大学数学学习指导

数学物理方程

——方法导引

陈恕行 秦铁虎 编著

复旦大学出版社

DA XUE SHU XUE XUE XI ZHI DAO

大学数学学习指导

数学物理方程

——方法导引

陈恕行　秦铁虎　编著

复旦大学出版社

责任编辑 范仁梅
责任校对 马金宝

数学物理方程
——方法导引
陈恕行　秦铁虎　编著
复旦大学出版社出版
（上海国权路 579 号）
新华书店上海发行所发行　复旦大学印刷厂印刷
开本 850×1168　1/32　印张 8.625　字数 247,000
1991 年 5 月第 1 版　1991 年 5 月第 1 次印刷
印数 1—5000
ISBN 7-309-00578-3/O·85
定价：2.90 元

序　言

数学物理方程在自然科学以及工程技术中有广泛的应用，又与其他各数学分支有密切的联系。目前在各高等学校数学类专业的教学计划中都设置了这门课程，而且许多理工科的专业也往往按不同深度讲授这一课程的内容。无疑，这门课程对于培养学生的数学理论基础与解决实际问题的能力都起着重要的作用。

编写本书的目的就是希望对学生学习与掌握数学物理方程的内容起到一定的帮助作用。有些初次接触数学物理方程的学生感到这门课程不容易学。分析其原因，大体有对物理背景不熟悉、分析运算不熟练以及不善于归纳总结等。数学物理方程来源于物理学等自然科学，微分方程本身以及许多定解问题的归结都需要一定的物理知识。有些解决问题的方法以及所引入的数学概念，也往往有相应的物理解释。因而，加强对有关物理知识的了解，对于数学物理方程的学习是很有帮助的。其次，数学物理方程内容丰富、方法多样，难以用统一的格式展开内容并加以讨论，这是由学科的特点及其发展现状所决定的。所以在学习这门课程时，更需时时从理论内容与方法技巧两方面来剖析各部分内容，并经常比较各类方程以及各类解决问题方法的异同，以求融会贯通。再则，为求得一个数学问题的解决，一般都要经过一定的计算。在本课程中尤其是如此。这时，良好的分析计算训练、熟练的运算能力就起着重要的作用。总之，关键在于根据数学物理方程课程的特点，认真对待每一个环节。只要这样，这门课程是不难学好的，而且是很有兴趣的。

本书中所涉及的内容，一般不超过国家教委制定的高等学校数学系数学物理方程课程教学大纲的要求。与一些常见的教科书不同，对于一般教科书中均已述及的内容，我们在本书中往往不再详述。特别对一些较容易的内容，仅作简要的归纳与总结。而对初学者可能遇到

的困难之处，则多作解释，或增添些前后比较与评注。此外，我们选配了较多的例题与习题，附录中还专门分析了两套考卷，并对每个习题均给出了解答与提示，从而为读者提供更多的训练机会。其中有些习题来源于历届研究生考题，在解这些习题时更需要一定的综合分析能力。我们设想，此书既可以作为初学数学物理方程时的学习参考书，也可以作为系统复习这门课的参考书。当然，对于其他有关的教师与工程技术人员也是一本有用的参考资料。

在编写本书的过程中，我们参考了许多国内外著作、教材与讲义（见参考书目）。这些教材中蕴含着丰富的内容与教学经验，对于本书的编写帮助很大。在此我们谨向有关作者致以深切的感谢。由于我们的知识和经验所限，本书中可能有不少缺点与不足之处，欢迎读者批评指正。

编　者

1990年3月于复旦大学

目　录

第一章　二阶线性偏微分方程的分类及特征理论

波动方程、**热传导方程**与**调和方程**是三种最重要的**二阶线性偏微分方程**.同时，它们也是不同类型的二阶线性偏微分方程的典型代表.这一章将从一般的二阶线性偏微分方程出发，通过化标准型将方程加以分类。这种分类能使我们清楚地了解上述三类最重要的数学物理方程的代表性。此外，我们应注意在一点对方程进行分类与在一个区域中对方程进行分类的联系与异同，应注意对含两个自变量的方程与含多个自变量的方程进行分类的方法的异同。

