高等数学学习导引

徐　兵　计慕然　郑梅春　编著

知　识　出　版　社

（京）新登字188号

高等数学学习导引

徐　兵　计慕然
郑梅春　　　　编著

知识出版社出版发行

（北京阜成门北大街17号）

新华书店总店北京发行所经销　　冶金印刷总厂印刷

787×1092毫米　1/32开　　31印张　　664千字

1991年9月第1版　　1991年9月第1次印刷

印数：1—1600册

ISBN　7—5015—0287—0/G·95

定价：13.00元

前　言

多年的高等数学教学使我们深深地领悟到，学生只有掌握基本概念、基本理论、基本方法才有可能学好高等数学。我们也常常以此告诫我们的学生。在教学实践中，我们拟定了高等数学教学的基本任务：引导学生勤于思考、学会提出问题，以搞清基本概念、基本理论；启发学生学会分类、对比、总结，以了解基本性质、定理的条件、结论、证明思路及其应用，掌握基本方法；最终能使学生学好高等数学，达到学生能力提高的目的。

几年来我们一直想总结我们的教学工作，为学生编写一本高等数学学习辅导资料，将上述思想寓意其中。我们希望本书能对读者有所启迪。

本书特点在于：指出教学基本要求；针对教学的基本内容，对有关章节的历史进行了梗概性的简明论述，以期使读者对高等数学的发展有个宏观的了解；围绕教学基本要求对基本概念、性质、定理以提要的方式进行介绍，尽量加以物理的或几何的说明，对基本概念、性质提出必要的思考问题，以加深学生的理解；对有关基本方法通过例题分析适当予以注记，指出问题的特点及值得注意之处，以利于学生进行方法的分类、总结。依据教学基本要求每章后给出一份自我检查题，以使读者对“三基”的掌握进行自我检测。

全书共分十二章。每章分为五个层次：教学基本要求

内容提要、例题分析、自我检查题、附录（思考题、自我检查题参考解答）。

本书第一至四章由计慕然编写，第五至八章由郑梅春编写，第九至十二章由徐兵编写。

王日爽副教授审阅并修订了本书，赵庸副教授也对全书进行了审阅，谨此致谢。

限于水平，书中纰漏难免，恳请读者指正。

本书可作为高等工科院校学生学习高等数学的参考资料，也可作为自学高等数学的读者的学习辅导书，还可供报考硕士生的读者学习参考。

编　者

于北京航空学院

一九八六年十月

目　录

第一章　函　　数

教学基本要求

1. 理解函数的概念；
2. 了解函数的单调性、周期性和奇偶性；
3. 了解反函数、复合函数的概念；
4. 熟练掌握基本初等函数的图形；
5. 能将简单实际问题中的函数关系表达出来。

§1　历史梗概

函数对于中学生来说已是浅显易于接受的概念，然而它的出现与发展却有漫长的过程。

十七世纪早期，伽利略（Galilei）为太阳中心论增添了证据，促进刻卜勒(Kepler)天文学为一般人所接受，如何从运动原理导出刻卜勒定律，如何解释天体运动，如何解释地球运动原理，这一切成了科学家所关注的问题。

从这些对运动的研究中导出了函数概念的发展，在此后的二百年里，这个概念几乎在所有的工作中占中心位置。伽利略在其近代力学著作《两门新科学》一书中，几乎从头到尾包含函数概念，他用文字和比例语言描述函数关系。十七世

纪中叶，詹姆斯·哥里高利（Gregory）定义函数是“从一些其它量经过一系列代数运算而得到的，或者经过任何其它可以想象到的运算而得到的量”。牛顿（Newton）在1665年开始研究微积分工作之后，一直用“流量”一词表示函数关系。莱布尼兹（Leibniz）于1673年首先提出“函数”一词，用来表示任何一个随着曲线上点的变动而变动的量。十七世纪引入的大多数函数都是当作曲线研究的，这一点有极其重要的意义，它使得函数概念有了几何形象，大大有利于函数的研究。莱布尼兹于1714年用函数一词表示依赖于一个变量的量。1734年欧拉（Euler）引入符号 $f(x)$ 表示函数。从此函数成了微积分里的中心概念。欧拉在其1748年的《无穷小分析引论》一书中，把函数定义为由一个变量与一些常量，通过任何方式形成的解析表达式。他引入了超越函数，定义了多元函数；区分了显函数与隐函数、单值函数与多值函数等。

十八世纪的数学家大多相信函数必须处处有解析表达式。直到十八世纪后半叶，在很大程度上是由于弦振动问题的争论，导致欧拉与拉格朗日（Lagrange）等重新考虑函数概念，他们允许在不同区域上某函数有不同的表达式，即引入了分段函数的概念。

然而直到十九世纪上半叶，教科书中有关函数的概念仍是混乱的。1832年狄里赫莱（Dirichlet）提出了函数的近似于现代的定义，破除了函数与解析式子等同的局限性，从而扩大了函数概念的范围。

§2 函数的基本概念

内 容 提 要

一、函数定义

有两个变量 x 和 y，若对于变量 x 在允许范围内的每一个值，变量 y 按某个确定的规则总有一个或多个值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记为 $y=f(x)$。

