高等学校教材

# 高等代数

王湘浩　謝邦杰編

（1964 年修訂本）

人民教育出版社

高等学校教材

# 高　等　代　数

王湘浩　謝邦杰編

人民教育出版社

本书是 1961 年由編者主編的高等代数的修訂本．主要的变动是：(1)删去了綫性规划和宜于在計算方法課讲授的材料；(2)扩大了多項式和方程論的內容；(3)每节的后面配置了习題．

本书內容共分十二章，即消去法及矩陣、行列式、綫性相关及綫性方程組的理論、多項式的基本概念、因子分解、方程論、群环域、向量空間与綫性变换、特征根与特征向量、矩陣的若当标准形式、欧氏空間与$U$空間、二次型与$H$型等．

本书可作为綜合大学、高等师范学校数学各专业高等代数課程的教材．

# 高 等 代 数

(1964 年修訂本)

王湘浩　謝邦杰編

北京市书刊出版业营业許可证出字第2号

人民教育出版社出版（北京景山东街）

人 民 教 育 印 刷 厂 印 刷

新 华 书 店 北 京 发 行 所 发 行

各 地 新 华 书 店 經 售

统一书号K13010·948　开本 850×1168 1/32　印张 11 3/16

字数 280,000　印数51,001—56,500 定价（5）¥1.10

1961 年 6 月第 1 版　1964 年 6 月第 2 版　1964 年 6 月北京第 5 次印刷

# 序

1961年我們与其他几位同志合作以吉林大学的讲义为基础編写了一本"高等代数"，作为交流讲义由人民教育出版社出版.去年，我們收到了不少同志和教研室对这本书提出的許多宝貴意見，这些意見使我們感到必須对原书进行較大的修訂工作.

在題材的取舍上，这一修訂本和原书有不少出入.綫性規划一章完全删去了；这是由于經过試用許多同志都感到这一部分材料不适于放在基础課內.此外，我們删去了宜于在計算方法課中讲授的材料.增补的內容主要有多个文字多項式的基本概念，多个文字多項式的因式分解，有理域上多項式之分解和有理根的求法，三次四次方程，結式，联立方程，若当标准形式与空間的分解的关系以及环和域的基本概念.若教学时数不充裕，这些新增加的內容可以适当删減.

每节的后面都配置了习题.这些习题可以选作，学有余力的学生可以多作一些；此外，也可以酌量增添一些計算題.选配习題的工作是在張淑芝、陈登宣、牛凤文、刘叙华四位同志积极协助和参加之下完成的.

在章节的編排上我們也作了不少变动.原书第三章"矩陣与綫性方程組"在这里分成了三章放在最前面.第一章从綫性方程組的解法讲起，引导到矩陣，然后讲矩陣的运算，这样便可以使学生易于接受.我們认为矩陣的运算应当在較前边讲授并且在各种問題的处理上尽量多用矩陣，以便学生能够熟练地运用矩陣这一重要工具.初等变换在綫性代数中无論从計算或从理論的角度来看都起着基本性的作用，所以我們又特别强調这一方法.行列式

的定义仍采用数学归納法，因为，我們认为用展式直接定义会使学生感到突如其来。原书用数学归納法定义行列式之后立即推出行列式的展式：教学实踐表明，这样作由于推导較长不容易接受。因此，我們将行列式的展式移到后面。

群环域的基本概念在向量空間的前面讲授，这样作是为了让学生在具备一定的高等代数基本知識以后受到較为系統的抽象思維的鍛炼。

这一修訂本一定还有許多取舍不恰当和疏漏之处，仍望同志和同学們把各种意見都写下来寄給我們，以便进一步修改。

編　者

1963，3.

# 目　录

# 第一章　消去法及矩陣

## §1. 綫性方程組及消元法

高等代数是中学代数的继續和提高.

高等代数課的主要內容有两方面：一是綫性代数，一是多項式及方程論. 从本章到第三章是綫性代数的前一部分，其中心內容是綫性方程組. 中国古代重要的数学著作“九章算术”方程章詳細地討論了綫性方程組的解法，为綫性代数鋪下了第一块基石. 后来，由于数学其他方面和科学技术的需要，綫性代数才发展起来成为現在的面貌.

