L.尼伦伯格著

线性偏微分方程讲义

上海科学技术出版社

线性偏微分方程讲义

L. 尼伦伯格 著
陆柱家 译

上海科学技术出版社

LECTURES ON LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

L. Nirenberg

American Mathematical Society, 1973

线性偏微分方程讲义

L. 尼伦伯格 著

陆柱家 译

上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 2.875 字数 60,000

1980 年 6 月第 1 版 1980 年 6 月第 1 次印刷

印数 1—7,300

书号: 13119·854 定价(科四): 0.29 元

绪　言

最近二十年来，偏微分方程理论有了显著的发展. 新的问题被提出了，新的有力的工具也产生了，从而常常导致老问题获得较深刻的理解和解决.

这本讲义致力于线性偏微分方程理论中的若干课题. 从比较初等的叙述性的材料开始，然后才接触到现代的发展和技巧. 对于非专业人们而言，这是一个对于一些现代问题和观点的介绍. 它包含着老的成果，同时也包含新的成果. 因为我希望考察一些深刻的结果，有时就必需技巧性强一些，但同时也尽力描述一下必要的背景.

第 I 章论述一个颇为古典的问题，即通过适当的自变量变换，把(一阶)算子组化为像 Cauchy-Riemann 方程组这样简单的典则形式. 除了少数技巧性要求(这也是描述了的)外，这部分内容或多或少是自足的. 在 § 1 中，我们介绍了无解的非齐次偏微分方程的 Lewy 例的一个变种. 把方程化为典则形式的问题与齐次方程非平凡解的存在性有关. 在 § 2 和 § 3 中，给出了只有平凡解或狭义解的齐次方程的例子；这些结果是新的. 在 § 4 中，用 Malgrange [25] 的方法处理了把 R^{2n} 中 n 个方程的组变换为 C^n 中的 Cauchy-Riemann 算子组的问题. 虽然我们对于 Malgrange 的推理没有增加新的东西，但在我看来，这种推理是这样惊人，以致我觉得有必要在这本讲义里向尽可能广的读者再次介绍它.

在第 II 章中，我们致力于一些现在已被证明是如此有用

的工具，即拟微分算子，以及广义函数波前集(或奇谱)的概念，并且，我们介绍了它们的几个应用. §5 中给出了一类(稍狭窄一些的)拟微分算子的定义和概观. 在 §6 和 §7 中，作为这类拟微分算子的值得注意的应用，我们证明了 Calderón [2]有关始值问题的局部唯一性的一个定理，并将其结果稍加推广.(这也许是这本讲义里技巧性最高的部分.)接着，在 §8 中引进了波前集的概念，并证明了 Hörmander 的有关奇性传播的一个漂亮的定理[15]. 最后，在 §9 中，我们推广他的结果去概括由于波前集的"反射"而产生的边界处的性状，这个波前集满足某些"边界条件". 这个结果是 P. D. Lax 和作者的正在进行中的共同工作的一部分.

本书中我们将用比较标准的记号. 对于定义于 R^n 的一个区域中的 $x=(x^1, \cdots, x^n)$ 的函数 $u(x)$，我们使用下述记号：$\partial_{x^j}=\partial/\partial x^j$, $D_j=\partial_{x^j}/i$, $D=(D_1, \cdots, D_n)$. 有时，我们用下标表示微商 $u_x=\partial u/\partial x$，等等. 对于一组非负整数的多重指标 $\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$ 是一个 $|\alpha|=\sum\limits_1^n \alpha_j$ 阶的微商. $\alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!$ 的倒数将作为系数出现于 Taylor 级数展开式中. 在 Fourier 变换中，$\xi=(\xi_1, \cdots, \xi_n)\in R^n$ 将起着对偶变量的作用，并且，我们令 $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$. 一个线性偏微分算子是系数为 x 的函数(这里，它们总是 C^∞ 的)的 D 的多项式：

$$P(x, D)=\sum_{|\alpha|<m} a_\alpha(x)D^\alpha.$$

相应的多项式 $P(x, \xi)=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ 被称为算子 P 的(全)算符，它的最高次齐次部分 $\sum\limits_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ 被称为 P 的主算符，记为 p.

读者将在文献中找到这里所讨论的课题的更多的资料.