其中变量 x 称为自变量，变量 y 称为因变量。

思考题1　$y=c$（常数）是否建立了 y 与 x 之间的函数关系？

思考题2　$\sin x$ 是否是 x 的函数？

二、函数的表示法及对应规则

1. 解析法：因变量 y 与自变量 x 的函数关系通过 x 的运算关系式给出。

此时，对应的规则为：对于自变量 x 的一个值，通过运算关系式的计算即可得到因变量 y 的确定值。

这种表示法的最大优点在于便于理论上的分析与研究。

2. 图象法：因变量 y 与自变量 x 的函数关系通过 $o-xy$ 平面上的一条曲线给出。

此时，对应的观则为：对于自变量 x 的一个值，在曲线上找到以此值为横坐标的点 M，则 M 的纵坐标即为因变量 y 所取的值

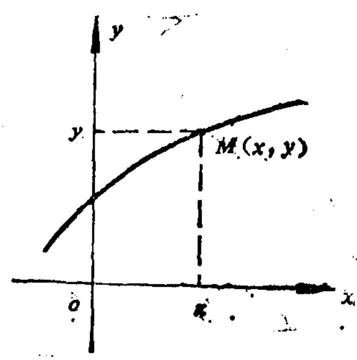

图 1-1

（如图1-1所示）。

这种表示法的最大优点在于两个变量之间的关系显得直观、形象。

3．列表法：因变量y与自变量x的函数关系通过表格给出。例如三角函数表、对数表、反对数表等等。

此时，对应的规则为：对于自变量x的一个值，通过查表即可得到因变量y的值。

这种表示法的最大优点在于便于计算函数值。

思考题3　给出$x^2+y^2=1$，可否认为建立了y与x之间的函数关系？

思考题4　给出$\begin{cases}x=t^3,\\y=\sin t\end{cases}$可否认为建立了$y$与$x$之间的函数关系？

思考题5　给出$y=\begin{cases}\sin x & x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{x} & x>0\end{cases}$可否认为建立了$y$与$x$之间的函数关系？

三、函数的定义域

在函数的定义中，自变量x所允许的取值范围称为函数的定义域。

用解析法给出的函数中，可以根据实际问题的需要和运算表达式的需要来确定函数的定义域。

思考题6　$y=x$与$y=(\sqrt{x})^2$是否是同一个函数？

四、反函数

设$y=f(x)$。在一定的条件下，若将变量y看成自变量，将变量x看成因变量，即对于变量y在允许范围内的每一个

值，按关系式$y=f(x)$相应地得到变量x的值。这就建立起y与x的函数关系$x=\varphi(y)$，我们称$x=\varphi(y)$为$y=f(x)$的反函数。

在习惯上，函数关系中的自变量用x表示，因变量用y表示，因而将反函数$x=\varphi(y)$中的x与y交换位置，得到$y=\varphi(x)$。我们也称$y=\varphi(x)$为$y=f(x)$的反函数。

思考题7　任何一个函数$y=f(x)$是否都有反函数？

思考题8　设$y=f(x)$的反函数为$y=\varphi(x)$，则它们的定义域与值域之间有什么关系？

思考题9　设$y=f(x)$的反函数为$y=\varphi(x)$，则它们的图象有什么关系？

五、函数的几个特性

1. 有界性

设$y=f(x)$。若存在M，对于定义域中的任意x，恒有$|f(x)|<M$，则称$y=f(x)$为有界函数。

2. 单调性

设$y=f(x)$，若对于定义域中任意两点x_1　x_2，

① 恒有$f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称$y=f(x)$为单调上升（增加）函数；若恒有$f(x_1)<f(x_2)$，则称$y=f(x)$为严格单调上升（增加）函数。

② 恒有$f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称$y=f(x)$为单调下降（减少）函数；若恒有$f(x_1)>f(x_2)$，则称$y=f(x)$为严格单调下降（减少）函数

3. 奇偶性

设$y=f(x)$。若对任意的x，

① 恒有$f(-x)=-f(x)$，则称$y=f(x)$为奇函数。

② 恒有$f(-x)=f(x)$，则称$y=f(x)$为偶函数。

思考题10 $y=f(x)$ 能否既是单调增加函数，又是单调减少函数？

思考题11 设$y=f(x)$为奇(偶)函数，其图形有何特征？

思考题12 $y=x^2$ $x\in(-1,2)$，是否为偶函数？

思考题13 $y=f(x)$能否既是奇函数又是偶函数？

4. 周期性

设$y=f(x)$。若存在$T>0$，使$f(x+T)\equiv f(x)$，则称$y=f(x)$为周期函数，称T为周期。

若存在最小的T使上述关系成立，则称T为最小周期。习惯上一些周期函数的周期往往是指最小周期。

例题分析

例1 设$f(x)=x+\dfrac{1}{x}$，求$f(1)$、$f(-x)$、$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$、$f(f(x))$。

解 $f(1)=1+\dfrac{1}{1}=2$

$$f(-x)=(-x)+\frac{1}{(-x)}=-x-\frac{1}{x}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}+x$$

$$f(f(x))=f(x)+\frac{1}{f(x)}=\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x+\frac{1}{x}}$$

$$=x+\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}$$

例 2　设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x<0\\ \sqrt{x} & x\geqslant 0\end{cases}$$ 求 $f(-1)$、$f(0)$、$f(4)$、$f(x^2)$、$f(x+a)$

解　$f(-1)=\dfrac{1}{(-1)}=-1$

$f(0)=\sqrt{0}=0$

$f(4)=\sqrt{4}=2$

$f(x^2)=\sqrt{x^2}=|x|$

$$f(x+a)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+a} & x<-a\\ \sqrt{x+a} & x\geqslant -a\end{cases}$$

例 3　求函数的定义域

（1）　$y=\sqrt{2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{6}{x^2}}$

（2）　$y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}+\ln(2-x)$

（3）$y=\lg(\lg(2x^2+x))$

解

（1）　$y=\sqrt{2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{6}{x^2}}$

$$2-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\geqslant 0$$

$$\frac{2x^2-x-6}{x^2}\geqslant 0$$