特征(特征线、特征曲面)的概念是偏微分方程理论中最基本、最重要的概念，它决定了方程的分类，同时对于偏微分方程定解问题的提法、解的性质以至求解方法起着重要的作用。这一点在初次接触偏微分方程时还不容易有深刻的体会，希望读者随着学习的深入，能逐渐加深理解这一概念及其重要性。

§1　方 程 的 分 类

1.1　含两个自变量的二阶线性偏微分方程的分类

含两个自变量的二阶线性偏微分方程的**一般形式**是

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f, \tag{1.1}$$

其中 a_{11},a_{12},a_{22} 不同时为零.方程的分类依赖于行列式 $\Delta=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ 的取值或矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ 的特征值λ_1,λ_2的符号.

若 $\Delta>0$(等价地，λ_1,λ_2 不等于零且同号)，则称(1.1)为**椭圆型的**；

若 $\Delta<0$ (等价地，λ_1,λ_2 不等于零且异号)，则称(1.1)为**双曲型的**；

若 $\Delta = 0$（等价地，λ_1, λ_2 有一个为零），则称(1.1)为**抛物型**的。

若(1.1)在区域 Ω 中的每一点上都是椭圆型(相应地，双曲型或抛物型)的，则称(1.1)在区域 Ω 中为椭圆型(相应地，双曲型或抛物型)方程。

根据连续性，由 Δ 在一点大于零或小于零可推得 Δ 在该点的某邻域中也是如此。所以方程为椭圆型或双曲型的性质总是在一个区域中成立的。反之，Δ 在一点等于零并不能告诉我们它在这一点的邻域中符号是怎样的，因此我们又有：

若(1.1)在区域 Ω 的一个子区域上为双曲型的，在 Ω 的另一个子区域上为椭圆型的，则称(1.1)在区域 Ω 中为**混合型方程**；

若(1.1)在区域 Ω 的一个子区域上为双曲型的，在其余点（不一定构成子区域）上为抛物型的，则称（1.1）在区域 Ω 中为**退化双曲型方程**；

若(1.1)在区域 Ω 的一个子区域上为椭圆型的，而在其余点为抛物型的，则称(1.1)在区域 Ω 中为**退化椭圆型方程**。

这里需特别指出的是，方程的类型一般只与其最高阶导数项有关。

如果一个二阶方程(1.1)在区域 Ω 中具有确定的类型，则可以通过自变量变换将它化为**标准型**。双曲型方程的标准形式是

$$u_{xx} - u_{yy} + Au_x + Bu_y + Cu = f, \tag{1.2}$$

或

$$u_{xy} + Au_x + Bu_y + Cu = f; \tag{1.3}$$

椭圆型方程的标准形式是

$$u_{xx} + u_{yy} + Au_x + Bu_y + Cu = f; \tag{1.4}$$

抛物型方程的标准形式是

$$u_{xx} + Bu_y + Cu = f. \tag{1.5}$$

显然，弦振动方程、调和方程、热传导方程分别具有(1.2)，(1.4)，(1.5)中所述的形式。

将二阶方程的一般形式（1.1）化成各种标准型的方法在一般的数学物理方程书中都有详细的叙述，以下我们只举一些例子来说明如何灵活运用这些方法，以及必须注意的问题。

［例 1.1］ 将 Tricomi 方程

$$yu_{xx}+u_{yy}=0 \tag{1.6}$$

在上、下半平面分别化成标准型。

解 方程(1.6)的特征方程为

$$y\,\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}x^2=0,$$

当 $y>0$ 时，它可写成

$$\mathrm{d}x\pm i\sqrt{y}\,\mathrm{d}y=0,$$

其首次积分为 $x\pm i\frac{2}{3}y^{3/2}=c$，于是可作变换

$$\begin{cases}\xi=x,\\ \eta=\dfrac{2}{3}y^{3/2}.\end{cases} \tag{1.7}$$

经计算知

$$\begin{cases}u_{xx}=u_{\xi\xi},\\ u_{yy}=(u_\eta y^{\frac{1}{2}})_y=u_{\eta\eta}y+\dfrac{1}{2}u_\eta y^{-\frac{1}{2}}\\ \qquad =y\left(u_{\eta\eta}+\dfrac{1}{3\eta}u_\eta\right).\end{cases}$$

