

高等  
学校教材

# 高等数学

上册

路見可 熊全淹 編

高等教育出版社

高等学校教材

---



高等数学

上册

路見可 熊全淹 編

高等教育出版社

---

本书是为综合大学化学专业编写的“高等数学”课程教材。全书分上、下册出版。上册包括解析几何与一元函数的微积分学。下册包括无穷级数，多元函数的微积分学与微分方程等。书中叙述比较详细，便于学生自学复习，也编入一部分可供选择学习的材料，以满足不同学生的需要。为了使师生方便，书中并附有一些基本习题。

本书可供综合大学、师范学院化学专业作为教材之用，也可作工科性质相近的各专业的教材或参考用书。

## 高等数学

上册

---

路见可 熊全淹 编

北京市书刊出版业营业许可证出字第119号

高等教育出版社出版(北京景山东街)

人民教育印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

---

统一书号K13010·1181 开本 850×1168  $\frac{1}{32}$  印张 12  $\frac{12}{16}$

字数 317,000 印数 0,001—3,800 定价(5) ¥1.20

1965年6月第1版 1965年6月北京第1次印刷

## 序 言

本书最初是在 1956—1957 年根据综合大学化学专业的数学教学需要编写的，中间修改过几次，最后以 240 学时为标准改编而成。

这里编写的材料比教学要求多一些，这些多出的部分都用“小字”排印，而“大字”部分都是按教学要求编写的，自成系统。这样，我们认为既便于教学，又便于根据学生特点，因材施教。我们还编进了一些最基本的习题，在教学中可以根据具体情况，适当增减。

关于极限中的“ $\varepsilon-N$ ”，“ $\varepsilon-\delta$ ”方法，虽然不必要求学生熟练运用，但为了使學生較清楚、正确地理解极限、連續概念，仍把这一部分教材写得比較詳細。另外，我們把向量代数放在空間解析几何后面，在空間解析几何中不引用向量，我們认为这样做學生較易接受。必要时也可考虑删去向量代数这一章。

在编写时希望做到便于学生自学和复习，因此許多地方写得較詳細，这样，篇幅就显得大一些。

在教学中，各章的順序可以根据需要进行更动，譬如空間解析几何，向量代数可以放到多元函数的微分学之前，又如級数与函数展开可以放到重积分之后等等。

考虑到工科各专业的“高等数学”教学內容与化学专业的基本相同，所以我們认为本书也可作为这些专业的教材或参考书，在编写时我們已注意到这点。

由于我們的水平限制，錯誤和不妥之处在所难免，特别是我們对于“少而精”的精神体会不深，对教材的处理也不一定恰当。希望广大师生和讀者惠予指正。

編者 1965 年元月

# 目 录

序言 .....	vi
----------	----

## 第一篇 解析几何

第一章 行列式 .....	1
§ 1.1 行列式的定义 .....	1
§ 1.2 行列式的性质 .....	8
§ 1.3 一次方程组 .....	12
第二章 平面解析几何 .....	17
§ 2.1 平面直角坐标 .....	17
§ 2.2 曲线及方程 .....	26
§ 2.3 直线 .....	34
§ 2.4 圆 .....	45
§ 2.5 二次曲线的标准形式 .....	49
§ 2.6 坐标变换 .....	60
§ 2.7 一般二次方程 .....	69
§ 2.8 参数方程 .....	74
§ 2.9 极坐标 .....	78
第三章 空间解析几何大意 .....	86
§ 3.1 空间直角坐标 .....	86
§ 3.2 平面 .....	92
§ 3.3 直线 .....	98
§ 3.4 几种主要曲面 .....	104
§ 3.5 二次曲面 .....	110
第四章 向量代数 .....	115
§ 4.1 向量概念及其加减法 .....	115
§ 4.2 向量的坐标表示法 .....	118
§ 4.3 向量的数积 .....	121
§ 4.4 向量的向量积 .....	124

