

高等数学学习导引

徐 兵 计慕然 郑梅春 编著

知 识 出 版 社

(京)新登字188号

高等数学学习导引

徐 兵 计慕然 编著
郑梅春

知识出版社出版发行

(北京阜成门北大街17号)

新华书店总店北京发行所经销 冶金印刷总厂印刷

787×1092毫米 1/32开 31印张 664千字

1991年9月第1版 1991年9月第1次印刷

印数: 1—1600册

ISBN 7—5015—0287—0/G·95

定价: 13.00元

前 言

多年的高等数学教学使我们深深地领悟到，学生只有掌握基本概念、基本理论、基本方法才有可能学好高等数学。我们也常常以此告诫我们的学生。在教学实践中，我们拟定了高等数学教学的基本任务：引导学生勤于思考、学会提出问题，以搞清基本概念、基本理论；启发学生学会分类、对比、总结，以了解基本性质、定理的条件、结论、证明思路及其应用，掌握基本方法；最终能使学生学习好高等数学，达到学生能力提高的目的。

几年来我们一直想总结我们的教学工作，为学生编写一本高等数学学习辅导资料，将上述思想寓意其中。我们希望本书能对读者有所启迪。

本书特点在于：指出教学基本要求，针对教学的基本内容，对有关章节的历史进行了梗概性的简明论述，以期使读者对高等数学的发展有个宏观的了解；围绕教学基本要求对基本概念、性质、定理以提要的方式进行介绍，尽量加以物理的或几何的说明，对基本概念、性质提出必要的思考问题，以加深学生的理解；对有关基本方法通过例题分析适当予以注记，指出问题的特点及值得注意之处，以利干学生进行方法的分类、总结。依据教学基本要求每章后给出一份自我检查题，以使读者对“三基”的掌握进行自我检测。

全书共分十二章。每章分为五个层次：教学基本要求，

内容提要、例题分析、自我检查题、附录（思考题、自我检查题参考解答）。

本书第一至四章由计慕然编写，第五至八章由郑梅春编写，第九至十二章由徐兵编写。

王日爽副教授审阅并修订了本书，赵庸副教授也对全书进行了审阅，谨此致谢。

限于水平，书中纰漏难免，恳请读者指正。

本书可作为高等工科院校学生学习高等数学的参考资料，也可作为自学高等数学的读者的学习辅导书，还可供报考硕士生的读者学习参考。

编 者

于北京航空学院

一九八六年十月

目 录

前言

第一章 函数	1
教学基本要求.....	1
§ 1 历史梗概.....	1
§ 2 函数的基本概念.....	3
§ 3 初等函数及其图形.....	12
自我检查题.....	25
附录一 思考题参考解答.....	27
附录二 自我检查题参考解答.....	32
第二章 极限与连续	35
教学基本要求.....	35
§ 1 历史梗概.....	35
§ 2 极限的定义.....	37
§ 3 极限的四则运算.....	52
§ 4 极限存在的两个准则与两个重要极限.....	58
§ 5 无穷小量与无穷大量.....	67
§ 6 函数的连续性.....	74
自我检查题.....	87
附录一 思考题参考解答.....	89
附录二 自我检查题参考解答.....	103
第三章 导数与微分	112

教学基本要求	112
§ 1 历史梗概.....	112
§ 2 导数的基本概念.....	115
§ 3 导数的计算.....	125
§ 4 微分及其运算.....	162
自我检查题.....	168
附录一 思考题参考解答.....	170
附录二 自我检查题参考解答.....	177
第四章 导数的应用	181
教学基本要求	181
§ 1 中值定理.....	181
§ 2 罗必塔法则.....	201
§ 3 泰勒公式.....	218
§ 4 函数的单调性与极值.....	237
§ 5 曲线的凹凸性、拐点与渐近线.....	257
§ 6 函数作图.....	271
§ 7 曲率与曲率圆.....	276
§ 8 方程的近似解.....	280
自我检查题.....	285
附录一 思考题参考解答.....	287
附录二 自我检查题参考解答.....	297
第五章 不定积分	305
教学基本要求	305
§ 1 原函数与不定积分概念.....	305
§ 2 不定积分的基本计算方法.....	307
§ 3 几类函数的不定积分.....	336