实际問題中出現的綫性方程組有时含有大量的未知数，未知数的个数和方程的个数也不一定相等. 这些方程組也不一定像在中学代数里那样具有唯一解. 因此，这里我們将要討論含任意多个未知数和任意多个方程的綫性方程組，其一般形式如下：

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 表未知数，$a_{11}$ 等及 $b_1$ 等为已知数，$m$ 和 $n$ 不一定相等.

**定义 1.** $n$ 元数列

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

說是方程組(1)的一个解，如果，在(1)中分别以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 代未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，(1)中各式都成为等式. 解方程組(1)就是求出(1)

的所有的解.

**定义 2.** 設有含同样未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的另一方程組

$$\left.\begin{array}{l} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1n}x_n=d_1, \\ c_{21}x_1+c_{22}x_2+\cdots+c_{2n}x_n=d_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{p1}x_1+c_{p2}x_2+\cdots+c_{pn}x_n=d_p. \end{array}\right\} \tag{2}$$

方程組(1)和(2)說是**等价**, 如果(1)的任意解必是(2)的解, (2)的任意解也必是(1)的解.

設甲, 乙, 丙等代表方程, $\lambda$, $\mu$ 等代表常数. $\lambda$甲表示以 $\lambda$ 乘甲的两边所得到的方程, 甲+乙表示以甲的两边对应地加乙的两边所得到的方程.

**命題.** 設甲是方程組(1)中的一个方程, $a\neq 0$. 以 $a$ 甲代甲所得的方程組和(1)等价. 設乙是(1)中另一方程, $\lambda\neq 0$. 以 $\lambda$ 甲 $+\mu$乙代甲所得的方程組(1')和(1)等价.

**证:** 命題的第一部分是很明显的. 今证第二部分. 命丙表 $\lambda$ 甲 $+\mu$ 乙, 于是甲等于 $\lambda^{-1}$丙$+(-\lambda^{-1}\mu)$乙. (1)的任意解适合甲和乙, 因而适合丙, 所以是(1')的解. (1')的任意解适合乙和丙, 因而适合甲, 所以是(1)的解. 因之, (1')和(1)等价.

解綫性方程組的方法主要就是利用上述命題逐步消去未知数而得到一系列等价的方程組, 最后便可以得到方程組的所有的解.

**例 1.** 解下列方程組:

$$\checkmark\ 2x-y+3z+2w=0, \tag{3}$$

$$\checkmark\ 9x-y+14z+2w=1, \tag{4}$$

$$\checkmark\ 3x+2y+5z-4w=1, \tag{5}$$

$$\checkmark\ 4x+5y+7z-10w=2. \tag{6}$$

**解:** (6)−2(3)得(7)代(6), (4)−3(5)得(8)代(4), 2(5)−3(3)得(9)代(5), 已被代替的方程前面画一勾以示意:

$$\checkmark\ 7y+z-14w=2, \tag{7}$$

$$\checkmark \quad -7y-z+14w=-2, \tag{8}$$

$$\checkmark \quad 7y+z-14w=2. \tag{9}$$

(8)+(7)得(10)代(8)，(9)−(7)得(11)代(9)，7(3)+(7)得(12)代(3)：

$$\checkmark \quad 0=0, \tag{10}$$

$$\checkmark \quad 0=0, \tag{11}$$

$$\checkmark \quad 2x+22z=2. \tag{12}$$

这样，原方程組就化成由(7)，(10)，(11)，(12)組成的方程組，其中(10)，(11)二式显然可以删去．由(12)解出 $x$ 得(13) 代 (12)，由(7) 解出 $y$ 得 (14)代(7)：

$$x=-11z+1, \tag{13}$$

$$y=-\frac{1}{7}z+2w+\frac{2}{7}. \tag{14}$$

于是，原方程組等价于(13)，(14)組成的方程組．取 $z$ 为任意数 $s$，$w$ 为任意数 $t$，代入(13)，(14)得 $x=-11s+1$，$y=-\frac{1}{7}s+2t+\frac{2}{7}$．这样就得到一个解：

$$\left(-11s+1,\ -\frac{1}{7}s+2t+\frac{2}{7},\ s,\ t\right). \tag{15}$$

反之，設$(q, r, s, t)$是任意解．代入(13)，(14)得 $q=-11s+1$，$r=-\frac{1}{7}s+$ $+2t+\frac{2}{7}$，因而任意解也必然可以写成(15)的形式．所以，(15)是原方程組的**普遍解**，从而我們便求出了原方程組的所有的解．任意取$s$，$t$的值代入(15)便得到一个特殊解，可見原方程組有无穷多个解．(15)也可以表示如下：

$$\left.\begin{aligned} x&=-11s+1,\\ y&=-\frac{1}{7}s+2t+\frac{2}{7},\\ z&=s,\\ w&=t. \end{aligned}\right\}$$