## 第二篇 数学分析

第一章 变量与函数 .....	129
§ 1.1 绝对值、不等式 .....	129

§ 1.2	变量、区间	131
§ 1.3	函数及其表示法	134
§ 1.4	初等函数	141
<b>第二章</b>	<b>极限与连续</b>	<b>151</b>
§ 2.1	数列及其极限	151
§ 2.2	函数的极限	160
§ 2.3	无穷小量的性质	169
§ 2.4	极限的运算	174
§ 2.5	两个极限存在的判别法、两个重要极限	183
§ 2.6	无穷小的比较	190
§ 2.7	连续函数	195
§ 2.8	连续函数的性质	200
§ 2.9	初等函数的连续性	204
<b>第三章</b>	<b>导数与微分</b>	<b>210</b>
§ 3.1	函数的变率、导数概念	210
§ 3.2	函数微分法的一般规则	221
§ 3.3	初等函数微分法	229
§ 3.4	高阶导数	240
§ 3.5	微分概念	244
<b>第四章</b>	<b>微分学的应用</b>	<b>255</b>
§ 4.1	平面曲线的切线、法线与交角	255
§ 4.2	弧的微分、曲率	259
§ 4.3	中值定理	265
§ 4.4	利用一阶导数研究函数的性质	271
§ 4.5	利用二阶导数研究函数的性质	280
§ 4.6	函数图形的作法	289
§ 4.7	罗必达法则	292
§ 4.8	方程的近似解法	300
<b>第五章</b>	<b>不定积分</b>	<b>305</b>
§ 5.1	原函数、不定积分	305
§ 5.2	不定积分的性质和基本积分公式	308
§ 5.3	积分的基本法则之一——换元积分法	311
§ 5.4	积分的基本法则之二——分部积分法	318
§ 5.5	有理函数积分法	323
§ 5.6	无理函数及超越函数积分法	332
§ 5.7	积分法概述	341

---

第六章 定积分及其应用 .....	345
§ 6.1 定积分概念 .....	345
§ 6.2 定积分与不定积分的联系 .....	352
§ 6.3 定积分的性质 .....	357
§ 6.4 定积分计算中的两个法则 .....	362
§ 6.5 定积分的近似计算 .....	369
§ 6.6 广义积分 .....	377
§ 6.7 定积分的几何应用 .....	386
§ 6.8 定积分的力学应用 .....	398

# 第一篇 解析几何

## 第一章 行列式

### § 1.1 行列式的定义

解析几何是要运用代数方法来研究几何问题，因此在学习解析几何之前，我们首先要初步掌握一些代数知识。本章我们简要地介绍中学里曾经见过的一种代数工具——行列式，它不仅在学习解析几何及数学的其他部门时要用到，而且在力学及其他学科中也是常用的一种工具。

首先我们来求解二元一次方程组

$$\left. \begin{aligned} a_1x + b_1y &= k_1, \\ a_2x + b_2y &= k_2. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

为了消去  $y$ ，可在前一式中遍乘  $b_2$ ，后一式中遍乘  $b_1$ ，然后相减，即得

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = k_1b_2 - k_2b_1.$$

同样，消去  $x$ ，得

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1k_2 - a_2k_1.$$

如果  $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ，则得

$$x = \frac{k_1b_2 - k_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1k_2 - a_2k_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \quad (2)$$

为了便于记忆这结果，我们采用以下的记号：设  $a, b, c, d$  是任意四个数，把它们排成正方形，规定

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \quad (3)$$



这式左边的記号, 称作二阶行列式.  $a, b, c, d$  叫做它的元, 横排叫做行, 纵排叫做列. 因此行列式就是把它的元按照一定方式运算(左上、右下二元乘积与左下、右上二元乘积的差)的结果, 这结果我們叫做行列式的值, 所以行列式的值也是一个数.

这样, 方程組(1)的解(2), 就可用行列式記作

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \quad (4)$$

当然这里已假定  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ . 它是  $x, y$  的分母行列式, 我們称它为方程組(1)的系数行列式.  $x$  的分子行列式是由系数行列式中把相应于  $x$  系数的列(第一列)改作方程組(1)中右边常数列  $k_1, k_2$  的结果,  $y$  的分子行列式则是把相应于  $y$  的系数的列(第二列)改作常数列  $k_1, k_2$  的结果. 这样, 方程組(1)的解便很容易記忆了.

### 例 1. 求解方程組

$$\left. \begin{aligned} 3x - 5y &= 4, \\ x + 2y &= -3. \end{aligned} \right\}$$

解 由公式(4), 得

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{8 - 15}{6 + 5} = -\frac{7}{11},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{11} = \frac{-9 - 4}{11} = -\frac{13}{11}.$$

現在我們来求解三元一次方程組

$$\left. \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= k_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= k_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= k_3. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

为了解出  $x$ , 我們可以这样做: 先在后两方程中, 暂时把  $x$  当作已知, 求出  $y, z$ , 然后代入第一式中, 最后解出  $x$ . 把后面两式写成

$$\begin{aligned} b_2y + c_2z &= k_2 - a_2x, \\ b_3y + c_3z &= k_3 - a_3x. \end{aligned}$$