自我检查题	373
附录一 思考题参考解答	375
附录二 自我检查题参考解答	381
第六章 定积分	395
教学基本要求	395
§ 1 定积分的概念及性质	395
§ 2 微积分基本定理	405
§ 3 定积分的计算方法	423
§ 4 定积分的应用	440
§ 5 广义积分	459
自我检查题	467
附录一 思考题参考解答	469
附录二 自我检查题参考解答	482
第七章 向量代数与空间解析几何	488
教学基本要求	488
§ 1 历史梗概	488
§ 2 向量代数	499
§ 3 平面与直线	509
§ 4 空间曲面与曲线	540
自我检查题	553
附录一 思考题参考解答	555
附录二 自我检查题参考解答	565
第八章 多元函数微分法及其应用	568
教学基本要求	568
§ 1 历史梗概	568
§ 2 多元函数的概念	569

§ 3	二元函数的极限	576
§ 4	二元函数的连续性	587
§ 5	二元函数偏导数及全微分	591
§ 6	复合函数、隐函数微分法及高阶偏导数	602
§ 7	二元函数微分法在几何上应用	623
§ 8	二元函数的极值	630
§ 9	方向导数	650
	自我检查题	655
	附录一 思考题参考解答	662
	附录二 自我检查题参考解答	691
第九章	重积分	698
	教学基本要求	698
§ 1	二重积分	700
§ 2	三重积分	720
§ 3	重积分的应用	736
	自我检查题	747
	附录一 思考题参考解答	749
	附录二 自我检查题参考解答	752
第十章	曲线积分与曲面积分	763
	教学基本要求	763
§ 1	曲线积分	763
§ 2	格林公式	775
§ 3	曲面积分	793
§ 4	场论初步	815
	自我检查题	822
	附录一 思考题参考解答	824

附录二 自我检查题参考解答·····	825
第十一章 级数·····	831
教学基本要求·····	831
§ 1 常数项级数·····	833
§ 2 幂级数·····	848
§ 3 泰勒级数·····	860
§ 4 傅里叶级数·····	880
§ 5 广义积分敛散性的判别法·····	895
自我检查题·····	902
附录一 思考题参考解答·····	904
附录二 自我检查题参考解答·····	911
第十二章 常微分方程·····	919
教学基本要求·····	919
§ 1 历史梗概·····	920
§ 2 一般概念·····	922
§ 3 一阶微分方程·····	925
§ 4 高阶特型·····	944
§ 5 线性微分方程·····	951
§ 6 综合例题·····	963
自我检查题·····	970
附录 自我检查题参考解答·····	972

第一章 函 数

教学基本要求

1. 理解函数的概念;
2. 了解函数的单调性、周期性和奇偶性;
3. 了解反函数、复合函数的概念;
4. 熟练掌握基本初等函数的图形;
5. 能将简单实际问题中的函数关系表达出来。

§1 历史梗概

函数对于中学生来说已是浅显易于接受的概念，然而它的出现与发展却有漫长的过程。

十七世纪早期，伽利略 (Galilei) 为太阳中心论增添了证据，促进刻卜勒 (Kepler) 天文学为一般人所接受，如何从运动原理导出刻卜勒定律，如何解释天体运动，如何解释地球运动原理，这一切成了科学家所关注的问题。

从这些对运动的研究中导出了函数概念的发展，在此后的二百年里，这个概念几乎在所有的工作中占中心位置，伽利略在其近代力学著作《两门新科学》一书中，几乎从头到尾包含函数概念，他用文字和比例语言描述函数关系，十七世