我们特别提醒大家注意 Hörmander[17] 的讲义，那个讲义描述了很多新的发展；也请注意(即将出版的)[注] 1971 年 8 月在 Berkeley 由美国数学会主办的偏微分方程夏季讨论班的论文集 (Proceedings of the American Mathematical Society Summer Institute on Partial Differential Equations, Berkeley, August 1971.)。

[注] 现已出版. ——译者注

目　　录

第 I 章

化一阶算子组为典则形式的方法

1. 一 阶 方 程

让我们从最简单的例子开始. 这个例子如同方向导数, 它是作用在实值函数 $w(x)$ 上的实系数一阶线性偏微分算子:

$$(1.1)\qquad Pw=\sum_{1}^{n} a^j(x)\,(\partial w/\partial x^j),$$

其中 $a^j(x)$ 是实的, 而 $x=(x^1, \cdots, x^n)\in\Omega$, $\Omega\subset R^n$ 为开集. 在 Ω 中的每一点 x, 给出一个光滑变动的(C^∞)向量

$$a(x)=(a^1, \cdots, a^n),$$

P 对函数 w 的作用是沿 a 的方向对 w 求导数, 此算子 P 也称为一个向量场. 我们用求这个向量场的"积分曲线"来解方程

$$Pw=f.$$

所谓积分曲线, 就是具有下述性质的曲线: 在每条曲线上的每一点处, 在该点的向量 a 与此曲线相切. 若这样的曲线由

$$x=x(t)$$

给出, 这里 t 作为实参数, 那么 $x(t)$ 满足所谓"特征方程"的常微分方程组

$$(1.2)\qquad dx^j/dt=a^j(x(t)), \qquad j=1, \cdots, n.$$

从常微分方程的理论知道, 通过 Ω 中的每一点 x_0 恰有一条积分曲线. 如果我们把一个函数 $w(x)$ 限制在这样的一条曲线上, 在此曲线上 w 就变为 t 的函数, 则得到(用求和的约定)

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x^j}\frac{dx^j}{dt}=f.$$

这样，在积分曲线上 w 满足一个简单的常微分方程，因而 w 的值通过给出在横截于该向量场的超曲面（一个 $n-1$ 维曲面）上的初始值而唯一确定（至少是局部地）.

我们可以局部地引进新自变量 $y=(y^1, \cdots, y^n)$，把积分曲线“变直”，并把微分算子(1.1)化为特别简单的形式：

$$P=\lambda\frac{\partial}{\partial y^n},\quad \lambda\neq 0. \tag{1.3}$$

此时，主算符(leading symbol) $a^j\xi_j$ 变为 $\lambda\eta_n$. 这样，$Pw=0$ 的任一解即为 $(y^1, \cdots, y^{n-1})$ 的一个任意函数. 所以我们看到，微分算子 P 的局部的研究只包含常微分方程组(1.2)和算子 $\partial/\partial y^n$. 然而，用以决定积分曲线或特征曲线的方程组(1.2)是非线性的——即使我们是从作用在 w 上的线性算子 P 出发的.

现在来考察一阶算子(1.1)，其中不仅系数，而且连 w 也允许为复值的. 任一这样的算子可写为

$$P=P_1+iP_2,$$

其中 P_1 和 P_2 是向量场，即具有实系数的算子. 如果 P_1 和 P_2 处处线性相关，即它们都是某一算子 P_3 的实倍数，那么 P 是 P_3 的一个(复)倍数，因此 P 的研究被归结为上面我们已描述过的 P_3 的研究. 这样，要研究的下一个有代表性的情形即为当 P_1 和 P_2 是处处线性无关的情形.