于是方程(1.6)在上半平面 $y>0$ 内可化为

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{3\eta}u_\eta=0. \tag{1.8}$$

又当 $y<0$ 时，(1.6)的特征方程为

$$\mathrm{d}x\pm\sqrt{-y}\,\mathrm{d}y=0,$$

其首次积分为 $x\pm\frac{2}{3}(-y)^{3/2}=c$，引入变换

$$
\begin{cases}
\xi = x - \dfrac{2}{3}(-y)^{3/2}, \\
\eta = x + \dfrac{2}{3}(-y)^{3/2}.
\end{cases}
\tag{1.9}
$$

可计算得

$$
\begin{cases}
u_x = u_\xi + u_\eta, \\
u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}; \\
u_y = (u_\xi - u_\eta)(-y)^{\frac{1}{2}}, \\
u_{yy} = (u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})(-y) - (u_\xi - u_\eta)\cdot\dfrac{1}{2}(-y)^{-\frac{1}{2}}.
\end{cases}
$$

于是，方程(1.6)在下半平面 $y<0$ 内可化为

$$
4yu_{\xi\eta} - \frac{1}{2}(u_\xi - u_\eta)(-y)^{-1} = 0,
$$

$$
u_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi-\eta)}(u_\xi - u_\eta) = 0. \tag{1.10}
$$

注 本例中 $y=0$ 为变型线，当点(x,y)从上半平面趋于 x 轴时，(1.8)中的 $\eta\to 0$，则(1.8)的系数趋于无限大；又当点(x,y)从下半平面趋于 x 轴时，(1.10)中的 $\xi-\eta\to 0$，故(1.10)的系数趋于无限大。所以标准型(1.8)及(1.10)只是在开的上半平面内或开的下半平面内有效。

1.2 含多个自变量的二阶线性偏微分方程的分类

当方程中自变量的个数大于 2 时，它已不能像仅含两个自变量的二阶方程那样，能在一个区域中将方程化成标准型。但仍可以利用其系数构成的矩阵对方程进行分类。含多个自变量的二阶方程的一般形式为

$$
\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f, \tag{1.11}
$$

其中 a_{ij} 不同时为零，$a_{ij}=a_{ji}$，作矩阵 $A=(a_{ij})$，并记它的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，则对任一点$(x_1^0,\cdots,x_n^0)$有如下的分类：

若 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 均不为零，且同号，则称(1.11)为**椭圆型**方程；

若 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 均不为零，其中 $n-1$ 个有相同符号，另一个的符号与此相反，则称(1.11)为**双曲型**方程；

若 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 均不为零，且有不少于两个的特征根具有正号，不少于两个的特征根具有负号(显然，此时要求 $n\geqslant 4$)，则称(1.11)为**超双曲型**方程；

若 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$中有一个为零，其余同号，则称(1.11)为**抛物型**方程。

注 1 上面列出的分类只包含了一部分情形，还有许多情况未包括在内。如果考虑到在一个区域中自变量变化的各种变型、退化情形的出现，则方程的分类问题是相当复杂的。

注 2 即使在一个区域中方程类型不变，一般也不一定能通过自变量变换将含多变量的二阶方程化成标准型，仅在一些特殊情形下(如常系数等)可以将方程的主部化到高维调和方程或高维波动方程的情形。

注 3 为了将方程形式化简，有时也引入一些未知函数的变换，这种方法得根据具体问题灵活运用。

[**例 1.2**] 试证：若(1.11)为常系数椭圆型方程，它必能通过自变量与未知函数的变换化成 $\Delta u+cu=0$ 的形式。

证明 设(1.11)式中的系数矩阵 (a_{ij}) 为正定，则存在正交矩阵 U，使 $UAU'=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，记 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,\cdots,y_n)$，变换 $y=Ux$ 使方程(1.11)变成

$$\sum_{i,j=1}^{n}\bar{a}_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i\partial y_j}+\sum_{i=1}^{n}\bar{b}_i\frac{\partial u}{\partial y_i}+cu=f. \qquad (1.12)$$

记 $\bar{A}=(\bar{a}_{ij})$，则 $\bar{A}=UAU'$，所以(1.12)即为

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}+\sum_{i=1}^{n}\bar{b}_i\frac{\partial u}{\partial y_i}+cu=f,$$