纪中叶，詹姆斯·哥里高利 (Gregory) 定义函数是“从一些其它量经过一系列代数运算而得到的，或者经过任何其它可以想象到的运算而得到的量”。牛顿 (Newton) 在1665年开始研究微积分工作之后，一直用“流量”一词表示函数关系。莱布尼兹 (Leibniz) 于1673年首先提出“函数”一词，用来表示任何一个随着曲线上点的变动而变动的量。十七世纪引入的大多数函数都是当作曲线研究的，这一点有极其重要的意义，它使得函数概念有了几何形象，大大有利于函数的研究。莱布尼兹于1714年用函数一词表示依赖于一个变量的量。1734年欧拉 (Euler) 引入符号 $f(x)$ 表示函数。从此函数成了微积分里的中心概念。欧拉在其1748年的《无穷小分析引论》一书中，把函数定义为由一个变量与一些常量，通过任何方式形成的解析表达式。他引入了超越函数，定义了多元函数，区分了显函数与隐函数、单值函数与多值函数等。

十八世纪的数学家大多相信函数必须处处有解析表达式。直到十八世纪后半叶，在很大程度上是由于弦振动问题的争论，导致欧拉与拉格朗日 (Lagrange) 等重新考虑函数概念，他们允许在不同区域上某函数有不同的表达式，即引入了分段函数的概念。

然而直到十九世纪上半叶，教科书中有关函数的概念仍是混乱的。1832年狄里赫莱 (Dirichlet) 提出了函数的近似于现代的定义，破除了函数与解析式子等同的局限性，从而扩大了函数概念的范围。

§2 函数的基本概念

内 容 提 要

一、函数定义

有两个变量 x 和 y ，若对于变量 x 在允许范围内的每一个值，变量 y 按某个确定的规则总有一个或多个值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记为 $y=f(x)$ 。

其中变量 x 称为自变量，变量 y 称为因变量。

思考题 1 $y=c$ (常数) 是否建立了 y 与 x 之间的函数关系？

思考题 2 $\sin x$ 是否是 x 的函数？

二、函数的表示法及对应规则

1. 解析法：因变量 y 与自变量 x 的函数关系通过 x 的运算关系式给出。

此时，对应的规则为：对于自变量 x 的一个值，通过运算关系式的计算即可得到因变量 y 的确定值。

这种表示法的最大优点在于便于理论上的分析与研究。

2. 图象法：因变量 y 与自变量 x 的函数关系通过 $o-xy$ 平面上的一条曲线给出。

此时，对应的规则为：对于自变量 x 的一个值，在曲线上找到以此值为横坐标的点 M ，则 M 的纵坐标即为因变量 y 所取的值

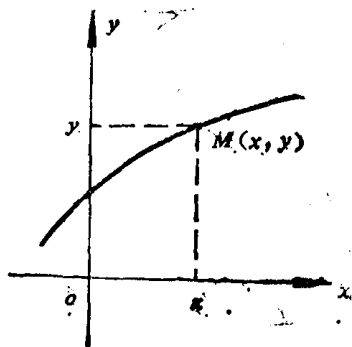


图 1-1

(如图1-1所示)。

这种表示法的最大优点在于两个变量之间的关系显得直观、形象。

3. 列表法：因变量 y 与自变量 x 的函数关系通过表格给出。例如三角函数表、对数表、反对数表等等。

此时，对应的规则为：对于自变量 x 的一个值，通过查表即可得到因变量 y 的值。

这种表示法的最大优点在于便于计算函数值。

思考题3 给出 $x^2 + y^2 = 1$ ，可否认为建立了 y 与 x 之间的函数关系？

思考题4 给出 $\begin{cases} x = t^3, \\ y = \sin t \end{cases}$ ，可否认为建立了 y 与 x 之间的函数关系？

思考题5 给出 $y = \begin{cases} \sin x & x \leq 0, \\ \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$ 可否认为建立了 y

与 x 之间的函数关系？

三、函数的定义域

在函数的定义中，自变量 x 所允许的取值范围称为函数的定义域。

用解析法给出的函数中，可以根据实际问题的需要和运算表达式的需要来确定函数的定义域。

思考题6 $y = x$ 与 $y = (\sqrt{x})^2$ 是否是同一个函数？

四、反函数

设 $y = f(x)$ 。在一定的条件下，若将变量 y 看成自变量，将变量 x 看成因变量，即对于变量 y 在允许范围内的每一个

值，按关系式 $y = f(x)$ 相应地得到变量 x 的值。这就建立起 y 与 x 的函数关系 $x = \varphi(y)$ ，我们称 $x = \varphi(y)$ 为 $y = f(x)$ 的反函数。