这中间最熟悉的例子是在具有坐标 (x, y) 的 R^2 中的 Cauchy-Riemann 算子：

$$P=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \tag{1.4}$$

这里 $z=x+iy$. 用 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ 表示 P 和用 $\partial/\partial z$ 表示 $\frac{1}{2}(\partial/\partial x-i\partial/\partial y)$ 是方便的,因为此时一个函数 $w(x,y)$ 的微分取下述形式:

$$dw=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy=\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}d\bar{z}+\frac{\partial w}{\partial z}dz.$$

满足齐次 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=0,\quad 即\ \frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

的函数 $w=u+iv$ 的研究涉及到解析函数理论. 解析函数或全纯函数的经典文献不考虑非齐次方程

(1.5) $$\partial w/\partial \bar{z}=f.$$

然而,在解析函数理论的近代处理方法中,关于非齐次方程的结果在研究解析函数时被证明是很有用的. 对于"好"的函数 f, (1.5)在一区域 Ω 中的解由(这里 $\zeta=\xi+i\eta$)

$$w(z)=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\xi\,d\eta$$

给出;这个公式导出解的许多性质,我们介绍读者看Hörmander[13] 的第一章,若他对(1.5)的研究如何导出解析函数方面的结果感兴趣的话.

现在对于 $n=2$ 考虑一般的算子

$$P=P_1+iP_2,$$

其中 P_1 和 P_2 是 Ω 中线性无关的(实)向量场. 这个算子是椭圆的. 值得注意的是: 局部地, 此算子并不比 Cauchy-Riemann 算子更一般些. 事实上,存在新的局部坐标(x, y), $z=x+iy$,使 P 取下述形式:

$$P=\lambda\frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

这里 λ 是一非零因子. 这样, 方程 $Pw=f$ 就局部地等价于

$w_{\bar{z}}=f/\lambda$. 因此算子 P 导致一个 Ω 中的"复结构"(complex structure); $Pw=0$ 的解变为关于此结构的全纯函数; 特别, 它们都是类 C^∞ 中的元素. 局部坐标 z 作为 $Pz=0$ 的使 Re grad z 和 Im grad z 线性无关的局部解而被得到. 如果 z 是一个这样的局部解, 那么用坐标 z 和 $\bar{z}$ 表示, 算子 P 必定有形式 $P=\lambda\partial/\partial\bar{z}+\mu\partial/\partial z$, 但是其中 $\mu=Pz=0$. 这样的局部解的存在性的证明不是显然的, 例如可参阅 Courant 和 Hilbert [5, 第 4 章, § 8].

其次, 转到 $n>2$ 和 $P=P_1+iP_2$, 这里 P_1 和 P_2 在 Ω 中线性无关. 在 Ω 中的每个点处, 这两个向量场生成一个二维平面. 尝试把在处理单个向量场 (1.1) 时用到的方法加以推广, 即求一族二维积分曲面, 这是合理的. 这些积分曲面有这样的性质: 在它们中的任一个上的任一点处, 两个向量场都与其相切. 一般这是不可能的. 经典的 Frobenius 定理给出了一个使此成立的充要条件. 这个条件是: 算子 P_1 和 P_2 的交换子 (commutator) $[P_1, P_2]=P_1P_2-P_2P_1$ 是 P_1 和 P_2 的线性组合. 如果这个条件被满足, 那么, 由 Frobenius 定理, 集合 Ω 被积分曲面——这些曲面通过 Ω 的每一点——所分片 (一次覆盖). 这时, 算子 P_1, P_2, 因而算子 P 不超出每一曲面而作用. 这意味着, 在每一曲面 S 中, 我们有上述情形的结论: P 决定了 S 上的一个复结构.

现在假设 Frobenius 可积条件不成立, 即, P_1, P_2 和 $[P_1, P_2]$ 是线性无关的. 奇怪的现象会发生. 1957 年 Hans Lewy [22] 提出了现在著名的 R^3 中这样算子的例:

$$(1.6)\qquad P=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^1}+i\frac{\partial}{\partial x^2}\right)+i(x^1+ix^2)\frac{\partial}{\partial x^3}.$$

它有下述性质: 对很多(在某种意义下) C^∞ 函数 f, 方程

$$Pw=f$$

在任何开集中没有解. 这里

$$P_1=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^1}-x^2\frac{\partial}{\partial x^3},\quad P_2=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^2}+x^1\frac{\partial}{\partial x^3},$$

$$[P_1,\ P_2]=\frac{\partial}{\partial x^3}.$$

其后，Hörmander 立刻得到任何阶的任何线性偏微分方程 $Pw=f$ 的局部可解性的一个一般的必要条件. 在

$$P=P_1+iP_2+c$$

的情形，这里 P_1, P_2 是向量场(不必线性无关)，这个必要条件是，在每一点，$[P_1,\ P_2]$是 P_1 和 P_2 的线性组合；参阅[12, §6.1].