令 $z_i=\lambda_i^{-\frac{1}{2}}y_i\ (i=1,\cdots,n)$，可得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial z_i^2}+\sum_{i=1}^{n}\bar{\bar{b}}_i\frac{\partial u}{\partial z_i}+cu=f,$$

再令 $v=u\cdot\exp\left(\frac{1}{2}\Sigma\bar{\bar{b}}_i y_i\right)$，上式即化成

$$\Delta v+c_1 v=f_1, \tag{1.13}$$

其中 $c_1=c-\Sigma\frac{1}{4}\bar{\bar{b}}_i^2$，$f_1=f\cdot\exp\left(\frac{1}{2}\Sigma\bar{\bar{b}}_i z_i\right)$。证毕。

［**例 1.3**］ 若(1.11)为区域Ω中的变系数双曲型方程，则对$P\in\Omega$，在点 P 的某一邻域中一定可将(1.11)的二阶项部分化成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}+\sum_{i,j=2}^{n} p_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j},$$

其中(p_{ij})为 $n-1$ 阶负定矩阵。

证明 按双曲型方程的定义知，矩阵 $(a_{ij}(P))_{i,j=1,\cdots,n}$ 的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 均不等于零，且 $n-1$ 个同号，另一个取异号，不妨设 $\lambda_1>0$，$\lambda_2,\cdots,\lambda_n<0$。今若常系数正交矩阵 U 满足 $U'A(P)U=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，则通过变换 $y=Ux$ 可以将方程化成

$$\sum_{i,j=1}^{n}\bar{a}_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i\partial y_j}+\sum_{i=1}^{n}\bar{b}_i\frac{\partial u}{\partial y_i}+cu=f, \tag{1.14}$$

其中 $(\bar{a}_{ij})$ 在点 P 为对角阵，$\bar{a}_{11}(P)=\lambda_1>0$，故在点 P 的邻域 Ω_1 中 $\bar{a}_{11}(y)>0$，今在 Ω_1 中用 $\bar{a}_{11}$ 除(1.14)式，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}+2\sum_{i=2}^{n}a_i\frac{\partial^2 u}{\partial y_i\partial y_1}+\sum_{i,j=2}^{n}\bar{\bar{a}}_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i\partial y_j}$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\bar{\bar{b}}_i\frac{\partial u}{\partial y_i}+\bar{\bar{c}}u=\bar{\bar{f}}. \tag{1.15}$$

现在再将自变量换成 $z_1,\cdots,z_n$，其中 $z_1=y_1$，$z_l(l\geqslant 2)$ 由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z_l}{\partial y_1}+2\displaystyle\sum_{i=2}^{n}a_i\frac{\partial z_l}{\partial y_i}=0,\\ z_l\big|_{y_1=y_{1P}}=y_l\end{cases} \tag{1.16}$$

决定。由于该变换在点 P的 Jacobi 行列式

$$\left|\frac{\partial(z_1,\cdots,z_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}\right|=\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ * & 1 & & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ * & 0 & & 1\end{vmatrix}=1,$$

所以在点 P 的邻域 $\Omega_2 \subset \Omega_1$ 中定义了一个可逆变换 $T: z=z(y)$。对方程(1.15)施行变换 T 后，得到

$$\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial z_j} + \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\partial u}{\partial z_i} + ru = g, \tag{1.17}$$

其中

$$p_{11} = \frac{\partial z_1}{\partial y_1} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} + 2 \sum_{i=2}^{n} a_i \left(\frac{\partial z_1}{\partial y_1} \frac{\partial z_1}{\partial y_i} + \frac{\partial z_1}{\partial y_i} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} \right)$$

$$+ \sum_{i,j=2}^{n} \overline{\overline{a}}_{ij} \frac{\partial z_1}{\partial y_i} \frac{\partial z_1}{\partial y_j} = 1,$$

$$p_{1l} = \frac{\partial z_1}{\partial y_1} \frac{\partial z_l}{\partial y_1} + 2 \sum_{i=2}^{n} a_i \left(\frac{\partial z_1}{\partial y_1} \frac{\partial z_l}{\partial y_i} + \frac{\partial z_1}{\partial y_i} \frac{\partial z_l}{\partial y_1} \right)$$

$$+ \sum_{i,j=2}^{n} \overline{\overline{a}}_{ij} \frac{\partial z_1}{\partial y_i} \frac{\partial z_l}{\partial y_j}$$

$$= \frac{\partial z_l}{\partial y_1} + 2 \sum_{i=2}^{n} a_i \frac{\partial z_l}{\partial y_i} = 0.$$

