\pi}\nabla\int_V \nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{J}}{R}\right)dV' = -\frac{\mu}{4\pi}\nabla\int_V \boldsymbol{J}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)dV' \tag{1.1-33}$$

对于稳态场情况，电流连续性方程为$\nabla'\cdot\boldsymbol{J} = 0$，于是

$$\nabla'\cdot\left(\frac{\boldsymbol{J}}{R}\right) = \boldsymbol{J}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{1}{R}\nabla'\cdot\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)$$

式(1.1-33)可改写为

$$\begin{aligned}\frac{\mu}{4\pi}\nabla\int_V \nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{J}}{R}\right)dV' &= -\frac{\mu}{4\pi}\nabla\int_V \boldsymbol{J}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)dV' \\ &= -\frac{\mu}{4\pi}\nabla\int_V \nabla'\cdot\left(\frac{\boldsymbol{J}}{R}\right)dV' \\ &= -\frac{\mu}{4\pi}\nabla\oint_S \frac{\boldsymbol{J}}{R}\cdot d\boldsymbol{S}\end{aligned}$$

由于闭合面S包围所有的电流源，因而在闭合面上任一点都不存在电流密度的法向分量，在闭合面上处处$\boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{S} = 0$，上式中整个面积分等于零，即式(1.1-31)右端第二项积分等于零。于是，由式(1.1-31)与(1.1-32)可导出

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{J} \tag{1.1-34}$$

引入磁场强度矢量$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}/\mu$，由式(1.1-34)可得到安培环路定理

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{1.1-35}$$

应用斯托克斯定理，由式(1.1-35)可得到安培环路定理的积分形式

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{1.1-36}$$

对于时变场的情况，安培环路定理并不成立。因为按式(1.1-35)，$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{H} = \nabla\cdot\boldsymbol{J} = 0$，它并不满足时变场情况下的电流连续性方程$\nabla\cdot\boldsymbol{J} = -\partial\rho/\partial t$。因此，式(1.1-35)右端必须另

加上一电流密度项 $\boldsymbol{J}_d$，即

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}_d \tag{1.1-37}$$

由上式取散度得

$$0=\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\nabla\cdot\boldsymbol{J}_d \tag{1.1-38}$$

将电流连续性方程 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\partial\rho/\partial t$ 代入上式，则得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}_d=\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

再将式(1.1-24)代入上式，则可确定 $\boldsymbol{J}_d$ 的表示式应为

$$\boldsymbol{J}_d=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1.1-39}$$

因此，对于时变场的情况，应将安培环路定理修正为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1.1-40}$$

$$\oint_l\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_S\boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{S}+\frac{\partial}{\partial t}\int_S\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{1.1-41}$$

$\boldsymbol{J}_d=\partial\boldsymbol{D}/\partial t$ 称为位移电流密度，式(1.1-40)称为安培-麦克斯韦环路定理。引入位移电流概念是麦克斯韦对电磁理论的重大贡献。麦克斯韦引入位移电流来修正安培环路定理，使其适合于电流连续性方程和高斯定理，在此基础上总结出完整的电磁场方程组——麦克斯韦方程组。

4. 麦克斯韦方程组

(1) 麦克斯韦方程组的基本形式

麦克斯韦方程组可以写成微分形式与积分形式。式(1.1-40)、(1.1-19)、(1.1-29)与(1.1-23)的集合构成麦克斯韦方程组的微分形式

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1.1-42a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.1-42b}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{1.1-42c}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho \tag{1.1-42d}$$

式(1.1-41)、(1.1-18)、(1.1-30)与(1.1-25)的集合构成麦克斯韦方程组的积分形式：

$$\oint_l\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_S\boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{S}+\frac{\partial}{\partial t}\int_S\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{1.1-43a}$$

$$\oint_l\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\frac{\partial}{\partial t}\int_S\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{1.1-43b}$$

$$\oint_S\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0 \tag{1.1-43c}$$

$$\oint_S\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_V\rho dV \tag{1.1-43b}$$

在一般情况下，麦克斯韦方程组的四个方程中的各物理量是位置和时间的矢量函数或标量函数。

因为我们讨论的是宏观电磁问题，$\boldsymbol{J}$ 和 ρ 分别代表自由电流密度和自由电荷密度的宏观

值

$$J = \lim_{S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \tag{1.1-44}$$

$$\rho = \lim_{V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \tag{1.1-45}$$

式中 $\Delta S \to 0$ 与 $\Delta V \to 0$ 不完全具有纯数学的意义，而称为物理无穷小。所谓物理无穷小是指其尺寸与媒质的宏观不均匀性和实验室仪器的尺寸相比是很小的，但与媒质的微观不均匀性相比是很大的，就是说与媒质中的原子或分子间的距离相比是很大的。因此，在物理无穷小体积内含有大量的原子或分子，使得按式(1.1-44)、(1.1-45)求得的 $\boldsymbol{J}$、ρ 有完全确定的意义。