下面的 R^2 中的算子或许是上面的条件不成立的最简单的情形：

(1.7) $$P=\frac{\partial}{\partial x}+ix\frac{\partial}{\partial y}.$$

这里 $P_1=\frac{\partial}{\partial x}$, $P_2=x\frac{\partial}{\partial y}$, 且$[P_1,\ P_2]=\partial/\partial y$ 除了在 $x=0$ 上之外，处处皆为 P_1 和 P_2 的线性组合. 不可解方程的很多简单的例子已发表了.

现在我们来描述由 Grushin[11] 给出的一个例，它是 Garabedian[10] 的一个例的修改. 它是关于下述方程的：

(1.8) $$\frac{\partial w}{\partial x}+ix\frac{\partial w}{\partial y}=f(x,\ y).$$

首先我们注意，如 $f(x,\ y)$是实解析的(即 $\mathrm{Re}\,f$ 和 $\mathrm{Im}\,f$ 是解析的)，则从 Cauchy–Kowalewski 定理得到，(1.8)在原点的一个邻域中有解析解. 而且，若 f 是 C^∞ 函数，则从前面的讨论知道，在任一不在 y 轴上的点的一邻域中，(1.8)是可解的.

不可解的例 令 D_n, $n=1, 2, \cdots$, 是 (x, y) 平面的右半平面 $(x>0)$ 中的闭的不交的圆盘的一个任意的序列，D_n 的中心在 $(x_n, 0)$，这里 $x_n>0$，且 $x_n\to 0$. 设 $f(x, y)$ 是一任意选择的具有紧支集的 C^∞ 函数，它是 x 的偶函数，在 D_n 外且 $x\geqslant 0$ 处等于零，并且使

$$\iint_{D_n} f\,dx\,dy\neq 0 \quad 对 \quad n=1, 2, \cdots.$$

这样的函数 f 容易被构造出来.

定理 1 如果 f 满足上面的条件，那么在原点的任一邻域中，(1.8) 没有属于 C^1 的解.

这个定理的证明容易加以推广（参看[11]），去证明在原点的任一邻域中不存在广义函数解.

证明 假设 w 是 (1.8) 在原点的某一邻域 Ω 中的解. 把 w 分解为 $w=u+v$，作为关于 x 的它的奇部和偶部的和. 因为 f 关于 x 是偶的，我们看到，方程 (1.8) 的偶部是

$$\frac{\partial u}{\partial x}+ix\frac{\partial u}{\partial y}=f. \tag{1.9}$$

特别，在 $x\geqslant 0$ 中 (1.9) 成立，同时，$u(0, y)=0$. 若在区域 $x\geqslant 0$ 中我们引进新的变量 $s=x^2/2$，则 $\partial/\partial s=x^{-1}\partial/\partial x$，因此，(1.9) 除以 x 后我们得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial s}+i\,\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{\sqrt{2s}}f(\sqrt{2s}, y), & 对\ s\geqslant 0,\\ u=0, & 对\ s=0.\end{cases}$$

这样，u 在圆盘 D_n 的外部满足齐次 Cauchy-Riemann 方程 $\frac{1}{2}((\partial u/\partial s)+i(\partial u/\partial y))=0$，因此 u 是复变量 $s+iy$ 的一个全纯函数. 因为这些圆盘的并集的余集是连通的，且因为在 $s=0$ 上 $u=0$，从关于全纯函数的著名的唯一性定理我们推

得，在圆盘 D_n 的外部 $u\equiv 0$. 特别，在每一圆盘 D_n 的边界上 $u=0$. 但是，如果我们对(1.9)应用 Green 公式，则得到

$$\iint_{D_n} f\,dx\,dy=\iint_{D_n}(u_x+ixu_y)\,dx\,dy=\oint_{\partial D_n}(u\,dy-ixu\,dx)=0,$$

这与我们的假设矛盾.　证毕.

近年来，非齐次纯量(复)方程的局部可解性问题已经有很多的研究. 例如可参阅[28]，[8]，[17]和[34]，在那里可以找到更多的文献.