**例 2.** 解下列方程組：

$$\checkmark \quad 3x+2y-z+2w=1, \tag{16}$$

$$x-3y+2z-4w=-2, \tag{17}$$

$$\checkmark \quad 5x-4y+3z-6w=3. \tag{18}$$

**解**：(16)−3(17)代(16)，

$$11y-7z+14w=7. \tag{19}$$

(18)－5(17)代(18),

$$11y-7z+14w=13. \tag{20}$$

(20)－(19)代(20),

$$0=6. \tag{21}$$

于是,原方程組等价于(17), (19), (21)組成的方程組. 但(21)显然不能成立,所以原方程組无解. 我們断定了原方程組无解也就是求出了原方程組的所有的解.

## 习 题

1. 解下列綫性方程組:

$$\left.\begin{aligned} 7x+3y&=2,\\ x-2y&=-3,\\ 4x+9y&=11. \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=4,\\ 2x+y-z&=2,\\ 3x+2y\quad&=1. \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3+x_4&=1,\\ x_1-2x_2+x_3-x_4&=0,\\ x_1-2x_2+x_3+5x_4&=5. \end{aligned}\right\}$$

2. 解綫性方程組

$$\left.\begin{aligned} x_2+x_3+\cdots+x_{n-1}+x_n&=1,\\ x_1\quad+x_3+\cdots+x_{n-1}+x_n&=2,\\ x_1+x_2\quad+\cdots+x_{n-1}+x_n&=3,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\\ x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n-1}\quad&=n, \end{aligned}\right\}$$

其中 $n\geqslant 2$.

3. 綫性方程組(1)等价于(2),(3)等价于(4),則由(1)之所有方程与(3)之所有方程共同作成的新方程組与(2)和(4)的所有方程作成之方程組等价。

4. 設有方程組,其方程为甲$_1$, …, 甲$_{m-1}$, 甲$_m$. 若甲$_m$可以写成其余方程的"綫性組合",例如

$$甲_m=\lambda_1 甲_1+\cdots+\lambda_{m-1} 甲_{m-1},$$

則删去甲$_m$所得的方程組与原方程組等价.

## §2. 分离系数法

試看下列普遍的綫性方程組:

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m.\end{array}\right\} \tag{1}$$

把未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的系数按它們在(1)中的位置加以排列我們得到下面的一个“表”:

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}. \tag{2}$$

如果再把常数項 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 按它們在(1)中的位置填在(2)的最末一列,便有下面的“表”:

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m\end{pmatrix}. \tag{3}$$

这样的表称为矩陣.

**定义 1.** $mn$ 个数 $a_{ij}$ $(i=1, 2, \cdots, m, j=1, 2, \cdots, n)$ 排成的矩形表

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix},$$

叫做一个$m$行$n$列的**矩陣**. 横的各排称为矩陣的**行**，纵的各排則称为**列**. $a_{ij}$称为矩陣$A$的第$i$行第$j$列的**元素**. 通常用大写字母$A, B, \cdots$代表矩陣，例如上列矩陣記为$A$或$A_{mn}$. 上述矩陣又可記为$(a_{ij})$或$(a_{ij})_{mn}$. 如果$m=n$，則矩陣$A$称为$n$**阶正方矩陣**.

**定义 2.** 矩陣(2)及(3)分别称为方程組(1)的**系数矩陣**及**增广矩陣**.

增广矩陣可以看作是方程組的簡便写法. 用上节所說的方法解方程組可以不必每次写出方程而較簡便地就增广矩陣来进行簡化. 以$a\neq 0$乘某个方程等于以$a$乘增广矩陣的一行，把方程乙的$\lambda$倍加到方程甲代替方程甲等于把增广矩陣某行的$\lambda$倍加到另一行. 用这两种"变换"来变化方程組的增广矩陣所得到的矩陣代表等价的方程組. 此外，我們还可以顚倒各行的次序或顚倒前$n$列的次序，这等于顚倒各方程式的次序和顚倒未知数的次序.