场量 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 也指的是宏观值，就是说某点的场量是指以该点为中心的物理无穷小体积内该场量的平均值，这就使同一媒质中的物理量是一个连续函数，可对它进行微分运算。

(2) 麦克斯韦方程组的物理意义

麦克斯韦方程组的微分形式表示某点的场与场源的时空变化关系，它只适用于媒质的物理性质不发生突变的点。积分形式表示在任一闭合曲线及其所围成的面积内或任一闭合曲面及其所包围的体积内场与场源的时空变化关系。微分形式与积分形式的麦克斯韦方程组所表示的场与场源的关系是一致的。麦克斯韦方程组中两个旋度方程是表示电场与磁场相互作用的方程，这两个方程表明，电流与变化的电场产生磁场，而变化的磁场又产生电场。$\boldsymbol{J}$、$\partial \boldsymbol{D}/\partial t$ 是磁场的涡旋源，$-\partial \boldsymbol{B}/\partial t$ 是电场的涡旋源。麦克斯韦方程组中两个散度方程是表示磁场和电场各自性质的方程。其中第三个方程表示磁通的连续性，即不存在自由的磁荷；第四个方程表示电荷产生电场，而且自由电荷密度 ρ 是电场的发散源。

由上面的论述可知，电磁场力线的特点是：电力线由正电荷发出并终止于负电荷，或者是与磁力线交链的闭合曲线；磁力线是与电流或电力线交链的闭合曲线。

麦克斯韦方程组反映了电荷与电流激发电磁场以及电场与磁场相互转化的运动规律。在不存在电荷与电流的区域，电场与磁场通过本身的变化互相激发而运动传播。电磁场的内在矛盾是它存在和运动的主要因素，而电荷与电流则以一定的形式作用于电磁场。麦克斯韦方程组的重要特点是它揭示了电磁场的内在矛盾和运动。方程组明确指出，不仅电荷和电流可以激发电磁场而且变化的电场与变化的磁场也可以互相激发。因此，只要在某处发生扰动，由于电场与磁场互相激发，使它在空间中运动传播，形成电磁波。麦克斯韦首先从这些方程在理论上预言电磁波的存在，其传播速度等于光速，并指出光波就是一种电磁波。

麦克斯韦方程组不仅揭示了电磁场的运动规律，而且揭示了电磁场可以独立于电荷与电流之外而单独存在，这样就加深了我们对电磁场物质性的认识。

麦克斯韦方程组是麦克斯韦以完美的数学形式对电磁场规律的高度概括和总结，它深刻地反映了电磁场运动的实质和全部特性，经典电磁场的求解问题都是从麦克斯韦方程组出发讨论的，正如要确定任何质点的运动状态必须从牛顿方程出发来讨论一样。麦克斯韦方程组包含丰富的内容和深刻的物理意义。为了加深理解，我们引用伟大的物理学家爱因斯坦及波兰物理学家英费耳德评价麦克斯韦方程组的一段话：

“这个方程组的提出是牛顿时代以来物理学上一个重要的事件，这是关于场定律的定量

的描述。方程中所包含的内容比我们所能指出的要丰富得多。在它们简单的形式下隐藏着深奥的内容，这些内容只有靠仔细地研究才能显示出来，它是表示场的结构的定律。它不象牛顿定律那样，把此处发生的事件与彼处的条件联系起来，而是此处的现在的场只与最邻近的刚过去的场发生关系。假使我们知道此处的现在所发生的事件，这些方程便可帮助我们预测在空间稍为远一些、在时间上稍为迟一些会发生什么。”

必须指出，尽管麦克斯韦方程组在电磁理论中占有极其重要的地位，而且现在已经知道在高速运动的领域中该方程组也是正确的。但是在更进一步研究电磁现象时，仅仅依靠麦克斯韦方程组是不够的。例如，对于热辐射的能量分布、光电效应、原子的辐射等涉及物质的微观问题时，麦克斯韦方程组就不适用了，而必须借助于辐射的量子理论。但这已不属于本书研究范围。

最后还应指出，麦克斯韦方程组是在基本实验定律的基础上经过推广建立起来的。这种推广当初只是一种假定，其正确性要靠实践来检验。赫兹发现电磁波的实验及近代无线电技术的广泛应用完全证实了麦克斯韦方程组的正确性。