2. 齐 次 方 程

在由 Lewy[22] 给出的不可解方程的例——$Pu=f$ 在 R^3 内——中，方程在任一开集中无解. 正如 Lewy 指出的，它有下述奇怪的推论：在任一开集中，方程 $(P-f)u=0$ 的唯一解 u 是 $u\equiv 0$. 因为若在某一开集中 $u\neq 0$，则在那里 $w=\log u$ 是方程 $Pw=f$ 的一个解. 因此，Lewy 提出下述问题：一阶齐次方程

$$Pw=\sum a^j\frac{\partial w}{\partial x^j}=0,\quad \sum|a^j|\neq 0,$$

是否恒有局部非平凡解，或是否存在这样的算子，对此算子，$w\equiv$常数是唯一的局部解.

这个有趣的问题的提出也与 Lewy 的另一篇论文[21]有关，我想叙述一下这篇论文的主要结果. 也可以参阅[13]中的定理 2.6.13. 令 P 是 R^3 的原点的某一邻域 Ω 中的复系数一阶算子：

$$P=\sum_1^3 a^j\frac{\partial}{\partial x^j}=P_1+iP_2,\ \ \sum|a^j|\neq 0,$$

其中，P_1, P_2 和 $[P_1, P_2]$ 线性无关. 假设 z 和 w 是 $Pw=0$ 在

Ω 中的两个 C^2 解，它们的梯度是线性无关的(在复域上)．显然，z 和 w 的任一全纯函数 $h(z, w)$ 也是此齐次方程的一个解．用 S 表示由 $(z(x), w(x))$ 所得到的 $\mathbf{C}^2$ 中的三维曲面；由于上面的条件，不难看出，S 是一个正规曲面．令 u 是 $Pu=0$ 在 Ω 中的一个 C^1 解．因此不妨认为 u 是 S 上的函数，并且，u 可以被延拓到 $\mathbf{C}^2$ 中 S 的一侧(S 是强拟凸的 (strongly pseudo-convex)，仅依赖于 P, z, w)，作为 (z, w) 的全纯函数．反之，在 S 的任一侧 S_+ 中的、(z, w) 的任一全纯函数 u，在 $S_+\cup S$ 中它属于 C^1，则在 S 上满足 $Pu=0$．

这样，这个结果导致下述问题：我们能否找到具有线性无关梯度的 $Pw=0$ 的两个解？或者，能否找到一个使 $\operatorname{grad} w\neq 0$ 的解 w？这后一问题是与这样的问题密切相关的：找新的自变量，记为 x, y, t，有 $x+iy=w$，使 P 取作简单的形式：

$$P=\lambda\left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}}+\sigma\frac{\partial}{\partial t}\right),\quad \lambda\neq 0. \tag{2.1}$$

事实上，如果 w 是 $Pw=0$ 的一个解，且 Re grad w 和 Im grad$w$ 线性无关，那么，Re w, Imw 和第三个实变量 t 即可作为新的自变量而被引进，因此 P 必定有形式(2.1)．

我们将介绍一个 R^3 中的算子 $P=P_1+iP_2$，其中 P_1, P_2 和 $[P_1, P_2]$ 线性无关，并使得最后一个问题的回答是否定的．在介绍前，让我们看一个形为

$$P=\frac{\partial}{\partial x}+ix\rho(x, y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.2}$$

的 R^2 中算子 $P=P_1+iP_2$ 的简单的例子，它使得 $[P_1, P_2]$ 不是 P_1 和 P_2 的线性组合，这里 ρ 是原点的某一邻域中正的 C^∞ 函数．一个类似的问题是，是否能局部地找到新的自变量 (ξ, η)，使该算子变成方程(1.7)——$\partial/\partial\xi+i\xi\partial/\partial\eta$——的倍数，

即 $\rho=1$. 如果能够的话，那么 $w=\xi^2/2+i\tau$ 将是

(2.3) $$Pw=0,\ \mathrm{grad}\, w(0,\ 0)\neq 0$$

的一个解.