所以(1.17)的二阶项即为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2} + \sum p_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial z_j}.$$

由于在自变量变换下，二阶线性偏微分方程的二阶项系数矩阵(a_{ij})仅作了相似变换，所以矩阵 $(p_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$ 有一个特征根为正，$n-1$ 个特征根为负，故 $(p_{ij})_{i,j=2,\cdots,n}$ 是负定阵。证毕。

在下面的习题中我们给出了一些方程，请将它们化成标准型。应注意的是，将给定方程化成标准型的问题一般不会单独出现，它常常是在讨论某个偏微分方程或相应的定解问题时所需进行的第一步工作。如有这种需要时，我们应能熟练地进行所需的演算。

习 题

1. 证明含两个自变量的二阶线性偏微分方程经过可逆变换后类型不变。
2. 判定下列方程的类型：

(1) $u_{xx} + xyu_{yy} = 0$;

(2) $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+u_y=0$;

(3) $u_{xx}-2\sin x\cdot u_{xy}+\cos^2 x\cdot u_{yy}-\cos x\cdot u_y=0$;

(4) $y^m u_{xx}+u_{yy}+au_x+bu_y+cu=0$, m 为正整数;

(5) $x^2u_{xx}-y^2u_{yy}=0$;

(6) $\operatorname{sgn} y\cdot u_{xx}+2u_{xy}+\operatorname{sgn} x\cdot u_{yy}=0$,

其中

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & x>0,\\ 0 & x=0,\\ -1 & x<0.\end{cases}$$

3. 将下列方程化成标准型:

(1) $u_{xx}+x^2u_{yy}=0$, $x>0$;

(2) $y^2u_{xx}+x^2u_{yy}=0$, 在第一象限中;

(3) $4u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}-2u_y=0$;

(4) $u_{xx}+yu_{yy}=0$, 上、下半平面;

(5) $\sin^2 x\cdot u_{xx}-2y\sin x\cdot u_{xy}+y^2u_{yy}$;

(6) $(1+x^2)u_{xx}+(1+y^2)u_{yy}+xu_x+yu_y=0$.

4. 证明二阶常系数双曲型方程必可通过自变量的变换与未知函数的变换,化成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2}-\sum_{j=2}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_j^2}+cu=f.$$

5. 证明常系数方程

$$u_{xy}+au_x+bu_y+cu=0$$

必可通过未知函数的变换化成 $v_{xy}+c_1v=0$ 的形式.

6 判定下列方程的类型:

(1) $u_{x_1x_1}+2\sum\limits_{k=2}^{n}u_{x_kx_k}-2\sum\limits_{k=1}^{n}u_{x_kx_{k+1}}=0$;

(2) $u_{x_1x_1}-2\sum\limits_{k=2}^{n}(-1)^k u_{x_{k-1}x_k}=0$;

(3) $\sum\limits_{k=1}^{n}u_{x_kx_k}+\sum\limits_{l<k}u_{x_lx_k}=0$;

(4) $u_{xx}+2u_{xy}+2u_{yy}+4u_{yz}+5u_{zz}+3u_x+u_y=0$.

7. 对 $\mathscr{R}^n$ 中诸点判定方程

$$\sum_{i,j=1}^{n}(\delta_{ij}-x_ix_j)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+2\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=f$$

的类型，式中

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j,\\ 0 & i\neq j.\end{cases}$$

§2 特征理论

若在区域 Ω 中给定方程

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f, \tag{2.1}$$

对 $(x,y)\in\Omega$，若方向 (α_1,α_2) 满足

$$a_{11}\alpha_1^2+2a_{12}\alpha_1\alpha_2+a_{22}\alpha_2^2=0, \tag{2.2}$$

则称 (α_1,α_2) 为**特征方向**. 若一曲线 $\varphi(x,y)=0$ 的法线方向 (φ_x,φ_y) 恒为特征方向，则称该曲线为**特征曲线**. 且在特征曲线上成立

$$a_{11}\,\mathrm{d}y^2-2a_{12}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+a_{22}\,\mathrm{d}x^2=0. \tag{2.3}$$

下面我们列举有关方程(2.1)的特征线的一些性质. 当然，这些性质是相互关联的，实际上它们从不同的角度表述了特征线的本质.