利用增广矩陣，不但在实际解一个方程組时比較簡便，在一般地来討論方程組的解时也比較方便. 現在我們就来看利用上述几种变换可以把增广矩陣(3)化簡成什么形式，从而便可以看出綫性方程的解究竟有哪些可能情形.

若(3)中所有$a_{ij}=0$，則不必再化簡. 設$a_{ij}$不都是0，顚倒前$n$列的次序可以使第一列有非零元素. 若$a$, $b$是第一列中的两个非零元素，将含$a$的那一行的$-a^{-1}b$倍加到含$b$的那一行則$b$化为0. 这样作下去可以使第一列恰含一个非零元素，比如$c$. 以$c^{-1}$乘含$c$的那一行而后顚倒各行的次序，則矩陣可以化为下面的形式:

$$B=\begin{bmatrix} 1 & * & \cdots & * & c_1 \\ 0 & & & & c_2 \\ \vdots & & A_1 & & \vdots \\ 0 & & & & c_m \end{bmatrix}.$$

若 $A_1$ 中的元素都是 0, 則不必再化. 否則顛倒第 2 到第 $n$ 列的次序可以使 $A_1$ 的第一列有一个非零元素. 仿上可以将 $B$ 化为下面的形式:

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & & & & * \\ \vdots & \vdots & & A_2 & & \vdots \\ 0 & 0 & & & & * \end{bmatrix}.$$

把第二行的适当的倍数加到第一行, 这个矩陣又可以化为下面的形式:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & & & & * \\ \vdots & \vdots & & A_2 & & \vdots \\ 0 & 0 & & & & * \end{bmatrix}.$$

如此类推, 最后便把增广矩陣(3)化为下面的形式:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & c_{rr+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ \vdots & & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

其中 $r \geqslant 0$, $r \leqslant m$, $r \leqslant n$. 与(4)相当的方程組为

$$\left.\begin{aligned}
y_1+c_{1r+1}y_{r+1}+\cdots+c_{1n}y_n&=d_1,\\
y_2+c_{2r+1}y_{r+1}+\cdots+c_{2n}y_n&=d_2,\\
&\cdots\cdots\\
y_r+c_{rr+1}y_{r+1}+\cdots+c_{rn}y_n&=d_r,\\
0&=d_{r+1},\\
&\cdots\cdots\\
0&=d_m,
\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

其中 $y_1,\cdots,y_n$ 表示顛倒次序后的 $x_1,\cdots,x_n$. 这样，我們便可以就方程組(5)来看方程組(1)的解的情況. 今作如下的討論:

1° 若 $r<m, d_{r+1},\cdots,d_m$ 不全为 0, 則方程組(5)无解. 事实上，对任何一組 $y_1,\cdots,y_n$ 的值，(5)中最后 $m-r$ 个等式不可能成立. 既(5)无解，故(1)亦无解.

2° 若 $r=m$ 或 $r<m$ 而 $d_{r+1},\cdots,d_m$ 全为 0, 則方程組(5)成为

$$\left.\begin{aligned}
y_1+c_{1r+1}y_{r+1}+\cdots+c_{1n}y_n&=d_1,\\
y_2+c_{2r+1}y_{r+1}+\cdots+c_{2n}y_n&=d_2,\\
&\cdots\cdots\\
y_r+c_{rr+1}y_{r+1}+\cdots+c_{rn}y_n&=d_r.
\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

当 $r=n$ 时，方程組(6)有唯一解$(d_1,\cdots,d_n)$. 只要把 $d_1,\cdots,d_n$ 的次序适当地加以排列，我們便得到(1)的唯一解.