由(4)式, 得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y &= \begin{vmatrix} k_2 - a_2x & c_2 \\ k_3 - a_3x & c_3 \end{vmatrix} = (k_2 - a_2x)c_3 - (k_3 - a_3x)c_2 \\ &= (k_2c_3 - k_3c_2) - (a_2c_3 - a_3c_2)x = \begin{vmatrix} k_2 & c_2 \\ k_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x, \\ \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} z &= \begin{vmatrix} b_2 & k_2 - a_2x \\ b_3 & k_3 - a_3x \end{vmatrix} = b_2(k_3 - a_3x) - b_3(k_2 - a_2x) \\ &= -(k_2b_3 - k_3b_2) + (a_2b_3 - a_3b_2)x = - \begin{vmatrix} k_2 & b_2 \\ k_3 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} x. \end{aligned}$$

(这里我們宁可不把  $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$  移作右边的分母, 因为它不一定异于零.)

在(5)的第一式中, 遍乘  $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ , 并把上面二式代入, 整理后, 得

$$\begin{aligned} & \left( a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \right) x \\ &= k_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} k_2 & c_2 \\ k_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} k_2 & b_2 \\ k_3 & b_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

这里  $x$  的系数是由九个数  $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3$  按照一定法則計算出来的結果. 与前面一样, 我們用三阶行列式来記这个結果:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad (7)$$

或者,把右边的二阶行列式都计算出来,就得到三阶行列式的计算方法如下:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2. \quad (8)$$

注意到(6)式右边与左边  $x$  的系数形式一样,只是把其中的  $a_1, a_2, a_3$  分别换成了  $k_1, k_2, k_3$ . 因此,用行列式的记法,(6)式就可写成

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

如果这里左边的行列式即方程组(5)的系数行列式不等于零,最后便求得

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

它的分子行列式正好又是在(5)的系数行列式(7)中把相应于  $x$  系数的列  $a_1, a_2, a_3$  (第一列)换作右边常数列  $k_1, k_2, k_3$  的结果.

同样可算出  $y, z$ . 我们不再具体运算了,只把结果(连同前式)写在下面:

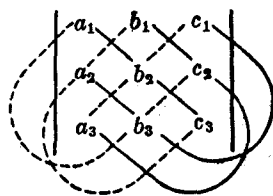
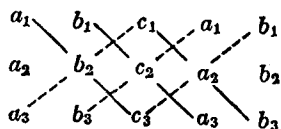
$$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}. \quad (9)$$

这里右边的分母行列式都是(5)的系数行列式,而分子行列式就是把相应于这一未知数系数的列改为常数列  $k_1, k_2, k_3$ .

这样,解三元一次方程组的问题就成为计算一些三阶行列式的问题了.

三阶行列式的值可以根据公式(8)来计算,当然也可用(7)式来计算——(7)式常常称作把三阶行列式按第一行展开的公式.公式(8)可以这样来记忆:把要计算的行列式九个元写出(相对位置不改变),再

添加第一、二两列于右边,如右上图;然后,把表中自左上到右下的每一对对角线(表中用实线表示的)上的元连乘,然后三项相加;再把表中自右上到左下的每一对对角线(表中用虚线表示的)上的元连乘,相加;最后把两个结果相减即得.读者不妨与(8)式核对,结果的确一致.我们也可以更简便地就在行列式中画上实线和虚线如右下图;然后相乘,相加,最后相减,如上法.



例 2.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix} = a^3 + (-1)^2 a + a \cdot 1^2 - a^3 - 1 \cdot (-1) \cdot a - a(-1) \cdot 1 \\ = a^3 + a + a - a^3 + a + a = 4a.$$

例 3. 解联立方程组

$$\left. \begin{aligned} 2x - y + z &= 2, \\ 3x + 2y + 2z &= -2, \\ x - 2y + z &= 1. \end{aligned} \right\}$$

解

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6 - 2 - 2 + 8 + 3 = 5,$$

因此

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{1}{5}(4 + 4 - 2 - 2 + 8 - 2) = 2,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{1}{5}(-4 + 3 + 4 + 2 - 4 - 6) = -1,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{1}{5}(4 - 12 + 2 - 4 - 8 + 3) = -3.$$

如果研究更多个元的一次方程组，那就需要更高阶行列式，但这也  
不困难，一般  $n$  阶行列式可以仿照(7)用  $n-1$  阶行列式来定义，譬如四  
阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \\ + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}.$$

## 例 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+ 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 11 - 2 \times (-24) + 5 \times 9 - 4 \times 10 = 64.$$