我们将构造一个特殊的 C^∞ 正函数 ρ, 使得在原点的某一邻域中 $Pw=0$ 的唯一解 w 是 $w\equiv$ 常数[注1]. 函数 $\rho(x,\ y)$是这样的形式:

(2.4) $$\rho(x,\ y)=1+x\phi(x,\ y),$$

其中 ϕ 是一个非负 C^∞ 函数，它对 x 而言是偶函数，在一相互不交的圆盘序列 $D_j^{m,n}$ 的内部是正的，在 $D_j^{m,n}$ 的并集的外部的属于 $x\geqslant 0$ 的部分中 $\phi=0$. 我们将在 $x\geqslant 0$ 中描述 ϕ; 它在 $x=0$ 上将是无穷阶地消失，因此它可作为 x 的偶函数被延拓到 $x<0$ 处. 对于正整数 $m,\ n,\ j$, $D_j^{m,n}$ 是两两不交的闭圆盘，对每对固定的 $(m,\ n)$, 它们满足下述条件:

（i）$D_j^{m,n}$ 的圆心的纵坐标等于 $1/n$[注2];

（ii）对于 $D_j^{m,n}(j=1,\ 2,\ \cdots)$ 中的任何 $(x,\ y)$, $1/m<x<1/(m-1)$;

（iii）当 $j\to\infty$ 时，$D_j^{m,n}$ 的圆心的横坐标递减于 $1/m$.

容易构造这样的圆盘序列. 我们看到，对固定的 $(m,\ n)$, $D_j^{m,n}$ 收敛于点$\left(\frac{1}{m},\ \frac{1}{n}\right)$. 给出 $D_j^{m,n}$ 后，容易构造出具有上面所描述的所希望的性质的 ϕ.

定理 2 令 ρ 由(2.4)确定，其中 ϕ 有上述性质，则在原点的邻域中，$Pw=0$ 的任何一个属于 C^1 的解 w 必定恒等于常数.

[注 1] 鉴于这个例子，我愿意感谢 F. Treves，因为他与我进行了一次很有帮助的讨论. 这个例子多少有点模仿上面的 Grushin 的例子.

[注 2] 原文的条件(i)中为“圆心的坐标”; 现根据条件 (ii)、(iii), 已在条件(i)中改为“圆心的纵坐标”. ——译者注

定理 2 的证明，很容易加以推广至对于任何广义函数解，同样的结论仍成立。

证明 我们可以假设 w 在一圆心在原点的开圆盘 D 中被确定。因为 P 对于 $x\neq 0$ 是椭圆的，因此对于 $x\neq 0$，函数 $w\in C^{\infty}$。我们写成

$$w=u+v,$$

其中 u 和 v 是关于变量 x 的 w 的奇部和偶部。方程 $Pw=0$ 的偶部为

$$u_x+ixu_y=-ix^2\phi v_y. \tag{2.5}$$

如果我们只考虑 $x\geqslant 0$，并令 $s=x^2/2$，则在除以 x 后我们就得到

$$u_s+iu_y=-i\sqrt{2s}\,\phi\,(\sqrt{2s},\ y)v_y,\qquad 对于\ s\geqslant 0.$$

并得到，在 $s=0$ 上 $u=0$. 因此，在连通集 $\Omega=D\setminus(\overline{\bigcup D_j^{m,n}})$ 中，当 $s>0$ 时，u 是 $s+iy$ 的全纯函数，并且，在负 y 轴上 $u=0$；因此在 Ω 中 $u\equiv 0$. 特别，u 和它的各阶导数在圆盘 $D_j^{m,n}$ 的边界上都等于零。

现在我们将证明，对 $m,\ n=1,\ 2,\ \cdots$，有

$$v_y\left(\frac{1}{m},\ \frac{1}{n}\right)=0. \tag{2.6}$$

假如相反，设对某些 m, n，$v_y(1/m,\ 1/n)\neq 0$. 对于大的 j，在 $D_j^{m,n}$ 上积分方程 (2.5)；由 Green 公式，有

$$0=\iint_{D_j^{m,n}}(u_x+ixu_y)\,dx\,dy=-i\iint_{D_j^{m,n}}x^2\phi v_y\,dx\,dy. \tag{2.7}$$

然而，对于大的 j，对于 $D_j^{m,n}$ 中的 $(x,\ y)$，$\arg v_y(x,\ y)$ 接近 $\arg v_y(1/m,\ 1/n)$，且对于 $\arg x^2\phi v_y$ 也有同样的事实，这就证明了 (2.7) 是不可能的。因此 (2.6) 成立。方程 $Pw=0$ 关于 x 的奇部有形式