(1) 实特征方向的个数决定于方程的类型：

若方程(2.1)在区域 Ω 中为双曲型，则 $a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$，于是对 Ω 中任一点都有两个特征方向，从而过任一点可以作出两条特征线；

若方程(2.1)在区域 Ω 中为抛物型，则 $a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0$ 在 Ω 中恒成立，于是对 Ω 中任一点都只有一个特征方向，且过任一点只能作出一条特征线；

若方程(2.1)在区域 Ω 中为椭圆型，则 $a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$，从而(2.2)或(2.3)无实解，故对 Ω 中任一点都不存在实特征方向，在 Ω 中也不存在特征线.

对于二阶方程类型发生变化的点(变型点)，情形较复杂. 这时，过一点往往可作出两条相切的特征线，而特征方向仍只有一个.

(2) 设 Γ：$\varphi(x,y)=0$ 为一给定的曲线，满足 $\varphi_x^2+\varphi_y^2\neq0$. 若 Γ 不是方程(2.1)的特征曲线，则存在可逆变换 $(x,y)\to(\xi,\eta)$，其中 $\xi=\varphi(x,y)$，使在 Γ 的邻域中方程(2.1)可化成

$$u_{\xi\xi}=bu_{\xi\eta}+cu_{\eta\eta}+du_\xi+eu_\eta+fu+g \tag{2.4}$$

的形式。如(2.4)这种将 $u_{\xi\xi}$ 解出的形式称为 Kowalewsky 型。如果 Γ 为(2.3)的特征曲线，则该方程就不可能写成(2.4)的形式。

(3) 设 Γ 为一给定的曲线，在 Γ 上给定了函数 u 及导数 $\frac{\partial u}{\partial l}$ 的值，其中方向 l 不与 Γ 不相切。若 Γ 不是方程(2.1)的特征曲线，则可以利用方程以及在 Γ 上的 u，$\frac{\partial u}{\partial l}$ 之值决定 u 在 Γ 上的各高阶导数之值。若 Γ 是方程(2.1)的特征曲线，则不能唯一地决定所有高阶导数之值。例如，就无法决定 $\frac{\partial^2 u}{\partial l^2}$ 之值。

(4) 特征线是偏微分方程的解可能产生弱间断的线，就是说，如果函数 u 在区域 Ω 中连续，其一阶导数也连续，在曲线 $\Gamma\subset\Omega$ 两侧 u 的二阶导数连续到 Γ，但在 Γ 上二阶导数可能有跳跃。又 u 在 Γ 两侧满足方程，那么 Γ 一定是方程的特征线。

(5) 对双曲型方程来说，它的依赖区域、影响区域与决定区域都是由特征线所界定的，特征线也是解的奇性传播曲线。

[例 2.1] 求方程 $u_{xx}+yu_{yy}=0$ 过下半平面或 x 轴上任意点的特征线。

解 写出特征曲线的微分方程为

$$dy^2+y\,dx^2=0. \tag{2.5}$$

若 $y<0$，则 $(-y)^{-\frac{1}{2}}dy\pm dx=0$，于是得

$$x-x_0=\pm\frac{1}{2}[(-y)^{\frac{1}{2}}-(-y_0)^{\frac{1}{2}}], \tag{2.6}$$

它就是过 (x_0,y_0) 的两条特征线。当 $y_0\to 0$ 时，(2.4)可写成

$$x-x_0=\pm\frac{1}{2}(-y)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.7}$$

由于(2.7)在点 $(x_0,0)$ 的切线均与 x 轴一致，故(2.7)实际上可以用一个统一的方程表示。这个方程为

$$(x-x_0)^2+\frac{1}{4}y=0, \tag{2.8}$$