当 $r<n$ 时，任取 $y_{r+1},\cdots,y_n$ 的一組值 $t_1,\cdots,t_{n-r}$, 代入(6)即可解出 $y_1,y_2,\cdots,y_r$ 的对应的值，因而便得到(6)的一个解:

$$\left.\begin{aligned}
y_1&=d_1-c_{1r+1}t_1-\cdots-c_{1n}t_{n-r},\\
y_2&=d_2-c_{2r+1}t_1-\cdots-c_{2n}t_{n-r},\\
&\cdots\cdots\\
y_r&=d_r-c_{rr+1}t_1-\cdots-c_{rn}t_{n-r},\\
y_{r+1}&=t_1,\\
&\cdots\cdots\\
y_n&=t_{n-r}.
\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

設$(s_1, \cdots, s_r, t_1, \cdots, t_{n-r})$是(6)的任意解. 代入(6)而解出$s_1, \cdots, s_r$便看到$s_1, \cdots, s_r$可以表为(7)的前$r$式右边的形式. 因之, (7)是(6)的, 因而也是(1)的, 普遍解. 我們看到, 在这一情形下, (1)有无穷多个解.

**定义** 3. 常数項都是 0 的方程組

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{array}\right\} \tag{8}$$

称为**齐次方程組**. 設有非齐次方程組, 如(1), 把所有常数項換为0所得的齐次方程組, 如(8), 称为**对应**于原方程組的齐次方程組.

显然, $(0, \cdots, 0)$必是齐次方程組的解, 这个解称为齐次方程組的**零解**或**平凡解**.

**定理** 1. 若齐次方程組中方程的个数小于未知数的个数, 則齐次方程組必有非零解.

**証**: 試看齐次方程組(8). 用前面的方法化簡所得的方程組(5)中$d_1, \cdots, d_m$自然都是 0. 因为$r \leqslant m$而題設$m<n$, 故$r<n$, 因而現在的情形归于前面的討論中$2^\circ$的第二种情形. 所以方程組有无穷多个解, 从而必有非零解.

**定理** 2. 設方程的个数和未知数的个数相等. 于是, 非齐次方程組有唯一解必要而且只要对应的齐次方程組只有零解.

**証**: 試看方程組(1)和(8), 其中$m=n$. 将(1)化簡为(5)的形式. 在化簡的过程中相应地化簡(8), 我們便得到下面的方程組:

$$\left.\begin{array}{l} y_1+c_{1r+1}y_{r+1}+\cdots+c_{1n}y_n=0, \\ y_2+c_{2r+1}y_{r+1}+\cdots+c_{2n}y_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_r+c_{rr+1}y_{r+1}+\cdots+c_{rn}y_n=0, \end{array}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{array}{l} 0=0, \\ \cdots\cdots \\ 0=0. \end{array}\right\}$$

若(5)有唯一解，則(5)必归于 $2^\circ$ 的第一种情形，即 $r=n=m$；因为(9)的左边和(5)的左边完全相同，所以在(9)中也有 $r=n=m$，因而(9)也归于 $2^\circ$ 的第一种情形，故(9)只有零解．同理，若(9)只有零解，則(9)归于 $2^\circ$ 的第一种情形，即 $r=n=m$；所以在(5)中也有 $r=n=m$，因而(5)也归于 $2^\circ$ 的第一种情形，故(5)有唯一解．

这两个定理在应用上是非常重要的．

## 习　　题

1．用分离系数法解下列綫性方程組：

$$\left.\begin{aligned} x_1-2x_2+3x_3-4x_4&=4,\\ x_2-x_3+x_4&=-3,\\ x_1+3x_2\qquad-3x_4&=1,\\ -7x_2+3x_3+x_4&=-3. \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1-x_2+x_3-x_4&=1,\\ 2x_1-x_2\qquad-3x_4&=2,\\ 3x_1\qquad-x_3+x_4&=-3,\\ 2x_1+2x_2-2x_3+5x_4&=-6. \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2\qquad-3x_4+2x_5&=1,\\ x_1-x_2-3x_3+x_4-3x_5&=2,\\ 2x_1-3x_2+4x_3-5x_4+2x_5&=7,\\ 9x_1-9x_2+6x_3-16x_4+2x_5&=25. \end{aligned}\right\}$$

2．若化简增广矩陣时不許顚倒各列的次序，則增广矩陣可以化简成什么形式？

## §3．矩陣的运算

我們在§2中引进了矩陣并利用綫性方程組的增广矩陣来解