在习惯上，函数关系中的自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，因而将反函数 $x = \varphi(y)$ 中的 x 与 y 交换位置，得到 $y = \varphi(x)$ 。我们也称 $y = \varphi(x)$ 为 $y = f(x)$ 的反函数。

思考题 7 任何一个函数 $y = f(x)$ 是否都有反函数？

思考题 8 设 $y = f(x)$ 的反函数为 $y = \varphi(x)$ ，则它们的定义域与值域之间有什么关系？

思考题 9 设 $y = f(x)$ 的反函数为 $y = \varphi(x)$ ，则它们的图象有什么关系？

五、函数的几个特性

1. 有界性

设 $y = f(x)$ 。若存在 M ，对于定义域中的任意 x ，恒有 $|f(x)| < M$ ，则称 $y = f(x)$ 为有界函数。

2. 单调性

设 $y = f(x)$ ，若对于定义域中任意两点 x_1, x_2 ，

① 恒有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ ，则称 $y = f(x)$ 为单调上升（增加）函数；若恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，则称 $y = f(x)$ 为严格单调上升（增加）函数。

② 恒有 $f(x_1) \geq f(x_2)$ ，则称 $y = f(x)$ 为单调下降（减少）函数；若恒有 $f(x_1) > f(x_2)$ ，则称 $y = f(x)$ 为严格单调下降（减少）函数。

3. 奇偶性

设 $y = f(x)$ 。若对任意的 x ，

① 恒有 $f(-x) = -f(x)$ ，则称 $y = f(x)$ 为奇函数。

② 恒有 $f(-x) = f(x)$ ，则称 $y = f(x)$ 为偶函数。

思考题10 $y = f(x)$ 能否既是单调增加函数，又是单调减少函数？

思考题11 设 $y = f(x)$ 为奇(偶)函数，其图形有何特征？

思考题12 $y = x^2 \quad x \in (-1, 2)$ ，是否为偶函数？

思考题13 $y = f(x)$ 能否既是奇函数又是偶函数？

4. 周期性

设 $y = f(x)$ 。若存在 $T > 0$ ，使 $f(x+T) \equiv f(x)$ ，则称 $y = f(x)$ 为周期函数，称 T 为周期。

若存在最小的 T 使上述关系成立，则称 T 为最小周期。习惯上一些周期函数的周期往往是指最小周期。

例题分析

例1 设 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ，求 $f(1)$ 、 $f(-x)$ 、 $f(\frac{1}{x})$ 、 $f(f(x))$ 。

$$\text{解 } f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

$$f(-x) = (-x) + \frac{1}{(-x)} = -x - \frac{1}{x}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} + x$$

$$f(f(x)) = f(x) + \frac{1}{f(x)} = \left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x + \frac{1}{x}}$$

$$= x + \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1}$$

例2 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < 0, \text{ 求 } f(-1), f(0), f(4), f(x^2), f(x+a) \\ \sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{解 } f(-1) = \frac{1}{(-1)} = -1$$

$$f(0) = \sqrt{0} = 0$$

$$f(4) = \sqrt{4} = 2$$

$$f(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$$

$$f(x+a) = \begin{cases} \frac{1}{x+a} & x < -a \\ \sqrt{x+a} & x \geq -a \end{cases}$$

例3 求函数的定义域

$$(1) y = \sqrt{2 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}$$

$$(2) y = \arcsin \frac{x-1}{2} + \ln(2-x)$$

$$(3) y = \lg(\lg(2x^2 + x))$$

解

$$(1) y = \sqrt{2 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}$$

$$2 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} \geq 0$$

$$\frac{2x^2 - x - 6}{x^2} \geq 0$$