要注意的是,四阶及四阶以上的行列式不能象二阶、三阶的那样可以用上面画对角线的方法来计算。这很显然,因为根据定义,四阶行列式有 24 项而画对角线则只有 8 项。

## 习 题

## 1. 计算下列各行列式

$$(i) \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix};$$

$$(ii) \begin{vmatrix} \sin a & -\sin a \\ \sin b & \sin b \end{vmatrix};$$

$$(iii) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix};$$

$$(iv) \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & e & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix};$$

$$(v) \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 & 2 \\ -13 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -5 & -5 & 0 & -3 \end{vmatrix};$$

$$(vi) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

答: (i) 10; (ii)  $2\sin a \sin b$ ; (iii) 27; (iv) 0; (v) 40; (vi) 74.

2. 解下列方程組

$$(i) \begin{cases} 3x - 5y = 13, \\ 2x + 7y = 81; \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

答: (i)  $x=16, y=7$ ; (ii)  $x_1 = -\frac{11}{8}, x_2 = -\frac{9}{8}, x_3 = -\frac{6}{8}$ .

### § 1.2 行列式的性质

我們已經知道如何利用行列式來求解一次(或稱綫性)方程組, 因此怎樣更簡捷地計算行列式就有很大的實際意義. 在這一節中, 我們來說明行列式的一些簡單性質. 運用這些性質, 往往可以使行列式的計算大為簡化. 下面我們只限于討論三階行列式(對於二階行列式, 這些性質更加清楚), 對於更高階行列式這些性質仍然成立.

**性質 1.** 把行列式的行和列互換, 行列式的值不變. 即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

由於這個原因, 所以行列式的有關行的性質對於列也成立, 反過來也是如此.

**性質 2.** 把行列式中任意兩行(或兩列)對調, 行列式只變號. 例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}.$$

**性質 3.** 如果行列式的某行(或列)中各元有公因子, 則可以把它提出來. 例如

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

**性质 4.** 如果行列式的某行(或列)中各元都是写成二数的和的形式, 则行列式可以如下法拆成二个行列式的和. 例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + a'_2 & b_2 + b'_2 & c_2 + c'_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

**性质 5.** 如果行列式的两行(或两列)中相应的元成比例(特别, 相应的元相等), 或者, 有一行(或列)的元都是零, 则行列式的值是零. 例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

**性质 6.** 如果把行列式的某行(或列)中各元同乘一因子, 然后把它们加到另行(或列)上去, 而其他的行(或列)不改变, 则行列式的值不变. 例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + ka_1 & b_2 + kb_1 & c_2 + kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

这些性质都可以直接用行列式的展开式(8)来验证. 但如果已验证了前四个性质, 则后两个性质就可以从前面的推出: 性质 5 可以从性质 2, 3 推出; 性质 6 可以从性质 4, 5 推出. 读者不妨把它作为练习.

最后, 我们还要指出展开式(7)的一般推广. 例如我们可以把行列式按第二列展开, 其法如下:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} & \text{(由性质 1)} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{(由性质 2)} = - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\ & \text{(由(7)式)} = -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$



$$= -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

它与(7)式基本上是相同的：都是把某一行或列中各元分别乘以从原行列式中划去了这个元所在的行和列所得的二阶行列式，然后再进行加、减。所要注意的，就是每项前面的符号，有时是正号、有时是负号。这要看当初所取的那个元在行列式中的位置而定。我们做一“符号行列式”

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix},$$

如果所取的元是在负号的位置上，相应的项前面就要取负号，如果是在正号的位置上，前面就添加正号。这个原则我们不去验证了，我们只举一个例来说明其用法。例如我们来计算前节例3中系数行列式，要求按第三行展开，得

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-2 - 2) + 2(4 - 3) + 1 \cdot (4 + 3) = -4 + 2 + 7 = 5,$$

结果与以前所计算的一样。

### 例 1.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 8 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \cdot \\ 2 \cdot \\ 3 \cdot \end{matrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 8 & 4 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 \cdot \\ 3 \cdot \\ 4 \cdot \end{matrix} = 6 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 8 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 \cdot \\ 4 \cdot \\ 5 \cdot \end{matrix} \\ = 6 \begin{vmatrix} 7 & 5 & 5 \\ 12 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 \cdot \\ 5 \cdot \\ 6 \cdot \end{matrix} = 6 \begin{vmatrix} 7 & 5 & 10 \\ 12 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 \cdot \\ 6 \cdot \\ 7 \cdot \end{matrix} \\ = 6(21 - 120) = -594,$$