由总结实验结果而产生、又经实践而验证的麦克斯韦方程组及洛仑兹力公式，正确地反映了电磁场的运动规律以及电磁场与带电粒子相互作用的规律，成为经典电动力学的理论基础。把它们与带电体运动的力学运动方程联立起来，就可以完全确定电磁场与电荷的运动。

三、麦克斯韦方程组的各种表示形式

1、麦克斯韦方程组中的独立方程与非独立方程

麦克斯韦方程组中四个方程并不是完全独立的。麦克斯韦方程中两个旋度方程以及作为实验定律的电流连续性方程是独立的，即下列三个方程：

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1.1-42a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.1-42b}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{1.1-22}$$

是独立的。由以上三个方程可导出麦克斯韦方程组中两个散度方程（1.1-42c）与（1.1-42d）。例如，方程（1.1-42b）两端取散度，则得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})=0$$

上式表明$\nabla\cdot\boldsymbol{B}$与时间$t$无关。已知对于静态场（例如$t=0$时为静态场）$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，则对时变场也必有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{1.1-42c}$$

同样地，方程（1.1-42a）两端取散度，并与方程（1.1-22）联立消去$\boldsymbol{J}$，则得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho \tag{1.1-42d}$$

因此，两个散度方程（1.1-42c）与（1.1-42d）称为非独立方程。需要指出的是，虽然麦克斯韦方程组中两个散度是非独立方程，但这两个方程并不是多余的。根据矢量分析中的亥姆霍兹定理，一个在远区消失的矢量场是由它的旋度和它的散度共同唯一确定的。例如，在无源区域

($\rho=0$, $\boldsymbol{J}=0$)，要确定电磁场量$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、只有两个旋度方程是不够的，还必须考虑两个散度方程。此外，独立方程与非独立方程的区分并不是绝对的，我们亦可选择方程（1.1-42a）（1.1-42b）和（1.1-42d）为独立方程，由此可导出方程（1.1-42c）与（1.1-22），此时方程（1.1-42c）与（1.1-22）称为非独立方程。这样不同地选择独立方程是完全等价的。

2. 麦克斯韦方程组的限定形式与非限定形式

如上所述，我们可以选择麦克斯韦方程组中两个旋度方程以及电流连续性方程作为独立方程。这三个方程中有五个矢量函数$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{J}$和一个标量函数ρ，相当于共有十六个标量函数。以上三个独立方程只有七个标量方程，显然，仅由上述三个独立方程无法确定十六个未知标量函数。因此，这三个独立方程称为麦克斯韦方程组的非限定形式。为了确定上述各量，还必须考虑描述媒质特性的三个辅助方程

$$\boldsymbol{D}=f_1(\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{H}) \tag{1.1-46}$$

$$\boldsymbol{B}=f_2(\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{H}) \tag{1.1-47}$$

$$\boldsymbol{J}=f_3(\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{H}) \tag{1.1-48}$$

式(1.1-46)与(1.1-47)称为广义本构方程，式(1.1-48)称为广义欧姆定律。以上三个辅助方程提供了九个另外的标量方程，它们与三个独立方程联立，使未知数与方程数一致，构成麦克斯韦方程组的限定形式。

例如，对于各向同性的线性媒质，三个辅助方程简化为

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E} \tag{1.1-49}$$

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H} \tag{1.1-50}$$

$$\boldsymbol{J}=\sigma(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^{e}) \tag{1.1-51}$$

式中ε、μ、σ分别为媒质的介电常数，导磁率和导电率，$\boldsymbol{E}^{e}$为已知的局外场。局外场是指所有从所研究的电磁场系统以外提供能量的源，例如化学的、热力学的、甚至是电磁的(如振荡器或发电机)源。从场的观点来看，这些源常用一个局外电场强度来等效，故称为局外场。这常在电路系统中被采用。在网络系统中也有等效为负电阻的。若已知媒质电磁参数ε、μ和σ，则由麦克斯韦方程组中两个旋度方程可以消去$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{J}$，此时两个旋度方程中只含$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$，再加上电流连续性方程，则构成麦克斯韦方程组的限定形式

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\sigma(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^{e})+\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\boldsymbol{E}) \tag{1.1-52}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial}{\partial t}(\mu\boldsymbol{H}) \tag{1.1-53}$$

$$\nabla\cdot[\sigma(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^{e})]=-\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{1.1-54}$$

3. 麦克斯韦方程组的各种非限定形式

在研究媒质的宏观电磁特性时，通常引入两个媒质场矢量$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{M}$，它们定义为

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P} \tag{1.1-55}$$

$$\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M}) \tag{1.1-56}$$

式中$\boldsymbol{P}$为电极化强度矢量，$\boldsymbol{M}$为磁化强度矢量，ε_0、μ_0分别为真空的介电常数和导磁率。至